Derivation numerical method by using simpson rule to evaluate triple integrations with singular partial derivative integrands

اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة سمبسون لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية

أ.علي حسن محمد   علي حمزة عباس

قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات الثنائية عدديا ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة سمبسون على البعدين X,Y وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبرك [1] ،[7] من خلال حدود التصحيح هذه ، عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي X مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي Y .

وسوف نرمز لطريقة التكامل الثنائي على البعدين Y, X بالرمز RSS حيث ان $SS(h)$ تمثل قيمة التكامل بقاعدة سمبسون ويمكن الاعتماد عليها كونها قد أعطت دقة عالية في النتائج مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات بعدد فترات جزئية قليلة.

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of douple integrals, numerically its integrands have singular partial derivatires not on the end of the region of integration by using theSimpsonrule with the two direction x and y. and the derive the correction error terms and we used Romberg acceleration to improve the results when the number of subintervals on the direction of dimension equal to subintervals on the direction of dimension y . and we will use the symbole ***RSS*** to indicate this method and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integrations and with little subintervals.

1. المقدمة

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق معينة تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع ، إذ إن هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون ، وإن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات كثيرة منها :

1. استحالة إيجاد القيمة التحليلية للتكامل .
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة و زمن طويل.
3. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول(مثل اللوغارتم او معكوس الظل)

أما عملية إيجاد قيمة للتكامل الثنائي فإنها تشكل مسألة اكثر تعقيدا من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي كون المكامل هنا يعتمد على متغيرين وان مسالة الاستمرارية أوالاعتلال في المكامل أوالاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكامل الأحادي .

لهذا فإن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي .

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن [3] عام 1973 ومنهم من عمل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز و رابينوتز [5] عام 1975 ، وفي عام 1984 عمل محمد [9] على أيجاد قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستخدام طرائق مركبة منها طريقة رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على البعدين الخارجي Y والداخلي X .

وفي عام 2011 قدمت موسى [8] أسلوبا جديدا مغايرا لما استعمله الباحثون السابقون إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة سمبسون على البعدين X و Y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي إذ إن ($h=\bar{h}$)، و قدمت ثلاث حالات مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل (مستمر أو مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية أو معتل في احدى او كلتا نهايتي منطقة التكامل) وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.
وفي بحثنا هذا سوف نعمل على أيجاد طريقة عددية بأسلوب مشابه لما قدمته موسى[8] لحساب قيم التكاملات الثنائية عندما تكون دالة التكامل *f(x,y)* مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل وانما الاعتلال حصراً في النقطة (x_0,y_{2n}) أو (x_{2n},y_0) أو الاثنين معا" في آن واحد .

2. التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals for Continuous Integrands with Singularity in Partial Derivatives

لنفرض ان التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة :

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = SS(h)+E(h) \qquad \ldots(1)$$

فيه الدالة $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2n}]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة او اكثر من منطقة التكامل وسنناقش كيفية حساب قيمة هذا التكامل بقاعدة سمبسون على البعدين X و Y حيث ان $SS(h)$ تمثل قيمة التكامل بالقاعدة المذكورة و $E(h)$ سلسلة حدود التصحيح (صيغة الخطا).

مبرهنة 1

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2n}]$ عدا النقطة (x_{2n},y_0) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدةالتالية

$$\begin{aligned}
I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy &= \frac{h^2}{9}\Bigg[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2n})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2n}) \\
&+4\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n})\Big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f(x_0+(2i)h,y_0) \\
&+f(x_0+(2i)h,y_{2n})\Big)+4\sum_{j=1}^{n}\Bigg(f(x_0,y_0+(2j-1)h)+f(x_{2n},y_0+(2j-1)h) \\
&+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h) \Bigg) \\
&+2\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(f(x_0,y_0+(2j)h)+f(x_{2n},y_0+(2j)h)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h) \\
&+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h)\Bigg)\Bigg]+\Bigg[-\frac{1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})-\frac{1}{45}h^7(D_x^{(5)}-D_y^{(5)} \\
&-D_x^{(4)}D_y+D_xD_y^{(4)})+\ldots\Bigg]f(x_{2n-2},y_2)+A_1h^4+A_2h^6+\cdots
\end{aligned}$$

حيث $A_1,A_2,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ،

البرهان

التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة :

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=SS\left(h\right)+E\left(h\right)$$

التكامل اعلاه يمكن تجزئته الى اربعة تكاملات هي:

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy$$
$$+\int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy \qquad ...(2)$$

نلاحظ ان ألتكاملات في هذه الصيغة ان التكامل الاول والثاني والرابع فيها الدالة *f(x,y)* مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات باستخدام ماتوصلت اليه موسى [8] اما بالنسبة للتكامل الثالث في المنطقة الجزئية $\left[x_{2n-2},x_{2n}\right]\times\left[y_0,y_2\right]$فيه الدالة *f(x,y)* مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة $\left(x_{2n},y_0\right)$ وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variables ، موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x_{2n},y_0\right)$ سستري[6]. وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f\left(x,y\right)dxdy=\int_{y_0}^{y_2}\sum_{k=0}^{n-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\sum_{k=0}^{n-2}\Big[f\left(x_{2k},y_0\right)+f\left(x_{2k},y_2\right)$$
$$+f\left(x_{2k+2},y_0\right)+f\left(x_{2k+2},y_2\right)+4\Big(f\left(x_{2k},y_2-h\right)+f\left(x_{2k}+h,y_0\right)+4f\left(x_{2k}+h,y_2-h\right)$$
$$+f\left(x_{2k}+h,y_2\right)+f\left(x_{2k+2},y_2-h\right)\Big)\Big]+a_1h^4+a_2h^6+\cdots \qquad ...(3)$$

$$I_2=\int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[f\left(x_0,y_2\right)+f\left(x_0,y_{2n}\right)+f\left(x_{2n-2},y_2\right)+f\left(x_{2n-2},y_{2n}\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\Big(f\left(x_0+(2i-1)h,y_2\right)+f\left(x_0+(2i-1)h,y_{2n}\right)\Big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f\left(x_0+(2i)h,y_2\right)$$
$$+f\left(x_0+(2i)h,y_{2n}\right)\Big)+4\sum_{j=1}^{n}\Bigg(f\left(x_0,y_2+(2j-1)h\right)+f\left(x_{2n-2},y_2+(2j-1)h\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_2+(2j-1)h\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+(2i)h,y_2+(2j-1)h\right)\Bigg)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(f\left(x_0,y_2+(2j)h\right)+f\left(x_{2n-2},y_2+(2j)h\right)+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_2+(2j)h\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+(2i)h,y_2+(2j)h\right)\Bigg)\Bigg]+b_1h^4+b_2h^6+\cdots \qquad ...(4)$$

بالنسبة للتكامل الثالث في المنطقة الجزئية $\left[x_{2n-2},x_{2n}\right]\times\left[y_0,y_2\right]$ نستعمل متسلسلة تايلر للدالة $f\left(x,y\right)$ حول النقطة $\left(x_{2n-2},y_2\right)$ أي إن:-

$$f(x,y)=f(x_{2n-2},y_2)+(x-x_{2n-2})f_x(x_{2n-2},y_2)+(y-y_2)f_y(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})^2}{2!}f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{(y-y_2)^2}{2}f_{yy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+(x-x_{2n-2})(y-y_2)f_{xy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{(x-x_{2n-2})^3}{3!}f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{(y-y_2)^3}{3!}f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{(x-x_{2n-2})^2(y-y_2)}{2!}f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})(y-y_2)^2}{2!}f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{(x-x_{2n-2})^4}{4!}f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{(y-y_2)^4}{4!}f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{(x-x_{2n-2})^2(y-y_2)^2}{2!2!}f_{xxyy}(x_{2n-2},y_2)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند النقطة (x_{2n-2},y_2) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة(5) في أعلاه في المنطقة $[x_{2n-2},x_{2n}]\times[y_0,y_2]$ نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=4h^2f(x_{2n-2},y_2)-4h^3f_y(x_{2n-2},y_2)+4h^3f_x(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{3!}h^4f_{xx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-\frac{16}{3!}h^5f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{3!}h^5f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{64}{5!}h^6f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{64}{5!}h^6f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{64}{36}h^6f_{xxyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{32}{4!}h^6f_{xxxy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{32}{4!}h^6f_{xyyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{128}{6!}h^7f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-\frac{128}{6!}h^7f_{yyyyy}(x_{2n-2},y_2)+\cdots \qquad ...(6)$$

بالتعويض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ y_0 في الصيغة (5) نحصل على :

$$f(x_{2n-2},y_0)=f(x_{2n-2},y_2)-2hf_y(x_{2n-2},y_2)+2h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{8}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{32}{5!}h^5f_{yyyyy}+... \qquad ...(7)$$

وكذلك بالتعويض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_2 في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_2)=f(x_{2n-2},y_2)+2hf_x(x_{2n-n},y_2)+2h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{8}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{32}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)+... \qquad ...(8)$$

وأيضا بالتعويض عن X بـ x_{2n} وعن y بـ y_0 في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_0)=f(x_{2n-2},y_2)+2hf_x(x_{2n-2},y_2)-2hf_y(x_{2n-2},y_2)+2h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+2h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-4h^2f_{xy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{8}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)-\frac{8}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)-4h^3f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+4h^3f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)+4h^4f_{xxyy}\left(x_{2n-2},y_2\right)$$
$$-\frac{16}{3!}h^4f_{xxxy}\left(x_{2n-2},y_2\right)-\frac{16}{3!}h^4f_{xyyy}\left(x_{2n-2},y_2\right)+\frac{32}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-\frac{32}{5!}h^5f_{yyyyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{32}{4!}h^5f_{xxxxy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{32}{4!}h^5f_{xyyyy}(x_{2n-2},y_2)+\ldots \qquad \ldots(9)$$

ونعوض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ y_2 في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f(x_{2n-2},y_2)=f(x_{2n-2},y_2)-hf_y(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{5!}h^4f_{yyyyy}(x_{2n-2},y_2)+\ldots \qquad \ldots(10)$$

كذلك نعوض عن x بـ $x_{2n-2}+h$ وعن y بـ y_2 في الصيغة (5) نحصل على :

$$f(x_{2n-2}+h,y_2)=f(x_{2n-2},y_2)+hf_x(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)+\cdots \qquad \ldots(11)$$

وبالمثل نعوض عن x بـ $x_{2n-2}+h$ وعن y بـ y_0+h في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f(x_{2n-2}+h,y_0+h)=f(x_{2n-2},y_2)+hf_x(x_{2n-2},y_2)-h\,f_y(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)-h^2f_{xy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-\frac{1}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{2!}h^3f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{2!}h^3f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{4}h^4f_{xxyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{3!}h^4f_{xxxy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{3!}h^4f_{xyyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)$$
$$-\frac{1}{5!}h^5f_{yyyyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{4!}h^5f_{xxxxy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{4!}h^5f_{xyyyy}(x_{2n-2},y_2)+\ldots$$
$$\ldots(12)$$

ثم نعوض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_0+h في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_0+h)=f(x_{2n-2},y_2)+2hf_x(x_{2n-2},y_2)-hf_y(x_{2n-2},y_2)$$
$$+2h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)-2h^2f_{xy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{8}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)-2h^3f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+h^3f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+h^4f_{xxyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{8}{3!}h^4f_{xxxy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{1}{3}h^4f_{xyyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{32}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_{yyyyy}(x_2,y_2)+\cdots \qquad ...(13)$$

واخيرا نعوض عن x بـ $x_{2n-2}+h$ وعن y بـ y_0 في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_{2n-2}+h,y_0)=f(x_{2n-2},y_0)+hf_x(x_{2n-2},y_2)-2hf_y(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_2)+2h^2f_{yy}(x_{2n-2},y_2)-2h^2f_{xy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{3!}h^3f_{xxx}(x_{2n-2},y_2)-\frac{8}{3!}h^3f_{yyy}(x_{2n-2},y_2)-h^3f_{xxy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+2h^3f_{xyy}(x_{2n-2},y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_{xxxx}(x_{2n-2},y_2)+\frac{16}{4!}h^4f_{yyyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+h^4f_{xxyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{2}{3!}h^4f_{xxxy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{8}{3!}h^4f_{xyyy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{1}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_{2n-2},y_2)-\frac{32}{5!}h^5f_{yyyyy}(x_{2n-2},y_2)-\frac{2}{4!}h^5f_{xxxxy}(x_{2n-2},y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^5f_{xyyyy}(x_{2n-2},y_2)+... \qquad ...(14)$$

من الصيغ(5)،(7)،(8)،(9)،(10)،(11)،(12)،(13) و (14) نحصل على :-

$$I_3=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}[f(x_{2n-2},y_0)+f(x_{2n-2},y_2)+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_2)$$
$$+4\big(f(x_{2n-2}+h,y_0)+f(x_{2n-2}+h,y_2)+f(x_{2n-2},y_0+h)+f(x_{2n},y_0+h)$$
$$+4f(x_{2n-2}+h,y_0+h))]\Big[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})+\frac{1}{45}h^7(D_x^{(5)}-D_y^{(5)}-D_x^{(4)}D_y^{(2)}$$
$$+D_x^{(2)}D_y^{(4)}\big)+\cdots\Big]f(x_{2n-2},y_2) \qquad ...(15)$$

$$I_4=\int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\sum_{l=1}^{n-1}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\sum_{l=1}^{n-1}\Big[f\left(x_{2n-2},y_{2l}\right)$$
$$+f\left(x_{2n-2},y_{2l+2}\right)+f\left(x_{2n},y_{2l}\right)+f\left(x_{2n},y_{2l+2}\right)+4\big(f\left(x_{2n-2},y_{2l}+h\right)$$
$$+f\left(x_{2n}-h,y_{2l}\right)+4f\left(x_{2n}-h,y_{2l}+h\right)+f\left(x_{2n}-h,y_{2l+2}\right)+f\left(x_{2n},y_{2l}+h\right)\big)\Big]$$
$$+c_1h^4+c_2h^6+\cdots \qquad ...(16)$$

موسى [8]

حيث $a_i,b_i,c_i,...$ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط و $i=1,2,...$ وبجمع الصيغ (3)، (4)، (15) و(16) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[\ f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_0,y_{2n}\right)+f\left(x_{2n},y_0\right)+f\left(x_{2n},y_{2n}\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\big(f\left(x_0+(2i-1)h,y_0\right)+f\left(x_0+(2i-1)h,y_{2n}\right)\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f\left(x_0+(2i)h,y_0\right)$$
$$+f\left(x_0+(2i)h,y_{2n}\right)\big)+4\sum_{j=1}^{n}\Big(\ f\left(x_0,y_0+(2j-1)h\right)+f\left(x_{2n},y_0+(2j-1)h\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h\right)\ \Big)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\ f\left(x_0,y_0+(2j)h\right)+f\left(x_{2n},y_0+(2j)h\right)+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h\right)\Big)\Big]+\Big[-\frac{1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})-\frac{1}{45}(D_x^{(5)}-D_y^{(5)}$$
$$-D_x^{(4)}D_y+D_x\,D_y^{(4)}\big)+...\ \Big]f\left(x_{2n-2},y_2\right)+A_1h^4+A_2h^6+\cdots \qquad ...(17)$$

حيث $A_1,A_2,...$ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط ، انتهى البرهان

مبرهنة 2

لتكن الدالة $f\left(x,y\right)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[x_0,x_{2n}\right]\times\left[y_0,y_{2n}\right]$ عدا النقطة (x_0,y_{2n}) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدةالتالية

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}[f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_0,y_{2n}\right)+f\left(x_{2n},y_0\right)+f\left(x_{2n},y_{2n}\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\big(f\left(x_0+(2i-1)h,y_0\right)+f\left(x_0+(2i-1)h,y_{2n}\right)\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f\left(x_0+(2i)h,y_0\right)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+(2i)h,y_0+(2j-1)h\right)\Big)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\ f\left(x_0,y_0+(2j)h\right)+f\left(x_{2n},y_0+(2j)h\right)+4\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-2}f\left(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h\right)\Big)\Big]+\Big[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})+\frac{1}{45}h^7(D_x^{(5)}-D_y^{(5)}-D_x^{(4)}D_y$$
$$+D_xD_y^{(4)})+...\ \Big]f\left(x_2,y_{2n-2}\right)+B_1h^4+B_2h^6+\cdots$$

الحالة الثانية:-

البرهان

يمكن كتابة التكامل الثنائي I بالصيغة:

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy+\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy$$
$$+\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy \qquad ...(18)$$

نلاحظ هنا ان التكاملات الاول والثالث والرابع فيها دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة وكذلك مشتقاتها الجزئية معرفة في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها اما بالنسبة للتكامل الثاني في المنطقة الجزئية $[x_0,x_2]\times[y_{2n-2},y_{2n}]$ فهو ذومشتقات جزئية معتلة في النقطة (x_0,y_{2n}) لذا نستخدم متسلسلة تايلر للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_{2n-2},y_2) وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1=\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy=\sum_{l=0}^{n-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\sum_{l=0}^{n-2}[f(x_0,y_{2l})+f(x_0,y_{2l+2})$$
$$+f(x_2,y_{2l})+f(x_2,y_{2l+2})+4(f(x_0+h,y_{2l})+f(x_0+h,y_{2l+2})+4f(x_0+h,y_{2l}+h)$$
$$+f(x_2,y_{2l}+h)+f(x_0,y_{2l}+h))]+d_1h^4+d_2h^6+\cdots \qquad ...(19)$$

بالنسبة للتكامل الثاني في المنطقة الجزئية $[x_0,x_2]\times[y_{2n-2},y_{2n}]$ نستعمل متسلسلة تايلرللدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_2,y_{2n-2}) أي إن:-

$$f(x,y)=f(x_2,y_{2n-2})+(x-x_2)f_x(x_2,y_{2n-2})+(y-y_{2n-2})f_y(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_2)^2}{2!}f_{xx}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(y-y_{2n-2})^2}{2!}f_{yy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+(x-x_2)(y-y_{2n-2})f_{xy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(x-x_2)^3}{3!}f_{xxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(y-y_{2n-2})^3}{3!}f_{yyy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(x-x_2)^2(y-y_{2n-2})}{2!}f_{xxy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_2)(y-y_{2n-2})^2}{2!}f_{xyy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(x-x_2)^4}{4!}f_{xxxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(y-y_{2n-2})^4}{4!}f_{yyyy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(x-x_2)^2(y-y_{2n-2})^2}{2!\times 2!}f_{xxyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_2)^3(y-y_{2n-2})}{3!}f_{xxxy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(x-x_2)(y-y_{2n-2})^3}{3!}f_{xyyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_2)^5}{5!}f_{xxxxx}(x_2,y_{2n-2})+\frac{(y-y_{2n-2})^5}{5!}f_{yyyyy}(x_2,y_{2n-2})+\ldots \qquad ...(20)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند (x_2,y_{2n-2}) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة (20) في المنطقة $[x_0,x_2]\times[y_{2n-2},y_{2n}]$ نحصل على: -

$$\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy = 4h^2 f(x_2,y_{2n-2}) - 4h^3 f_x(x_2,y_{2n-2}) + 4h^3 f_y(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{3!}h^4 f_{xx}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{16}{3!}h^4 f_{yy}(x_2,y_{2n-2}) - 4h^4 f_{xy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$-\frac{32}{4!}h^5 f_{xxx}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{32}{4!}h^5 f_{yyy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{16}{3!}h^5 f_{xxy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$-\frac{16}{3!}h^5 f_{xyy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{64}{5!}h^6 f_{xxxx}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{64}{5!}h^6 f_{yyyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{64}{36}h^6 f_{xxyy}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{32}{4!}h^6 f_{xxxy}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{32}{4!}h^6 f_{xyyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$-\frac{128}{6!}h^7 f_{xxxxx}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{128}{6!}h^7 f_{yyyyy}(x_2,y_{2n-2}) + \cdots \qquad ...(21)$$

بالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n-2} في الصيغة (20) نحصل على :-

$$f(x_0,y_{2n-2}) = f(x_2,y_{2n-2}) - 2hf_x(x_2,y_{2n-2}) + 2h^2 f_{xx}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{8}{3!}h^3 f_{xxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{4!}h^4 f_{xxxx}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{32}{5!}h^5 f_{xxxxx}(x_2,y_{2n-2}) + \cdots \qquad ...(22)$$

وبالتعويض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n} في الصيغة (20) نحصل على :

$$f(x_2,y_{2n}) = f(x_2,y_{2n-2}) + 2hf_y(x_2,y_{2n-2}) + 2h^2 f_{yy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{8}{3!}h^3 f_{yyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{4!}h^4 f_{yyyy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{32}{5!}h^5 f_{yyyyy}(x_2,y_{2n-2}) + \cdots \qquad ...(23)$$

وكذلك نعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ في الصيغة (20) نحصل على:-

$$f(x_2,y_{2n-2}+h) = f(x_2,y_{2n-2}) + hf_y(x_2,y_{2n-2}) + \frac{1}{2!}h^2 f_{yy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{1}{3!}h^3 f_{yyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{4!}h^4 f_{yyyy}(x_2,y_{2n-2}) + \frac{1}{5!}h^5 f_{yyyyy}(x_2,y_{2n-2}) + \cdots \qquad ...(24)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n-2} في الصيغة (20) نحصل على:

$$f(x_0+h,y_{2n-2}) = f(x_2,y_{2n-2}) - hf_x(x_2,y_{2n-2}) + \frac{1}{2!}h^2 f_{xx}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{1}{3!}h^3 f_{xxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{4!}h^4 f_{xxxx}(x_2,y_{2n-2}) - \frac{1}{5!}h^3 f_{xxxxx}(x_2,y_{2n-2}) + \ldots \qquad ...(25)$$

وأيضا نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n} في الصيغة (20) نحصل على :-

$$\begin{aligned}
f\left(x_0+h,y_{2n}\right)=&f\left(x_2,y_{2n-2}\right)-hf_x\left(x_2,y_{2n-2}\right)+2hf_y\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+2h^2f_{yy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-2h^2f_{xy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{1}{3!}h^3f_{xxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{8}{3!}h^3f_{yyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+h^3f_{xxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-2h^3f_{xyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{1}{4!}h^4f_{xxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^4f_{yyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+h^4f_{xxyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&-\frac{2}{3!}h^4f_{xxxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{8}{3!}h^4f_{xyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{1}{5!}h^5f_{xxxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{32}{5!}h^5f_{yyyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad \text{...(26)}
\end{aligned}$$

ونعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ في الصيغة (20) نحصل على :-

$$\begin{aligned}
f\left(x_0,y_{2n-2}+h\right)=&f\left(x_2,y_{2n-2}\right)-2hf_x\left(x_2,y_{2n-2}\right)+hf_y\left(x_2,y_{2n-2}\right)+2h^2f_{xx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-2h^2f_{xy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{8}{3!}h^3f_{xxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{1}{3!}h^3f_{yyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+2h^3f_{xxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-h^3f_{xyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{16}{4!}h^4f_{xxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\frac{1}{4!}h^3f_{yyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+h^4f_{xxyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&-\frac{8}{3!}h^4f_{xxxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{2}{3!}h^4f_{xyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{32}{5!}h^5f_{xxxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{1}{5!}h^5f_{yyyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^5f_{xxxxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{2}{4!}h^5f_{xyyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\ldots \qquad \text{...(27)}
\end{aligned}$$

وبالمثل نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n} في الصيغة (20) نحصل على :-

$$\begin{aligned}
f\left(x_0,y_{2n}\right)=&f\left(x_2,y_{2n-2}\right)-2hf_x\left(x_2,y_{2n-2}\right)+2hf_y\left(x_2,y_{2n-2}\right)+2h^2f_{xx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+2h^2f_{yy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-4h^2f_{xy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{8}{3!}h^3f_{xxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{8}{3!}h^3f_{yyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+4h^3f_{xxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-4h^3f_{xyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{16}{4!}h^4f_{xxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^4f_{yyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+4h^4f_{xxyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&-\frac{16}{3!}h^4f_{xxxy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{16}{3!}h^4f_{xyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)-\frac{32}{5!}h^5f_{xxxxx}\left(x_2,y_{2n-2}\right)\\
&+\frac{32}{5!}h^5f_{yyyyy}\left(x_2,y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad \text{...(28)}
\end{aligned}$$

وأخيرا نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ في الصيغة (20) نحصل على:-

$$f\left(x_0+h,y_{2n-2}+h\right)=f(x_2,y_{2n-2})-hf_x(x_2,y_{2n-2})+hf_y(x_2,y_{2n-2})+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_2,y_{2n-2})-h^2f_{xy}(x_2,y_{2n-2})-\frac{1}{3!}h^3f_{xxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{3!}h^3f_{yyy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{1}{2!}h^3f_{xxy}(x_2,y_{2n-2})-\frac{1}{2!}h^3f_{xyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{4!}h^4f_{xxxx}(x_2,y_{2n-2})+\frac{1}{4!}h^4f_{yyyy}(x_2,y_{2n-2})+\frac{1}{4}h^4f_{xxyy}(x_2,y_{2n-2})$$
$$-\frac{1}{3!}h^4f_{xxxy}(x_2,y_{2n-2})-\frac{1}{3!}h^4f_{xyyy}(x_2,y_{2n-2})-\frac{1}{5!}h^5f_{xxxxx}(x_2,y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{5!}h^5f_{yyyyy}(x_2,y_{2n-2})+\cdots \qquad ...(29)$$

ومن الصيغ (20)،(22)،(23)، (24)، (25)، (26)،(27)،(28) و(29) نحصل على :-

$$I_2=\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2}f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[f(x_0,y_{2n-2})+f(x_0,y_{2n})+f(x_2,y_{2n-2})+f(x_2,y_{2n})$$
$$+4\big((f(x_0+h,y_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2n})+f(x_0,y_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2n-2}+h))+f(x_{2n},y_{2n}-h)\big)\Big]$$
$$+\left[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})+\frac{1}{45}h^7\left(D_x^{(5)}-D_y^{(5)}-D_x^{(4)}D_y^{(2)}+D_x^{(2)}D_y^{(4)}\right)\right]+\cdots\Big]f(x_2,y_{2n-2}) \qquad ...(30)$$

$$I_3=\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_2}^{x_{2n}}f\left(x,y\right)dxd=\frac{h^2}{9}\big[f(x_2,y_0)+f(x_2,y_{2n-2})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2n-2})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_2+(2i-1)h,y_0)+f(x_2+(2i-1)h,y_{2n-2})\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_2+(2i)h,y_0)\big)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_2+(2i-1)h,y_0)+f(x_2+(2i-1)h,y_{2n-2})\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_2+(2i)h,y_0)\big)$$
$$+f(x_2+(2i)h,y_{2n-2})\big)+4\sum_{j=1}^{n}\big(f(x_2,y_0+(2i-1)h)+f(x_{2n},y_0+(2j-1)h)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}f(x_2+(2j-1)h,y_0+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_2+(2i)h,y_0+(2j-1)h)\Big)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\big(f(x_2,y_0+(2j)h)+f(x_{2n},y_0+(2j)h)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_2+(2i-1)h,y_0+(2j)h)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_2+(2i)h,y_0+(2j)h)\Big)\Big]+e_1h^4+e_2h^6+\cdots \qquad ...(31)$$

$$I_4=\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}}f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_{2k},y_{2n-2}\right)+f\left(x_{2k},y_{2n}\right)+f\left(x_{2k+2},y_{2n-2}\right)$$
$$+f\left(x_{2k+2},y_{2n}\right)+4\big(f\left(x_{2k},y_{2n-2}+h\right)+f\left(x_{2k}+h,y_{2n}\right)+4f\left(x_{2k}+h,y_{2n-2}+h\right)$$
$$+f\left(x_{2k+2},y_{2n-2}+h\right)+f\left(x_{2k}+h,y_{2n-2}\right)\big)\Big]+t_1h^4+t_2h^6+\cdots \qquad ...(32)$$

موسى [8]

حيث $d_i, e_i, t_i, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$
وبجمع الصيغ(20)، (30)، (31) و(32) نحصل على :-

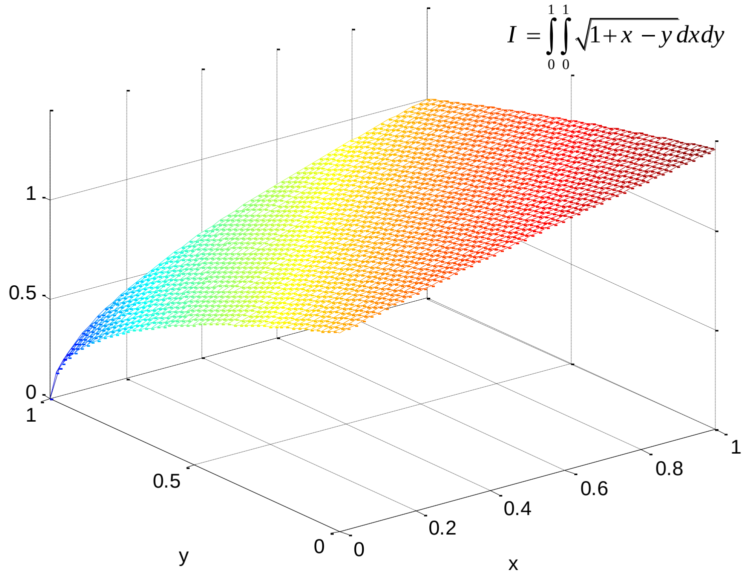
$$
\begin{aligned}
I &= \int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{9}\Big[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2n})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2n}) \\
&+4\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n})\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_0+(2i)h,y_0) \\
&+4\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n})\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_0+(2i)h,y_0) \\
&+f(x_0+(2i)h,y_{2n})\big)+4\sum_{j=1}^{n}\Big(f(x_0,y_0+(2j-1)h)+f(x_{2n},y_0+(2j-1)h) \\
&+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0+(2i)h,y_0+(2j-1)h)\Big) \\
&+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(f(x_0,y_0+(2j)h)+f(x_{2n},y_0+(2j)h)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h) \\
&+2\sum_{i=1}^{n-2} f(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h)\Big)\Big]+\Big[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})+\frac{1}{45}h^7(D_x^{(5)}-D_y^{(5)}-D_x^{(4)}D_y \\
&+D_xD_y^{(4)})+\ldots\Big]f(x_2,y_{2n-2})+B_1h^4+B_2h^6+\cdots \qquad \ldots(33)
\end{aligned}
$$

حيث $B_1, B_2, \ldots$ ثوابت   انتهى البرهان.

3. الامثلة

مثال 1
$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy = 0.975161133197907$$

المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,1) (لانه عند تعويض النقطة(0,1) في المشتقة الاولى للدالة $f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$ فان الناتج يكون غير معرف)كما موضح بالرسم البياني له (الشكل رقم 1) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (مقربة الى اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة) وقيمته في برنامج الماتلاب نلاحظ انها متطابقة لغاية المرتبة الثالثة عشر بعد الفاصلة عندما n=m=64 وعلى كلا البعدين بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (2.5,4,6,8,10,…) بينما كانت القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على كلا البعدين كما مبين في الجدول رقم (1) ويمثل هذا تطبيقاً" للحالة الثانية (المبرهنة 2). علما" ان الوقت المستغرق في برنامج الماتلاب للحساب كان(4.242 ثانية).



شكل رقم (1)

توضيح

دالة المكامل هنا معتلة المشتقات الجزئية في النقطة (0,1)

$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$let\ f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{1+x-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(0,1)\ is\ undefined$$

ولايجاد قيمة التكامل اعلاه تحليلياً

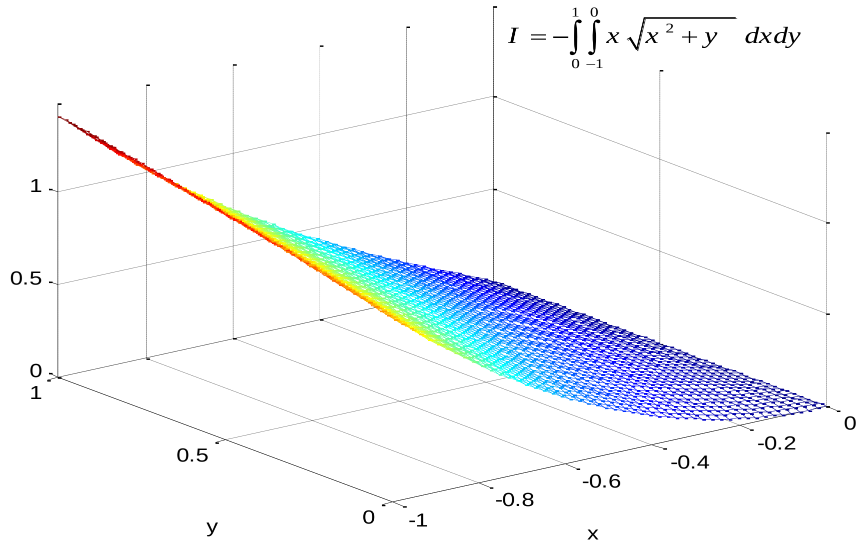
$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$(i)\ \int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dx=\frac{2}{3}[1+x-y]^{\frac{3}{2}}\ \Big|_0^1=\frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$(ii)\int_0^1\frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]dy=\frac{4}{15}\left[(1-y)^{\frac{5}{2}}-(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=0.975161133197907$$

مثال 2 $I = -\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+y}\; dxdy = 0.48758056659899$

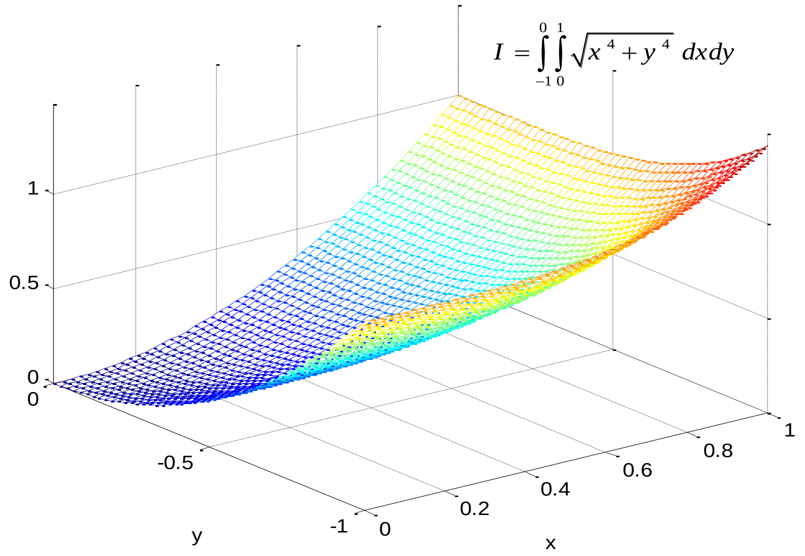
المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0) كما موضح بالرسم البياني له (الشكل رقم 2) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (مقربة الى اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة) وقيمته في برنامج الماتلاب نلاحظ انها متطابقة لغاية المرتبة الرابعة عشر بعد الفاصلة عندما n=m=512 وعلى كلا البعدين بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (2.5,3.5,4,4.5,5.5,6,6.5,…) بينما كانت القيمة صحيحة لثمانية مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على كلا البعدين كما مبين في الجدول رقم (2) ويمثل هذا تطبيقا" للحالة الاولى (المبرهنة 1). علما" ان الوقت المستغرق في برنامج الماتلاب للحساب كان(5.122 ثانية).



مثال3 $I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4+y^4}\; dxdy$

التكامل هنا من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" (الرسم البياني له موضح بالشكل رقم 3) كذلك المكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0) وهنا تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات من خلال ملاحظة تكرار القيمة في الاعمدة الاربعة الاخيرة في الجدول (برنامج الماتلاب) عندما n=m=64 بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (4,6,8,10,12,…) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (0,0) بينما كانت القيمة صحيحة لست مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على كلا البعدين مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في الجدول رقم(3) .ويمثل هذا تطبيقا" للحالة الثانية (المبرهنة 2).

علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(4.21 ثانية).



شكل رقم(3)

n=m	SS	K=2.5	K=4	K=6	K=8	K=10
2	0.968584077305505					
4	0.973969981104293	0.975126535187852				
8	0.974948606555092	0.975158753877376	0.975160901790011			
16	0.975123437252195	0.975160979912483	0.975161128314824	0.975161131910456		
32	0.975154461480968	0.975161123538038	0.975161133113075	0.975161133189237	0.975161133194252	
64	0.975159953295807	0.975161132592934	0.975161133196594	0.975161133197920	0.975161133197954	0.975161133197957
$I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dxdy=0.975161133197907$						

جدول رقم (1)

n=m	SS	k=2.5	k=3.5	k=4	k=4.5	k=5.5	k=6	k=6.5	k=7.5
2	0.48548511821430								
4	0.48734228341947	0.48774108593844							
8	0.48754864780884	0.48759296192698	0.48757860006951						
16	0.48757558954881	0.48758137494353	0.48758025148891	0.48758036158354					
32	0.48757973074847	0.48758062001823	0.48758054682193	0.48758056651080	0.48758057598614				
64	0.48758042174153	0.48758057012346	0.48758056528575	0.48758056651667	0.48758056651694	0.48758056630297			
128	0.48758054118061	0.48758056682863	0.48758056650917	0.48758056659073	0.48758056659416	0.48758056659590	0.48758056660055		
256	0.48758056211779	0.48758056661378	0.48758056659295	0.48758056659853	0.48758056659889	0.48758056659900	0.48758056659905	0.48758056659903	
512	0.48758056580760	0.48758056659993	0.48758056659859	0.48758056659897	0.48758056659899	0.48758056659899	0.48758056659899	0.48758056659899	0.48758056659899
$I=-\int_0^1\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+y}\,dxdy=0.48758056659899$									

جدول رقم (2)

n=m	SS	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
	0.536591085086133					
4	0.544241609194910	0.544751644135495				
8	0.544685188710617	0.544714760678331	0.544714175226630			
16	0.544712863680265	0.544714708678241	0.544714707852843	0.544714709941573		
32	0.544714591460261	0.544714706645594	0.544714706613329	0.544714706608468	0.544714706605210	
64	0.544714699415890	0.544714706612932	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241
$I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$						

جدول رقم (3)

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp.87-93,1967.
[2] Hans Schjar and Jacobsen ," Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , The Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973
[3] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company, pp. 1-2 ,599,113, chapter 5,1975.
[4] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , pp 5-7 , 2008.
[5] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .
[6] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010 .
[7]ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .
[8] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988

برنامج الماتلاب وهو البرنامج الذي استخدم لحل الامثلة

```
clear all
clc
% find  double  integral of  function  g(x,y)  on the [a,b]*[c,d]
% using  RSS
% g(x,y) may  by  given  in g.m. file
% a is the lower  end ,b is the  upper  end of  internal  integral  and   c is the  lower  end ,d is the upper  end of  external  integral
% eps is an  Absolute  Error
% n is the number  subintervals  of  [a,b]  and [c,d]  (must  be  even)
% D is the values k by using  RSS
%   h is length of   any   subintervals of   internal   integral   , h1 is length of  any   subintervals of external  integral
% s is the  matrix of  integral' s values  by using  RSS
a=-1;b=0;c=0;d=1;eps=10^(-14);
D=[4,5,5,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26];
n=2;h=(b-a)/n;h1=(d-c)/n;
s(1,1)=2;
s(1,2)=h*h1*(g(a,c)+g(a,d)+g(b,d)+4*(g(a,c+h1)+g(b,c+h1)
+4*g(a+h,c+h1)+g(a+h,c)+g(a+h,d)))/9;
for k=2:10;
   n=2^k;s(k,2)=0;
   h1=(d-c)/n;h=(b-a)/n;
   s(k,2)=s(k,2)+g(a,c)+g(a,d)+g(b,d);
   for i=2:2:n-2
   s(k,2)=s(k,2)+2*(g(a+i*h,c)+g(a+i*h,d));
   end
      for e=1:2:n-1
         s(k,2)=s(k,2)+4*(g(a+e*h,c)+g(a+e*h,d));
      end
      for m=1:2:n-1
         s(k,2)=s(k,2)+4*(g(a,c+m*h1)+g(b,c+m*h1))
         for L=1:2:n-1
            s(k,2)=s(k,2)+16*g(a+L*h,c+m*h1);
         end
      for p=2:2:n-2
         s(k,2)=s(k,2)+8*g(a+p*h,c+m*h1);
      end
      end
      for q=2:2:n-2
         s(k,2)=s(k,2)+2*(g(a,c+q*h1)+g(b,c+q*h1));
         for w=1:2:n-1
            s(k,2)=s(k,2)+8*g(a+w*h,c+q*h1);
```

```
  end
          for v =2:2:n-2
              s(k,2)=s(k,2)+4*g(a+v*h,c+q*h1);
              s(k,1)=n;
          end
      end
          s(k,2)=s(k,2)*h1*h/9;
    for z=3:k+1
        clc
        s(k,z)=(s(k,z-1)*2^D(z-2)-s(k-1,z-1))/((2^D(z-2))-1);
    end
    if abs(s(k,k+1)-s(k,k))<=eps;
        sprintf('%5.0f%2.13f',n,s(k,k+1))
        break
    else
    end
end
 xlswrite('E:/(RSSaliaaa - EXali.xls',s,1,'A2' )
```