اشتقاق طريقة مركبة لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عدديا باستخدام صيغ نيوتن – كوتس

أ.علي حسن محمد

قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

عدنان وسيل كاظم شبّر

قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة جديدة لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة باستعمال قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي x وقاعدة سمبسون على البعد الأوسط y وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z واشتقاق حدود التصحيح (صيغة الخطأ) لها، واستعمال طريقة تعجيل رو مبرك [5] لتحسين نتائج التكاملات الثلاثية بالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها, فتبين لنا إن الطريقة المركبة من طريقة تعجيل رو مبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة سمبسون على البعد الأوسط y وقاعدة شبه المنحرف على البعد x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $(h=\bar{h}=\bar{\bar{h}})$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور X و $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور Y و $\bar{\bar{h}}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور Z وأسميناها $RMST$ يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة إذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً .

1.المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي . إن للتكاملات الثلاثية أهمية كبيرة في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم وإيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2+y^2=4x$ وفوق $z=0$ وتحت $x^2+y^2=4z$ وحساب المركز المتوسط للحجم الوقع داخل $x^2+y^2=9$ وفوق المستوي $z=0$ وتحت المستوي $x+z=4$, وكذلك إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن. فرانك آيرز [8] , مما دفع عدد من الباحثين للعمل في مجال التكاملات الثلاثية. ففي عام 2009 استخدمت ضياء [6] طرائق التكامل الأحادي لتكوين طرائق لحساب التكامل الثلاثي وهي $RMRM\,(RM)$, $RMRS\,(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من $RM\,(RS)$, $RM\,(RM)$ ، $RS\,(RM)$, على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) ومن طريقة تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (z) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب التكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب . وفي عام 2010 قدمت عكار [7] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة $RMMM$ الناتجة من تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد x و y و z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة نسبياً. وفي 2011 قدمت موسى [9] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة $RMSS$ ، الناتجة من تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة سمبسون على البعدين الأوسط y والداخلي x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط

ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة نسبياً. أما في هذا البحث نقدم مبرهنة مع البرهان لاشتقاق قاعدة جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة وصيغة الخطأ لها وهذه القاعدة ناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة سمبسون على البعد الأوسط y وقاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي x، عندما $n = n_1 = n_2$ (n عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط $[c,d]$ و n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي $[e,g]$)، لقد اخترنا كل من n, n_1, n_2 أعداد زوجية لأن قاعدة سمبسون تحتاج الى عدد زوجي من الفترات الجزئية [3] وفي الوقت نفسه لا تؤثر على مناقشتنا لقاعدة النقطة الوسطى وقاعدة شبه المنحرف وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز MST ،ولأجل تحسين النتائج نستخدم طريقة تعجيل رو مبرك ، عند ذلك نرمز لهذه القاعدة بالرمز $RMST$ وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئيةً.

2. حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً

مبرهنة :- لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فأن القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية:-

$$MST = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{h^3}{6}\sum_{r=0}^{n-1}\Big[f(a,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(a,d,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,c,z_r+\tfrac{h}{2})$$

$$+f(b,d,z_r+\tfrac{h}{2})+4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\Big(f(a,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})\Big)$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\Big(f(a,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})\Big)$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f(x_i,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(x_i,d,z_r+\tfrac{h}{2})\Big)\Big]$$

وان صيغة الخطأ لها هي :-

$$E_{MST} = I - MST(h) = A_{MST}h^2 + B_{MST}h^4 + C_{MST}h^6 + \ldots$$

حيث $A_{MST}, B_{MST}, C_{MST}, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ ولا تعتمد على قيمة h.

البرهان:-

يمكن كتابة التكامل الثلاثي I بشكل عام بالصورة الآتية :-

$$I = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz = MST(h) + E(h) \qquad \ldots(1)$$

فوكس [1] ، موسى [9].

إذ إن $MST(h)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد z و قاعدة سمبسون على البعد y و قاعدة شبه المنحرف على البعد x, وان $E_{MST}(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $MST(h)$, وإن $h = \frac{b-a}{n}, \bar{h} = \frac{d-c}{n_1}, \bar{\bar{h}} = \frac{g-e}{n_2}$. (وسنأخذ $h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}$) ، وبفرض أنّ $[a,b]\times[c,d]\times[e,g] = [x_0, x_n]\times[y_0, y_n]\times[z_0, z_n]$، فيكون $z_i = z_0 + ih, y_i = y_0 + ih, x_i = x_0 + ih$. إذ أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف هي :-

$$E_T(h) = -\frac{h^2}{12}(f_n' - f_0') + \frac{h^4}{720}(f_n^{(3)} - f_0^{(3)}) - \frac{h^6}{30240}(f_n^{(5)} - f_0^{(5)}) + \ldots \qquad \ldots(2)$$

وعند استخدام قاعدة سمبسون هي:-

$$E_S(h) = -\frac{1}{180}h^4(f_n^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{1}{1512}h^6(f_n^{(5)} - f_0^{(5)}) - \ldots \qquad \ldots(3)$$

اما عند استخدام النقطة قاعدة الوسطى فهي:-

$$E_M(h) = \frac{1}{6}h^2(f_n' - f_0') - \frac{7}{360}h^4(f_n^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{31}{15120}h^6(f_n^{(5)} - f_0^{(5)}) - \ldots \qquad \ldots(4)$$

فوكس [2]، حيث $f_i = f(x_i)$ ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغ (2)، (3) و(4) نحصل على :

$$E_T(h) = \frac{-(x_n - x_0)}{12}h^2 f^{(2)}(\zeta_1) + \frac{(x_n - x_0)}{720}h^4 f^{(4)}(\zeta_2) + \ldots \qquad \ldots(5)$$

$$E_S(h) = \frac{-(x_n - x_0)}{180}h^4 f^{(4)}(\overline{\zeta}_1) + \frac{(x_n - x_0)}{1512}h^6 f^{(6)}(\overline{\zeta}_2) + \ldots \qquad \ldots(6)$$

$$E_M(h) = \frac{(x_n - x_0)}{6}h^2 f^{(2)}(\eta_1) + \frac{7(x_n - x_0)}{360}h^4 f^{(4)}(\eta_2) + \ldots \qquad \ldots(7)$$

فرانك آيرز [8] ، حيث $\zeta_i, \overline{\zeta}_i, \eta_i \in (x_0, x_n)$, $i = 1,2,3,\ldots$.

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_a^b f(x,y,z)dx$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة شبه المنحرف على البعد χ و (التعامل مع y و z كثابتين) كالآتي :-

$$T = \int_a^b f(x,y,z)dx = \frac{h}{2}[f(a,y,z) + f(b,y,z) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y,z)]$$

$$+[\frac{(b-a)}{-12}h^2 \frac{\partial^2 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^2} + \frac{(b-a)}{720}h^4 \frac{\partial^4 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^4} + \ldots] \qquad \ldots(8)$$

حيث $\mu_1, \mu_2, \ldots \in (a,b)$.

وبمكاملة المعادلة (8) على البعد الاوسط y في الفترة $[c,d]$ باستخدام قاعدة سمبسون نحصل على:-

$$1)\int_c^d \tfrac{h}{2} f(a,y,z)dy$$

$$= \frac{h^2}{6}[f(a,c,z) + f(a,d,z) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(a,y_{2j-1},z) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a,y_{2j},z)]$$

$$+\frac{h}{2}[\frac{(d-c)}{-180}h^4 \frac{\partial^4 f(a,\lambda_1,z)}{\partial y^4} + \frac{(d-c)}{1512}h^6 \frac{\partial^6 f(a,\lambda_2,z)}{\partial y^6} + \ldots] \qquad \ldots(9)$$

$$2)\int_c^d \tfrac{h}{2} f(b,y,z)dy$$

$$= \frac{h^2}{6}[f(b,c,z) + f(b,d,z) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(b,y_{2j-1},z) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(b,y_{2j},z)]$$

$$+\frac{h}{2}[\frac{(d-c)}{-180}h^4 \frac{\partial^4 f(b,\overline{\lambda}_1,z)}{\partial y^4} + \frac{(d-c)}{1512}h^6 \frac{\partial^6 f(b,\overline{\lambda}_2,z)}{\partial y^6} + \ldots] \qquad \ldots(10)$$

$$3)\int_c^d h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y,z)dy=\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,c,z)+f(x_i,d,z)$$

$$+4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_i,y_{2j-1},z)+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_i,y_{2j},z)]$$

$$+\frac{h}{2}[\frac{(d-c)}{-180}h^4\frac{\partial^4 f(b,\lambda_{i1},z)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(b,\lambda_{i2},z)}{\partial y^6}+\ldots] \quad \ldots(11)$$

حيث $\lambda_t,\bar{\lambda}_t,\lambda_{it}\in(c,d)$ ، $t=1,2,3,\ldots$.وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل [4] في مكاملة حدود التصحيح الواردة في المعادلة (8) وجمع الناتج مع المعادلات (9) و(10) و(11) نحصل على:-

$$ST=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dy=\frac{h^2}{6}[f(a,c,z)+f(a,d,z)+f(b,c,z)+f(b,d,z)$$

$$+4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\left(f(a,y_{2j-1},z)+f(b,y_{2j-1},z)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_{2j-1},z)\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(f(a,y_{2j},z)+f(b,y_{2j},z)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_{2j},z)\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,c,z)+f(x_i,d,z)\right)]$$

$$+\frac{h}{2}[\frac{(d-c)}{-180}h^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_1,z)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(a,\lambda_2,z)}{\partial y^6}+\ldots]$$

$$+\frac{h}{2}[\frac{(d-c)}{-180}h^4\frac{\partial^4 f(b,\bar{\lambda}_1,z)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(b,\bar{\lambda}_2,z)}{\partial y^6}+\ldots]$$

$$+h\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{(d-c)}{-180}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{i1},z)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(x_i,\lambda_{i2},z)}{\partial y^6}+\ldots]$$

$$+(b-a)(d-c)[\frac{h^2}{-12}+\frac{\partial^2 f(\mu_1,\bar{\mu}_1,z)}{\partial x^2}+\frac{h^4}{720}+\frac{\partial^4 f(\mu_2,\bar{\mu}_2,z)}{\partial x^4}+\ldots] \quad \ldots(12)$$

حيث $\bar{\mu}_s\in(c,d)$ ، s=1,2,3,… . وبمكاملة طرفي المعادلة (12) باستخدام قاعدة النقطة الوسطى واستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل [4] في مكاملة حدود التصحيح الواردة في المعادلة (12) نحصل على:-

$$MST=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\frac{h^3}{6}\sum_{r=0}^{n-1}[f(a,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(a,d,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,d,z_r+\tfrac{h}{2})$$

$$+4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\left(f(a,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(f(a,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2})\right)$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(x_i,d,z_r+\tfrac{h}{2})\right)]$$

$$+\frac{h}{2}(d-c)(g-e)[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(a,\lambda_1,\theta_1)}{\partial y^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(a,\lambda_2,\theta_2)}{\partial y^6}+\ldots]$$

$$+\frac{h}{2}(d-c)(g-e)[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(b,\bar{\lambda}_1,\bar{\theta}_1)}{\partial y^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(b,\bar{\lambda}_2,\bar{\theta}_2)}{\partial y^6}+\ldots]$$

$$+h(d-c)(g-e)\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_1,\theta_{i1})}{\partial y^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_i,\lambda_{i2},\theta_{i2})}{\partial y^6}+...]$$
$$+(b-a)(d-c)(g-e)[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(\mu_1,\bar{\mu}_1,\bar{\bar{\mu}}_1)}{\partial y^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^2 f(\mu_2,\bar{\mu}_2,\bar{\bar{\mu}}_2)}{\partial y^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{6}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,c,\alpha_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,c,\alpha_2)}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{6}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,d,\bar{\alpha}_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,d,\bar{\alpha}_2)}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{6}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,c,\bar{\bar{\alpha}}_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,c,\bar{\bar{\alpha}}_2)}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{6}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,d,\beta_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,d,\beta_2)}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,y_{2j-1},\alpha_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,y_{2j-1},\alpha_{j2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,y_{2j-1},\bar{\alpha}_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,y_{2j-1},\bar{\alpha}_{j2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{4h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_i,y_{2j-1},\alpha_{ij1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_i,y_{2j-1},\alpha_{ij2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,y_{2j},\beta_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,y_{2j},\beta_{j2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,y_{2j},\bar{\beta}_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,y_{2j},\bar{\beta}_{j2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_i,y_{2j},\beta_{ij1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_i,y_{2j},\beta_{ij2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_i,c,\bar{\bar{\beta}}_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_i,c,\bar{\bar{\beta}}_{i2})}{\partial z^4}+...]$$
$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{n-1}[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_i,d,\bar{\theta}_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_i,d,\bar{\theta}_{i2})}{\partial z^4}+...] \qquad ...(13)$$

حيث $k=1,2,...,\beta_{jk},\bar{\beta}_{jk},\theta_k,\bar{\theta}_k,\bar{\bar{\mu}}_k,\theta_{ik},\alpha_k,\bar{\alpha}_k,\bar{\bar{\alpha}}_k,\beta_k,\alpha_{jk},\alpha_{ijk},\bar{\alpha}_{jk},\beta_{ijk},\bar{\bar{\beta}}_{ik},\bar{\theta}_{ik}\in(e,g)$
وبما ان المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ بالنسبة للمتغيرات x,y,z مستمرة في منطقة تكاملها فنحصل على:-

$$MST=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{h^3}{6}\sum_{r=0}^{n-1}\Big[f(a,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(a,d,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,d,z_r+\tfrac{h}{2})$$
$$+4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\Big(f(a,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_{2j-1},z_r+\tfrac{h}{2})\Big)$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(f\left(a,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2}\right)+f\left(b,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i,y_{2j},z_r+\tfrac{h}{2}\right)\right)$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(x_i,c,z_r+\tfrac{h}{2}\right)+f\left(x_i,d,z_r+\tfrac{h}{2}\right)\right)]$$

$$+A_{MST}h^2+B_{MST}h^4+C_{MST}h^6+\ldots$$

حيث $A_{MST},B_{MST},C_{MST},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ ولا تعتمد على قيمة h . وبهذا تم البرهان.

3.الأمثلة

1- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية 1.49780228857537 (مقربة إلى أربع عشرة مرتبة عشرية) .

2- $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.005256743455022 (مقربة إلى خمس عشرة مرتبة عشرية) .

3- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 2.11801303423891 (مقربة إلى أربع عشرة مرتبة عشرية) .

ملاحظة 1 :- في جميع التكاملات أعلاه المكامل معرف عند كل نقطة من نقاط منطقة التكامل الخاصة بها لذلك عند استخدام القاعدة (MST) لتحسين نتائج التكامل نستخدم حدود التصحيح الاتية:-

$$E_{MST}=A_{MST}h^2+B_{MST}h^4+C_{MST}h^6+\cdots$$

ملاحظة 2 :- في جميع الامثلة وضعنا اسفل كل جدول القيمة التحليلية (الدقيقة) للتكامل. لسهولة المقارنة بينها وبين القيمة التقريبية التي حصلنا عليها بالطريقة $RMST$.

ملاحظة 3 :- في عملنا هذا استعملنا لغة الماتلاب (Matlab Language) في كتابة البرنامج الخاص بحساب قيم التكاملات الثلاثية بالطريقة $RMST$.

دونا النتائج بالنسبة للتكامل الاول في الجدول (1) مستخدمين مع القاعدة MST طريقة تعجيل رو مبرك.

n	MST	k=2	k=4	k=6	K=8
2	1.49726583089537				
4	1.49766852902032	1.49780276172864			
8	1.49776887170728	1.49780231926959	1.49780228977232		
16	1.49779393581076	1.49780229051192	1.49780228859475	1.49780228857606	
32	1.49780020047518	1.49780228869665	1.49780228857563	1.49780228857533	1.49780228857533
الجدول (1) يبين حساب التكامل الثلاثي $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$ بطريقة $RMST$					1.49780228857537

نستنتج من الجدول (1) انه عندما $n=n_1=n_2=32$ ان قيمة التكامل باستخدام القاعدة MST تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية وبـ (2^{15} فترة جزئية). أيضا حصلت موسى [9] على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما $n=n_1=n_2=32$ باستخدام القاعدة MSS ، وبعد استعمالها لطريقة تعجيل رو مبرك حصلت على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية .

في الجدول(2) دونا النتائج بالنسبة للتكامل الثاني مستخدمين مع القاعدة MST طريقة تعجيل رو مبرك.

	MST	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.004797666511100				
4	0.005140088952374	0.005254229766132			
8	0.005227458539340	0.005256581734996	0.005256738532920		
16	0.005249414589695	0.005256733273147	0.005256743375690	0.005256743452560	
32	0.005254910760536	0.005256742817484	0.005256743453773	0.005256743455012	0.005256743455022
الجدول(2) يبين حساب التكامل الثلاثي $I=\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ بطريقة $RMST$					0.005256743455022

نستنتج من الجدول (2) إنه عندما $n=n_1=n_2=32$ ان قيمة التكامل بقاعدة MST تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية) عندما $n=n_1=n_2=32$ وبـ (2^{21} فترة جزئية). بينما حصلت عكار[7] عندما $n=n_1=n_2=16$ على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية باستخدام قاعدة MMM وباستعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع قاعدة MMM حصلت على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية. وقد حصلت موسى [8] على قيمة صحيحة لست مراتب عشرية عندما $n=n_1=n_2=32$ باستخدام القاعدة MSS ، وبعد استعمالها لطريقة تعجيل رو مبرك حصلت على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية . مما يدل على أفضلية الطريقة $RMST$ على الطريقتين $RMMM$، $RMSS$ اللتين توصلتا إليهما كل من عكار [7] وموسى [9] على التوالي.

في الجدول (3) دونا النتائج بالنسبة للتكامل الثالث مستخدمين مع القاعدة MST طريقة تعجيل رو مبرك.

n	MST	k=2	k=4	k=6	k=8
2	2.11773301243180				
4	2.11794314443149	2.11801318843139			
8	2.11799556922708	2.11801304415894	2.11801303454077		
16	2.11800866845439	2.11801303486349	2.11801303424380	2.11801303423908	
32	2.11801194282204	2.11801303427792	2.11801303423888	2.11801303423880	2.11801303423880
الجدول(3) يبين حساب التكامل الثلاثي $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2\sqrt{x+y+z}\,dxdydz$ بطريقة $RMST$					2.11801303423891

يتضح من الجدول (3) انه عندما $n=n_1=n_2=32$ أن القيمة التقريبية للتكامل بقاعدة MST تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع الطريقة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية بـ (2^{15} فترة جزئية).

5.المناقشة والاستنتاج :-

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة المركبة من القواعد النقطة الوسطى على البعد z وسمبسون على البعد y وشبه المنحرف على البعد x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي إن (قاعدة MST) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رو مبرك عليها ففي جميع الأمثلة حصلنا على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية بـ (2^{15} فترة جزئية). إلا إنه عند استعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات الحقيقية ففي التكامل الاول والثالث عندما $n=n_1=n_2=32$ كانت النتيجة صحيحة لثلاث عشرة واثنتي عشرة مرتبة عشرية على التوالي وفي التكامل الثاني حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية) عندما $n=n_1=n_2=32$،مما يدل على إن هذه الطريقة أفضل من الطريقتين $RMMM$ ، $RMSS$ اللتين توصلنا إليهما كل من عكار [7] وموسى [9] على التوالي ، وبذلك يمكن الاعتماد على هذه طريقة في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", compute. J.10 , pp. 87-93 , 1967.

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , The Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[4] بوردين , ريتشارد ودوكلاس فاريز, " التحليل العددي " ,مديرية دار الكتب للطباعة و النشر , ترجمة خالد احمد السامرائي /كلية التربية للبنات جامعة بغداد سنة 1992

[5]سيفي , علي محمد صادق , " مبادئ التحليل العددي " , جامعة بغداد كلية العلوم , 1985 .

[6] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[7] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[8] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988 .

[9] موسى ، صفاء مهدي ، "حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عدديا "، بحث مقدم الى جامعة كربلاء،2011.

Evaluation of triple integrals with Continuous Integrands numerically by Newton-Cotes Formulas

Prof. Ali Hassan Mohammed

Department of Mathematics, College of Education for Girls, University of Kufa

and

Adnan Waseel Kadhim Shubbar

Department of Mathematics, College of Education for Girls, University of Kufa

Abstract

The main aim of this search is to derivation numerically new rule to find the values of the triple integrals, Its integrands continuous in region of the integration and derivation the errors (correction terms) and to improve the results of the triple integrals we used Romberg accelerating method by depending on these correction terms that we found, this method (composition method of applying Romberg acceleration method on the obtained values of applying Mid-point rule on the dimension z and Simpson's rule on the dimension y and Trapezoidal Rule on the dimension x, when the number of subintervals of interval of interior dimension equal to the number of subintervals of interval of middle dimension and equal to the number of subintervals of exterior dimension) such that $\left(h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}\right), h$ is the distances between the ordinates on the x– axis, $\bar{h}$ is the distances between the ordinates on the y- axis and $\bar{\bar{h}}$ is the distances between the ordinates on the z– axis ,and we indicate this method by (RMST) , we can depend on it to calculate the triple integrals when it integrands continuous on the region of integration and give higher accuracy in the results by few subintervals.