# Derivation Numerical Method by Using Mid Point Rule to Evaluate Triple Integrations with Singular Partial Derivative Integrands

# اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية

أ.علي حسن محمد محمد رزاق سلمان علي حمزه عباس
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

بحـــث مستـــل

**المستخلص**

ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية عدديا ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد الثلاثة $X, Y, Z$ وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبرك [1] ،[4] من خلال حدود التصحيح التي وجدناها ، عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي $X$ مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الاوسط $Y$ ومساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي $Z$ .

وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز $RMMM$ ويمكن الاعتماد عليها كونها قد أعطت دقة عالية من خلال التكاملات التي استعرضناها في النتائج مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات بعدد فترات جزئية قليلة.

## Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of triple integrals, numerically its integrands have singular partial derivatires not on the end of the region of integration by using the mid point rule with the three direction $X,Y$ and $Z$ . And to derive the correction error terms and we used Romberg acceleration to improve the results when the number of subintervals on the three dimensions are equal . We used the symbole ***RMMM*** to indicate this method and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integrations and with little subintervals.

## 1. المقدمة

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق معينة تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع ، إذ إن هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون ، وإن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات منها :

1. استحالة إيجاد القيمة التحليلية للتكامل .
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة وتحتاج زمن طويل.
3. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول(مثل اللوغارتم او معكوس الظل) .
4. قد تكون المسألة هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم ( أي أن الدالة معرفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هي الحال عند تحليل نتائج التجارب .

أن عملية إيجاد قيمة عددية للتكامل الثلاثي تشكل مسألة اكثر تعقيدا من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي و الثنائي كون المكامل هنا يعتمد على ثلاث متغيرات وان مسالة الاستمرارية أوالاعتلال في المكامل أوالاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكامل الأحادي .

لهذا فإن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم ،على سبيل المثال ،الحجم الواقع بين القطع المكافئ $z = 2x^2 + y^2$ والاسطوانة $z = 4 - y^2$ ، والحجم الواقع داخل الاسطوانة $\rho = 4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $\rho^2 + z^2 = 16$ ومن الأسفل بالمستوي $z = 0$ ، وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع داخل

وفوق المستوي $x^2+y^2=9$ وتحت المستوي $z=0$ ، $x+z=4$ وكذلك تبرز أهميتها في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن. فرانك آيرز [7]

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثلاثية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة : $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$

الباحثة ضياء [6] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على التكامل الخارجي (البعد $z$) وكل من الطرائق $RM(RS)$ ، $RM(RM)$ و $RS(RM)$ اضافة الى طريقة $RS(RS)$ على التكامل الأوسط (البعد Y ) والتكامل الداخلي (البعدX) مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي Y و X ، وفي عام 2010 قدمت عكار [5] أسلوبا مغايرا لما استخدمته الباحثة ضياء إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد X ،Y و Z عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية اي إن ( $h=\bar{h}=\bar{\bar{h}}$ ) وأسمتها $RMMM$ حيث أن $MMM$ ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الابعاد الثلاثة و $R$ طريقة تعجيل رومبرك ، و قدمت حالتين مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل ( مستمر أو مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية أو معتل في احدى او كلتي نهايتي منطقة التكامل ) وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.

ومنهم من عمل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز و رابينوتز [2] عام 1975 .

في بحثنا هذا سوف نعمل على أيجاد طريقة عددية لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية عندما تكون دالة التكامل *f(x,y,z)* مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها عندما يكون الاعتلال حصراً في النقطة $(x_0,y_n,z_n)$ أو النقطة $(x_n,y_0,z_0)$ وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد الثلاثة (الداخلي والأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية ولاحظنا إن هذه الطريقة مع تعجيل رومبرك باستخدام حدود التصحيح التي اوجدناها تعطي نتائج جيدة وسريعة من حيث الدقة وبعدد فترات جزئية قليلة نسبياً ولا تستغرق وقت طويل .

## 2: التكاملات الثلاثية لمكاملات مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية:

**Triple Integrals For Continuous Integrands With Singular Partial Derivatives**

التكامل الثلاثي $I$ يمكن كتابته بالصيغة :

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz = MMM(h)+E(h)$$

حيث $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل .

**مبرهنة 1:** لتكن دالة التكامل $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة $(x_0,y_n,z_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل $I$ يمكن حسابها من القاعدة التالية:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz = h^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,\,y_0+\frac{2j-1}{2}h,\,z_0+\frac{2k-1}{2}h\right)$$
$$+\left[\frac{h^5}{24}(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz})-\frac{h^6}{48}(D_{xxx}-D_{yyy}-D_{zzz}-D_{xxy}-D_{xxz}\right.$$
$$\left.-D_{yyz}-D_{yzz}+D_{xyy}+D_{xzz})+\ldots\right]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+A_1h^2+A_2h^4+\ldots$$

حيث $A_1,A_2,\ldots$ ثوابت تعتمد فقط على المشتقات الجزئية للدالة .

**البرهان :** التكامل الثلاثي $I$ يمكن كتابته بالصورة الاتية :

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdy \qquad ...(1)$$

نلاحظ ان التكاملات الثمانية اعلاه ماعدا التكامل الرابع $(I_4)$ جميع مكاملاتها (الدالة) *f(x,y,z)* ) مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات $(I_1,I_2,I_3,I_5,I_6,I_7,I_8)$ من خلال الصيغة التي اشتقتها عكار[5] اما التكامل الرابع فأن الدالة *f(x,y,z)* مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة $(x_0,y_n,z_n)$ وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات الثلاث متغيرات Taylor's series for a functions of three variables ، موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $(x_0,y_n,z_n)$ سستري [3] .

وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_{t-1}}^{z_t}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_{s-1}}^{y_s}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_0+0.5h,y_{s-1}+0.5h,z_{t-1}+0.5h\right)$$
$$+a_1h^2+a_2h^4+... \qquad ...(2)$$

$$I_2=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_{s-1}}^{y_s}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_0+0.5h,y_{s-1}+0.5h,z_{n-1}+0.5h\right)$$
$$+b_1h^2+b_2h^4+... \qquad ...(3)$$

$$I_3=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_{t-1}}^{z_t}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1} f\left(x_0+0.5h,y_{n-1}+0.5h,z_{t-1}+0.5h\right)$$
$$+c_1h^2+c_2h^4+... \qquad ...(4)$$

اما لايجاد قيمة التكامل الرابع $I_4$ والذي فيه الدالة معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطة $(x_0,y_n,z_n)$ ولحساب قيمته نستخدم متسلسلة تايلر حول النقطة $(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$ :

$$f(x,y,z)=f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+(x-x_1)f_x(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+(y-y_{n-1})f_y(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+(z-z_{n-1})f_z(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+\frac{(x-x_1)^2}{2}f_{xx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+\frac{(y-y_{n-1})^2}{2}f_{yy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+\frac{(z-z_{n-1})^2}{2}f_{zz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+(x-x_1)(y-y_{n-1})f_{xy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+(x-x_1)(z-z_{n-1})f_{xz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+(y-y_{n-1})(z-z_{n-1})f_{yz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+\frac{(x-x_1)^3}{3!}f_{xxx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+\frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}f_{yyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+\frac{(z-z_{n-1})^3}{3!}f_{zzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$

$$+\frac{(x-x_1)^2(y-y_{n-1})}{2}f_{xxy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+\frac{(x-x_1)(y-y_{n-1})^2}{2}f_{xyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+\ldots \qquad \ldots(5)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y,z)$ موجودة عند النقطة $(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$ ، (كون الدالة في هذه النقطة معرفة ولايوجد فيها اعتلال فعليه يمكن استخدام متسلسلة تايلر لها المذكورة في الصيغة( 5 ) ) .

وبأخذ التكامل الثلاثي للصيغة (5) (متسلسلة تايلر) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]\times[z_{n-1},z_n]$ نحصل على :

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = h^3 f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$-\frac{h^4}{2}\left[f_x(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_y(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_z(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$+\frac{h^5}{3!}\left[f_{xx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{zz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$+\frac{h^5}{4}[f_{xy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})]$$
$$-\frac{h^6}{4!}[f_{xxx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{yyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{zzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})]$$
$$+\frac{h^6}{12}[f_{xxy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xxz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yyz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+f_{yzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{xyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{xzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})]+\ldots \qquad \ldots(6)$$

وبالتعويض عن $(x,y,z)$ بـ $(x_0+0.5h,y_n-0.5h,z_n-0.5h)$ في الصيغة (5) نحصل على :

$$f(x_0+0.5h,y_n-0.5h,z_n-0.5h)=f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$-\frac{h}{2}\left[f_x(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_y(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_z(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$+\frac{h^2}{8}\left[f_{xx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{zz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$+\frac{h^2}{4}\left[f_{xy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$-\frac{h^3}{8\times 3!}\left[f_{xxx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{yyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{zzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$+\frac{h^3}{2\times 8}[f_{xxy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xxz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yyz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$+f_{yzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{xyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{xzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})]+\ldots \qquad \ldots(7)$$

ومن الصيغتين (6) ، (7) بعد ضرب الصيغة (7) بـ $h^3$ نحصل على :

$$I_4=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz = h^3 f(x_0+0.5h, y_n-0.5h,, z_n-0.5h)$$
$$+\frac{h^5}{24}\left[f_{xx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{yy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{zz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\right]$$
$$-\frac{h^6}{48}\Big[f_{xxx}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{yyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{zzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$-f_{xxy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{xxz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})-f_{yyz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})$$
$$-f_{yzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xyy}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f_{xzz}(x_1,y_{n-1},z_{n-1})\Big]+\dots \qquad \dots(8)$$

$$I_5=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = h^3\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_1+\frac{2i-1}{2}h, y_0+\frac{2j-1}{2}h, z_0+\frac{2k-1}{2}h\right)$$
$$+d_1h^2+d_2h^4+\dots \qquad \dots(9)$$

$$I_6=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_{n-1}}^{z_n}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_{s-1}}^{y_s}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} f(x_r+0.5h, y_{s-1}+0.5h, z_{n-1}+0.5h)$$
$$+e_1h^2+e_2h^4+\dots \qquad \dots(10)$$

$$I_7=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = \sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_{t-1}}^{z_t}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} f(x_r+0.5h, y_{n-1}+0.5h, z_{t-1}+0.5h)$$
$$+g_1h^2+g_2h^4+\dots \qquad \dots(11)$$

$$I_8=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{r=1}^{n-1} f(x_r+0.5h, y_{n-1}+0.5h, z_{n-1}+0.5h)$$
$$+h_1h^2+h_2h^4+\dots \qquad \dots(12)$$

حيث $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,g_i,h_i$ ثوابت و $i=1,2,\dots$ .

وبجمع الصيغ (2)،(3)،(4)،(8)،(9)،(10)،(11) و(12) نحصل على :

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = h^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h, y_0+\frac{2j-1}{2}h, z_0+\frac{2k-1}{2}h\right)$$
$$+\Big[\ \frac{h^5}{24}(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz})-\frac{h^6}{48}(D_{xxx}-D_{yyy}-D_{zzz}-D_{xxy}-D_{xxz}$$
$$-D_{yyz}-D_{yzz}+D_{xyy}+D_{xzz}\ )+\dots\ \Big]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+A_1h^2+A_2h^4+\dots \qquad \dots(13)$$

حيث $A_1,A_2,\dots$ ثوابت تعتمد فقط على المشتقات الجزئية للدالة. انتهى البرهان.

**ملاحظة :** بنفس الطريقة يمكن اشتقاق القاعدة عندما تكون دالة التكامل معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطة $(x_n, y_0, z_n)$ او النقطة $(x_n, y_n, z_0)$ .

**مبرهنة** لتكن دالة التكامل $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة $(x_n, y_0, z_0)$ فان القيمة التقريبية للتكامل $I$ يمكن حسابها من القاعدة التالية:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz = h^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h, y_0+\frac{2j-1}{2}h, z_0+\frac{2k-1}{2}h\right)$$
$$+\Big[\ \frac{h^5}{24}(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz})-\frac{h^6}{48}(D_{xxx}-D_{yyy}-D_{zzz}+D_{xxy}+D_{xxz}$$
$$+D_{yyz}+D_{yzz}-D_{xyy}-D_{xzz}\ )+\dots\ \Big] f(x_{n-1}, y_1, z_1)$$
$$+B_1h^2+B_2h^4+\dots$$

حيث $B_1, B_2, \dots$ ثوابت تعتمد فقط على المشتقات الجزئية للدالة .

**البرهان** : التكامل $I$ يمكن كتابته بالصورة الاتية:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} dxdydz\, f(x,y,z)$$
....(14)

نلاحظ ان التكاملات الثمانية اعلاه باستثناء التكامل الخامس $(I_5)$ جميع مكاملاتها (الدالة *f(x,y,z)* مستمرة و غير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات $(I_1,I_2,I_3,I_4,I_6,I_7,I_8)$ من خلال الصيغة التي اشتقها عكار[5] اما التكامل الخامس فأن الدالة *f(x,y,z)* مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة $(x_n, y_0, z_0)$ وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات الثلاث متغيرات Taylor's series for a functions of three variables ، موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $(x_n, y_0, z_0)$ سستري [3].

وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$=h^3\sum_{r=1}^{n-1} f(x_{r-1}+0.5h, y_0+0.5h, z_0+0.5h)$$
$$+a_1h^2+a_2h^4+\dots \qquad ...(15)$$

$$I_2=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)\,dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} f(x_{r-1}+0.5h, y_{n-1}+0.5h, z_t+0.5h)$$
$$+b_1h^2+b_2h^4+\dots \qquad ...(16)$$

$$I_3=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} f(x_{r-1}+0.5h,y_s+0.5h,z_0+0.5h)$$
$$+c_1h^2+c_2h^4+\ldots \quad \ldots(17)$$

$$I_4=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_1+\frac{2j-1}{2}h,z_1+\frac{2k-1}{2}h\right)+d_1h^2+d_2h^4+\ldots \quad \ldots(18)$$

اما لايجاد قيمة التكامل الخامس $I_5$ في المنطقة الجزئية $[x_{n-1},x_n]\times[y_0,y_1]\times[z_0,z_1]$ نستخدم متسلسلة تايلر للدالة $f(x,y,z)$ حول النقطة $(x_{n-1},y_1,z_1)$ .

$$f(x,y,z)=f(x_{n-1},y_1,z_1)+(x-x_{n-1})f_x(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+(y-y_1)f_y(x_{n-1},y_1,z_1)+(z-z_1)f_z(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2}f_{xx}(x_{n-1},y_1,z_1)+\frac{(y-y_1)^2}{2}f_{yy}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{(z-z_1)^2}{2}f_{zz}(x_{n-1},y_1,z_1)+(x-x_{n-1})(y-y_1)f_{xy}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+(x-x_{n-1})(z-z_1)f_{xz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+(y-y_1)(z-z_1)f_{yz}(x_{n-1},y_1,z_1)+\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}f_{xxx}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{(y-y_1)^3}{3!}f_{yyy}(x_{n-1},y_1,z_1)+\frac{(z-z_1)^3}{3!}f_{zzz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_1)}{2}f_{xxy}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_1)^2}{2}f_{xyy}(x_{n-1},y_1,z_1)+\ldots \quad \ldots(19)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y,z)$ موجودة عند النقطة $(x_{n-1},y_1,z_1)$ ، (كون الدالة في هذه النقطة معرفة ولايوجد فيها اعتلال فعليه يمكن استخدام متسلسلة تايلر لها المذكورة في الصيغة 5 ) .

وبأخذ التكامل الثلاثي للصيغة (19) (متسلسلة تايلر) في المنطقة $[x_{n-1},x_n]\times[y_0,y_1]\times[z_0,z_1]$ نحصل على :

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=h^3f(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+\frac{h^4}{2}\left[f_x(x_{n-1},y_1,z_1)-f_y(x_{n-1},y_1,z_1)-f_z(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$+\frac{h^5}{3!}\left[f_{xx}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{zz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$

$$-\frac{h^5}{4}\left[f_{xy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{xz}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{yz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$+\frac{h^6}{4!}\left[f_{xxx}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{yyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{zzz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$-\frac{h^6}{12}[f_{xxy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{xxz}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yyz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+f_{yzz}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xzz}(x_{n-1},y_1,z_1)]+\ldots \quad \ldots(20)$$

نعوض عن $(x,y,z)$ بـ$(x_n-0.5h,y_0+0.5h,z_0+0.5h)$ في الصيغة (19) نحصل على :

$$f(x_n-0.5h,y_0+0.5h,z_0+0.5h)=f(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$-\frac{h}{2}\left[f_x(x_{n-1},y_1,z_1)-f_y(x_{n-1},y_1,z_1)-f_z(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$+\frac{h^2}{8}\left[f_{xx}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{zz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$-\frac{h^2}{4}\left[f_{xy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{xz}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{yz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$+\frac{h^3}{8\times 3!}\left[f_{xxx}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{yyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{zzz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$-\frac{h^3}{8\times 2}[f_{xxy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{xxz}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yyz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+f_{yzz}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xzz}(x_{n-1},y_1,z_1)]+\ldots \quad \ldots(21)$$

ومن الصيغتين (20) ، (21) وبعد ضرب الصيغة (21) بـ $h^3$ نحصل على :

$$I_5=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = h^3 f(x_n-0.5h,y_0+0.5h,,z_0+0.5h)$$
$$+\frac{h^5}{24}\left[f_{xx}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{zz}(x_{n-1},y_1,z_1)\right]$$
$$-\frac{h^6}{48}[f_{xxx}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{yyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{zzz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+f_{xxy}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{xxz}(x_{n-1},y_1,z_1)+f_{yyz}(x_{n-1},y_1,z_1)$$
$$+f_{yzz}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xyy}(x_{n-1},y_1,z_1)-f_{xzz}(x_{n-1},y_1,z_1)]+\ldots \quad \ldots(22)$$

$$I_6=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z) = \sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1} f(x_{n-1}+0.5h,y_0+0.5h,z_t+0.5h)+e_1h^2+e_2h^4+\ldots \quad \ldots(23)$$

$$I_7=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=h^3\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_{n-1}+0.5h,y_s+0.5h,z_0+0.5h\right)+g_1h^2+g_2h^4+\ldots\ldots(24)$$

$$I_8=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=h^3\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_{n-1}+0.5h,y_s+0.5h,z_t+0.5h\right)+h_1h^2+h_2h^4+\ldots \qquad \ldots(25)$$

حيث $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,g_i$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة و $i=1,2,\ldots$ .

وبجمع الصيغ (15) ، (16) ، (17) ، (18) ، (22) ، (23) ، (24) و(25) نحصل على :

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=h^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h,z_0+\frac{2k-1}{2}h\right)$$

$$+\Big[\ \frac{h^5}{24}\left(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}\right)-\frac{h^6}{48}\left(D_{xxx}-D_{yyy}-D_{zzz}+D_{xxy}+D_{xxz}\right.$$

$$\left.+D_{yyz}+D_{yzz}-D_{xyy}-D_{xzz}\right)+\ldots\ \Big]f\left(x_{n-1},y_1,z_1\right)\ +B_1h^2+B_2h^4+\ldots \qquad \ldots(26)$$

حيث $B_1,B_2,\ldots$ ثوابت تعتمد فقط على المشتقات الجزئية للدالة . انتهى البرهان

**ملاحظة :** بنفس الطريقة يمكن اشتقاق القواعد التي تكون فيها دالة التكامل مستمرة لكنها معتلة في النقطة $(x_0,y_0,z_n)$ او $(x_0,y_n,z_0)$.

## 3. الامثلة

**مثال 1**
$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} -xz(x^2+z^2-y+1)^{1/3}\,dx\,dy$$

المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,1,0) (لانه عند تعويض النقطة(0,1,0) في المشتقة الاولى للدالة $f(x,y)=-xz\ (x^2+z^2-y+1)^{1/3}$ فان الناتج يكون غير معرف ) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 1) نلاحظ انها متطابقة تماما" لغاية المرتبة الثالثة عشر بعد الفاصلة عندما $m=n_1=n_2=256$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (2,10/3,4,13/3,16/3,6,...) بينما كانت القيمة صحيحة لخمسة مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد الثلاثة بدون هذا التعجيل ، ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 1). علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(2.183 دقيقة).

**مثال 2**
$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2}\quad dxdydz$$

التكامل هنا من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" كذلك فان المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (1,0,0) وهنا تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات من خلال ملاحظة تكرار القيمة في الاعمدة الاربعة الاخيرة في الجدول(برنامج الماتلاب)عندما $m=n_1=n_2=64$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (2,4,6,8,10 ,...) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (1,0,0) اذ يمكن القول بان قيمة التكامل هي (0.96059195645489) مقربة الى اربعة عشرمرتبة عشرية بينما كانت القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد الثلاثة مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في (الجدول رقم 2) ، ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 2).
علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(4.677 ثانية).

**مثال 3**

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 (x^4 + y^4 + z^4)^{1/3} dxdydz$$

التكامل هنا ايضاً من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" كذلك فان المكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0,0) وايضاً تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات حيث حصلنا على قيمة صحيحة لغاية اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة من خلال ملاحظة تكرارالقيمة في الاعمدة الاربعة الاخيرة في الجدول (برنامج الماتلاب ) عندما $m = n_1 = n_2 = 128$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (2,4,13/3,6,8,10 ,...) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (0,0,0) اذ يمكن القول بان قيمة التكامل هي ( 0.76873958094616 ) مقربة الى اربعة عشرمرتبة عشرية بينما كانت القيمة صحيحة لخمسة مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد الثلاثة مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في (الجدول رقم 3) .ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 2) ايضاً.

علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(30.971 ثانية).

| m=n1=n2 | MMM | K=2 | K=10/3 | K=4 | K=13/3 | K=16/3 | K=6 | K=19/3 | K=22/3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.25000000000000 | | | | | | | | |
| 2 | 0.27495460108292 | 0.28327280144390 | | | | | | | |
| 4 | 0.28037258888110 | 0.28217858481382 | 0.28205806799129 | | | | | | |
| 8 | 0.28168378787053 | 0.28212085420034 | 0.28211449576097 | 0.28211825761229 | | | | | |
| 16 | 0.28200893081249 | 0.28211731179315 | 0.28211692163306 | 0.28211708335786 | 0.28211702206706 | | | | |
| 32 | 0.28209003492076 | 0.28211706962351 | 0.28211704295099 | 0.28211705103885 | 0.28211704935195 | 0.28211705004591 | | | |
| 64 | 0.28211029764435 | 0.28211705188555 | 0.28211704993190 | 0.28211705039729 | 0.28211705036380 | 0.28211705038954 | 0.28211705039500 | | |
| 128 | 0.28211536228785 | 0.28211705050235 | 0.28211705035001 | 0.28211705037788 | 0.28211705037687 | 0.28211705037720 | 0.28211705037700 | 0.28211705037678 | |
| 256 | 0.28211662836288 | 0.28211705038790 | 0.28211705037529 | 0.28211705037697 | 0.28211705037693 | 0.28211705037693 | 0.28211705037692 | 0.28211705037692 | 0.28211705037692 |

قيمة التكامل التحليلية مقربة لاربعة عشر مرتبة عشرية $I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}-xz\,(x^{2}+z^{2}-y+1)^{1/3}dxdydz\approx 0.28211705037699$

جدول رقم (1)

| m=n1=n2 | MMM | K=2 | K=4 | K=6 | K=8 | K=10 | K=12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.86602540378444 | | | | | | |
| 2 | 0.93608670099887 | 0.95944046673701 | | | | | |
| 4 | 0.95441171684771 | 0.96052005546400 | 0.96059202804579 | | | | |
| 8 | 0.95904354316844 | 0.96058748527535 | 0.96059198059611 | 0.96059197984294 | | | |
| 16 | 0.96020464381885 | 0.96059167736899 | 0.96059195684190 | 0.96059195646485 | 0.96059195637317 | | |
| 32 | 0.96049511521811 | 0.96059193901786 | 0.96059195646112 | 0.96059195645507 | 0.96059195645503 | 0.96059195645512 | |
| 64 | 0.96056774532840 | 0.96059195536517 | 0.96059195645499 | 0.96059195645489 | 0.96059195645489 | 0.96059195645489 | 0.96059195645489 |

التكامل ليس له قيمة تحليلية $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{(1-x)^{2}+y^{2}+z^{2}}\;dxdydz$

جدول رقم (2)

| m=n1=n2 | MMM | K=2 | K=4 | K=13/3 | K=6 | K=8 | K=10 | K=12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.57235712127667 | | | | | | | |
| 2 | 0.73147039073715 | 0.78450814722398 | | | | | | |
| 4 | 0.75997013665406 | 0.76947005195970 | 0.76846751227542 | | | | | |
| 8 | 0.76657553724759 | 0.76877733744544 | 0.76873115647782 | 0.76874491752090 | | | | |
| 16 | 0.76820006814230 | 0.76874157844053 | 0.76873919450687 | 0.76873961405588 | 0.76873952987390 | | | |
| 32 | 0.76860478317814 | 0.76873968819009 | 0.76873956217339 | 0.76873958136393 | 0.76873958084501 | 0.76873958104490 | | |
| 64 | 0.76870588588061 | 0.76873958678143 | 0.76873958002085 | 0.76873958095241 | 0.76873958094587 | 0.76873958094627 | 0.76873958094617 | |
| 128 | 0.76873115742109 | 0.76873958126792 | 0.76873958090035 | 0.76873958094626 | 0.76873958094616 | 0.76873958094616 | 0.76873958094616 | 0.76873958094616 |

التكامل ليس له قيمة تحليلية $I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 (x^4 + y^4 + z^4)^{1/3} dx dy dz$

جدول رقم (3)

## 4.المناقشة

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل بقاعدة النقطة الوسطى على الابعاد الثلاثة $X, Y, Z$ وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الاوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة (قاعدة $MMM$) قيماً" صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التقريبية الصحيحة للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استخدام تعجيل رومبرك عليها ،على سبيل المثال في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لخمسة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 256$ ، وفي التكامل الثاني كانت القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ ، وفي التكامل الثالث كانت القيمة صحيحة لخمسة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 128$ .

إلاّ إنه عند استخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية مقارنة مع قيم التكاملات التحليلية أذ كانت مطابقة للقيمة التحليلية في التكامل الأول (13 مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n_1 = n_2 = 256$ وفي التكامل الثاني (14مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ ، وفي التكامل الثالث (14 مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n = 128$ ، وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة $RMMM$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل.

## المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp.87-93,1967.

[2] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , Blasdell Puplishing Company, pp. 1-2 ,599,113, chapter 5,1975.

[3] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , pp 5-7 , 2008.

[4] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[5] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة . 2010

[6] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

[7] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988

## برنامج الماتلاب المستخدم في ايجاد النتائج

**البرنامج (1)**

هو ملف لكتابة الدالة $f(x, y, z)$ وفيه

```
function F=f(x,y,z);
F= log(x+y+z+1);
```

**البرنامج (2)**

هو ملف لرسم مخطط الدالة $f(x, y, z)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$

```
clc
clear
syms x y z
ezmesh(log(x+y+z+1),[a,b,c,d,e,f],90)
```

**البرنامج (2)**

لايجاد قيمة التكامل الثلاثي للدالة $w(x, y, z)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ بتطبيق الطريقة RMMM .

```
tic
clear all
clc
a=-1; b=0 ; c=-2 ;d=0; e=1;f=2;eps=10^(-14);
```

```
%find triple integral of function g(x,y,z) on the [a,b]*[c,d]*[e,f]
%using RMMM
D=[2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50];
n=1;h=(b-a)/n;h1=(d-c)/n;h2=(f-e)/n;
s(1,1)=1;
s(1,2)=h*h1*h2*g1(a+.5*h,c+.5*h1,e+.5*h2);
for i=2:10
n=2^(i-1);s(i,2)=0;
h2=(f-e)/n;
for t=1:n
h1=(d-c)/n;
for k=1:n;
h=(b-a)/n;
for j=1:n
s(i,2)=s(i,2)+h*h1*h2*g1(a+h*(2*j-1)/2,c+h1*(2*k-1)/2,e+h2*(2*t-1)/2);
s(i,1)=n;
end
end
end
for l=3:i+1
clc
s(i,l)=(s(i,l-1)*2^D(l-2)-s(i-1,l-1))/(2^D(l-2)-1)
end
if abs(s(i,i+1)-s(i,i))<=eps;
sprintf('%5.0f %2.15f',n,s(i,i+1))
break
els
end
end
xlswrite('E:/(3-98).xls',s,1,'A2')
toc
```