Derivation Nnumerical Method by Using Trapezoidal Method to Evaluate Triple Integrations its Integrands are Continuous with Singular Derivatives.

اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة شبه المنحرف لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية.

أ.علي حسن محمد حسن عبدالرحيم جبير الياسري محمد رزاق سلمان
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

بحـــــث مستـــــل

المستخلص

ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية عدديا ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاثة X,Y,Z وكيفية ايجاد صيغة الخطأ لها (حدود التصحيح) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبرك [1]،[5] من خلال حدود التصحيح هذه ، عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي X مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الاوسط Y ومساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي Z .

وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز $RTTT$ (حيث T يرمز لقاعدة شبه المنحرف وR لتعجيل رومبرك) اذ يمكن الاعتماد عليها كونها قد أعطت دقة عالية في النتائج مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات بعدد فترات جزئية قليلة.

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of triple integrals numerically, its integrands have singular partial derivatives not on the end of the region of integration by using the Trapezoidal method with the three dimension X,Y and Z . And to derive the (correction form of error terms) and we used Romberg acceleration to improve the results when the numbers of subintervals on the X -dimension equal to the subintervals on the Y -dimension and equal to the subintervals on the Z -dimension. And we will use the symbol ***RTTT*** to indicate this method (*T* means Trapezoidal method and *R* Romberg acceleration) and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integrations and with little subintervals.

1. المقدمة

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق معينة تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع ، إذ إن هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون ، وإن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات كثيرة منها :

1. عندما يكون من المحال إيجاد القيمة التحليلية للتكامل .
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة و زمن طويل.
3. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول(مثل اللوغارتم او معكوس الظل) .
4. قد تكون المسألة هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم (أي أن الدالة معرفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هي الحال عند تحليل نتائج التجارب .

إن عملية إيجاد قيمة للتكامل الثلاثي تشكل مسألة اكثر تعقيدا من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي او الثنائي كون المكامل هنا يعتمد على ثلاث متغيرات وان مسألة الاستمرارية أوالاعتلال في المكامل أوالاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكامل الأحادي .

لهذا فإن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم، على سبيل المثال، الحجم الواقع بين القطع المكافئ $z=2x^2+y^2$ والاسطوانة $z=4-y^2$، والحجم الواقع داخل الاسطوانة

$\rho = 4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $\rho^2 + z^2 = 16$ ومن الأسفل بالمستوي $z = 0$، وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$ ، وكذلك تبرز أهميتها في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن وكثير من الامثلة على ذلك فرانك آيرز [8]. مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن [2] عام1973 ومنهم من عمل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز و رابينوتز [3] عام 1975، اما الباحثة ضياء [7] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة وهي طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على التكامل الخارجي (البعد Z) وكل من الطرائق $RM(RS)$ ، $RM(RM)$ و $RS(RM)$ إضافة الى طريقة $RS(RS)$ على التكامل الأوسط (البعد Y) والتكامل الداخلي (البعد X) مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي Y و X ، وفي عام 2010 قدمت عكار [6] أسلوبا مغايرا لما استخدمته الباحثة ضياء إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد X ، Y و Z عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية اي إن ($h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}$) وأسمتها $RMMM$ حيث أن MMM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الابعاد الثلاثة و R طريقة تعجيل رومبرك وفي عام 2013 قدمت هلال [9] أسلوبا مشابها لما استخدمته الباحثة عكار [6] إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية التي مكاملاتها مستمرة أو مستمرة لكن معتلة المشتقات الجزئية أو المعتلة في إحدى نهايتي منطقة التكامل وصيغ الخطأ(حدود التصحيح) وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة شبه المنحرف على الابعاد X ، Y وZ عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية اي إن ($h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}$) وأسمتها $RTTT$ حيث أن TTT ترمز لقاعدة شبه المنحرف المطبقة على الابعاد الثلاثة و R طريقة تعجيل رومبرك ، وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي بحثنا هذا سوف نعمل على أيجاد طريقة عددية جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية عندما تكون دالة التكامل *f(x,y,z)* مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها عندما يكون الاعتلال حصراً في النقطة (x_0, y_n, z_n) أو (x_n, y_0, z_0) وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة شبه المنحرف المطبقة على الأبعاد الثلاثة (الداخلي والأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية ولاحظنا إن هذه الطريقة مع استخدام حدود التصحيح التي اوجدناها وتعجيل رومبرك أعطت نتائج جيدة وسريعة من حيث الدقة وبعدد فترات جزئية قليلة نسبياً ولا تستغرق وقت طويل.

2: التكاملات الثلاثية لمكاملات مستمرة – معتلة المشتقات الجزئية

Triple Integrals For Continuous Integrands With Singular Partial Derivatives

يمكن كتابة التكامل الثلاثي $I = \int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz$ بالصيغة:

$$I = \int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)\,dxdydz = TTT(h) + E_{TTT}(h)$$

ولنفرض أن الدالة $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0, x_n]\times[y_0, y_n]\times[z_0, z_n]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل.

الحالة الأولى: التكاملات الثلاثية ذات المكامل المستمر– معتل المشتقة في النقطة (x_0, y_n, z_n) باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الأبعاد(الداخلي x والأوسط y والخارجي z) (TTT) .

مبرهنة:(1)

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ عدا النقطة $(x,y,z)=(x_0,y_n,z_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

يمكن حسابها بتطبيق القاعدة (TTT) من الصيغة الآتية :

$$\begin{aligned}TTT(h)=\frac{h^3}{8}\Big[\; & f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_n)+f(x_0,y_n,z_0)+f(x_0,y_n,z_n)+\\ & f(x_n,y_0,z_0)+f(x_n,y_0,z_n)+f(x_n,y_n,z_0)+f(x_n,y_n,z_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_0,y_0,z_j)+\\ & f(x_0,y_n,z_j)+f(x_n,y_0,z_j)+f(x_n,y_n,z_j)+f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_n)+\\ & f(x_n,y_j,z_0)+f(x_n,y_j,z_n)+f(x_j,y_0,z_0)+f(x_j,y_0,z_n)+f(x_j,y_n,z_0)+\\ & f(x_j,y_n,z_n)+4\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Big[\; f(x_i,y_0,z_k)+f(x_i,y_n,z_k)+f(x_i,y_k,z_0)+f(x_i,y_k,z_n)+\\ & f(x_0,y_i,z_k)+f(x_n,y_i,z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j,z_k)\;\Big]\Big]\end{aligned}$$

وإن صيغة الخطأ(حدود التصحيح)هي:

$$\begin{aligned}E_{TTT}(h)=\Big[& h^5(\frac{-1}{12}D_x^{\,2}+\frac{-1}{12}D_y^{\,2}+\frac{-1}{12}D_z^{\,2})+h^6(\frac{1}{24}D_x^{\,3}+\frac{-1}{24}D_y^{\,3}+\frac{-1}{24}D_z^{\,3}+\\ & \frac{-1}{24}D_x^{\,2}D_y+\frac{1}{24}D_xD_y^{\,2}+\frac{-1}{24}D_x^{\,2}D_z+\frac{1}{24}D_xD_z^{\,2}+\frac{-1}{24}D_y^{\,2}D_z+\frac{-1}{24}D_yD_z^{\,2})+\\ & h^7(\frac{-1}{80}D_x^{\,4}+\frac{-1}{80}D_y^{\,4}+\frac{-1}{80}D_z^{\,4})+\cdots\Big]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+A_1h^2+A_2h^4+\cdots\end{aligned}$$

حيث $A_1,A_2,...$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط .

البرهان :

التكامل الثلاثي I يمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz$$

$$+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

$$+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz \qquad \cdots(1)$$

عند ملاحظة التكاملات الثمانية اعلاه نرى انها جميعاً مستمرة في مناطق تكاملها ماعدا التكامل الرابع فيه الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة تحديداً في النقطة $\left(x,y,z\right)=\left(x_0,y_n,z_n\right)$ وهذا يعني أن متسلسلة تايلر موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x,y,z\right)=\left(x_0,y_n,z_n\right)$سستري[4]. وهنا سنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

التكامل الاول: هلال[9].

$$I_1=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2}[\,f(x_0,y_s,z_t)+$$
$$f(x_0,y_s,z_{t+1})+f(x_0,y_{s+1},z_t)+f(x_0,y_{s+1},z_{t+1})+f(x_1,y_s,z_t)+f(x_1,y_s,z_{t+1})+$$
$$f(x_1,y_{s+1},z_t)+f(x_1,y_{s+1},z_{t+1})]+a_1h^2+a_2h^4+\cdots \qquad \cdots(2)$$

التكامل الثاني: هلال[9].

$$I_2=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{s=0}^{n-2}[\,f(x_0,y_s,z_{n-1})+$$
$$f(x_0,y_s,z_n)+f(x_0,y_{s+1},z_{n-1})+f(x_0,y_{s+1},z_n)+f(x_1,y_s,z_{n-1})+f(x_1,y_s,z_n)+$$
$$f(x_1,y_{s+1},z_{n-1})+f(x_1,y_{s+1},z_n)]+b_1h^2+b_2h^4+\cdots \qquad \cdots(3)$$

التكامل الثالث: هلال[9].

$$I_3=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=0}^{n-2}[\,f(x_0,y_{n-1},z_t)+$$
$$f(x_0,y_{n-1},z_{t+1})+f(x_0,y_n,z_t)+f(x_0,y_n,z_{t+1})+f(x_1,y_{n-1},z_t)+f(x_1,y_{n-1},z_{t+1})+$$
$$f(x_1,y_n,z_t)+f(x_1,y_n,z_{t+1})]+c_1h^2+c_2h^4+\cdots \qquad \cdots(4)$$

التكامل الرابع:

هنا التكامل فيه الدالة معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطة $\left(x_0,y_n,z_n\right)$ ولحساب قيمة هذا التكامل نستخدم متسلسلة تايلر حول النقطة$\left(x_1,y_{n-1},z_{n-1}\right)$:

$$f(x,y,z)=[1+(x-x_1)D_x+(y-y_{n-1})D_y+(z-z_{n-1})D_z+\frac{(x-x_1)^2}{2!}D_x^{\,2}+\frac{(y-y_{n-1})^2}{2!}D_y^{\,2}+$$
$$\frac{(z-z_{n-1})^2}{2!}D_z^{\,2}+(x-x_1)(y-y_{n-1})D_xD_y+(x-x_1)(z-z_{n-1})D_xD_z+(y-y_{n-1})(z-z_{n-1})D_yD_z+$$
$$\frac{(x-x_1)^3}{3!}D_x^{\,3}+\frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}D_y^{\,3}+\frac{(z-z_{n-1})^3}{3!}D_z^{\,3}+\frac{(x-x_1)^2(y-y_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_y+$$
$$\frac{(x-x_1)(y-y_{n-1})^2}{2!}D_xD_y^{\,2}+\frac{(x-x_1)^2(z-z_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_z+\frac{(x-x_1)(z-z_{n-1})^2}{2!}D_xD_z^{\,2}+$$
$$\frac{(y-y_{n-1})^2(z-z_{n-1})}{2!}D_y^{\,2}D_z+\frac{(y-y_{n-1})(z-z_{n-1})^2}{2!}D_yD_Z^{\,2}+(x-x_1)(y-y_{n-1})(z-z_{n-1})D_xD_yD_z+$$
$$\frac{(x-x_1)^4}{4!}D_x^{\,4}+\frac{(y-y_{n-1})^4}{4!}D_y^{\,4}+\frac{(z-z_{n-1})^4}{4!}D_z^{\,4}+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(5)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية للدالة $f\ (x,y,z)$ موجودة عند النقطة (x_1,y_{n-1},z_{n-1}) وبأخذ التكامل الثلاثي للصيغة (5) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]\times[z_{n-1},z_n]$ نحصل على:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=[(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})}{2}D_x$$
$$+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})}{2}D_y+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^2}{2}D_z-$$
$$\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})}{6}D_x^{\,2}+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^3(z_n-z_{n-1})}{6}D_y^{\,2}+$$
$$\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^3}{6}D_z^{\,2}-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})}{4}D_xD_y$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^2}{4}D_xD_z+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})^2}{4}D_yD_z$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^4(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})}{24}D_x^{\,3}+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^4(z_n-z_{n-1})}{24}D_y^{\,3}+$$
$$\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^4}{24}D_z^{\,3}-\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})}{12}D_x^{\,2}D_y$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^3(z_n-z_{n-1})}{12}D_xD_y^{\,2}-\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^2}{12}D_x^{\,2}D_z$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^3}{12}D_xD_z^{\,2}+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^3(z_n-z_{n-1})^2}{12}D_y^{\,2}D_z+$$
$$\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})^3}{24}D_yD_z^{\,2}-\frac{(x_1-x_0)^2(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})^2}{8}D_xD_yD_z-$$
$$\frac{(x_0-x_1)^5(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})}{120}D_x^{\,4}+\frac{(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})^5(z_n-z_{n-1})}{120}D_y^{\,4}+$$
$$\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^5}{120}D_z^{\,4}+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(6)$$

وبالتعويض عن كل من (z_n-z_{n-1}) ، (y_n-y_{n-1}) ، (x_1-x_0) بـ h في الصيغة (6) نحصل على:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = h^3 - \frac{h^4}{2}D_x + \frac{h^4}{2}D_y + \frac{h^4}{2}D_z + \frac{h^5}{6}D_x^{\,2} + \frac{h^5}{6}D_y^{\,2} +$$
$$\frac{h^5}{6}D_z^{\,2} - \frac{h^5}{4}D_xD_y - \frac{h^5}{4}D_xD_z + \frac{h^5}{4}D_yD_z - \frac{h^6}{24}D_x^{\,3} + \frac{h^6}{24}D_y^{\,3} + \frac{h^6}{24}D_z^{\,3} + \frac{h^6}{12}D_x^{\,2}D_y -$$
$$\frac{h^6}{12}D_xD_y^{\,2} + \frac{h^6}{12}D_x^{\,2}D_z - \frac{h^6}{12}D_xD_z^{\,2} + \frac{h^6}{12}D_y^{\,2}D_z + \frac{h^6}{12}D_yD_z^{\,2} - \frac{h^6}{8}D_xD_yD_z + \frac{h^7}{120}D_x^{\,4} +$$
$$\frac{h^7}{120}D_y^{\,4} + \frac{h^7}{120}D_z^{\,4}\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(7)$$

ولإيجاد قاعدة شبه المنحرف على الأبعاد الثلاثة (الداخلي x والأوسط y والخارجي z) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]\times[z_{n-1},z_n]$ نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_n وعن z بـ z_n في الصيغة (5) فنحصل على:

$$f(x_0,y_n,z_n) = [1+(x_0-x_1)D_x + (y_n-y_{n-1})D_y + (z_n-z_{n-1})D_z + \frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^{\,2} +$$
$$\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y^{\,2} + \frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2!}D_z^{\,2} + (x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})D_xD_y + (x_0-x_1)(z_n-z_{n-1})D_xD_z +$$
$$(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})D_yD_z + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^{\,3} + \frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y^{\,3} + \frac{(z_n-z_{n-1})^3}{3!}D_z^{\,3} +$$
$$\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_y + \frac{(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_xD_y^{\,2} + \frac{(x_0-x_1)^2(z_n-z_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_z +$$
$$\frac{(x_0-x_1)(z_n-z_{n-1})^2}{2}D_xD_z^{\,2} + \frac{(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})}{2}D_y^{\,2}D_z + \frac{(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^2}{2}D_yD_Z^{\,2} +$$
$$(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})D_xD_yD_z + \frac{(x_0-x_1)^4}{24}D_x^{\,4} + \frac{(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y^{\,4} + \frac{(z_n-z_{n-1})^4}{24}D_z^{\,4} +$$
$$\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(8)$$

الآن نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_n وعن z بـ z_{n-1} في الصيغة (5) نجد أن:

$$f(x_0,y_n,z_{n-1}) = [1+(x_0-x_1)D_x + (y_n-y_{n-1})D_y + \frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^{\,2} + \frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y^{\,2} +$$
$$(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})D_xD_y + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^{\,3} + \frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y^{\,3} + \frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_y +$$
$$\frac{(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_xD_y^{\,2} + \frac{(x_0-x_1)^4}{24}D_x^{\,4} + \frac{(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y^{\,4} + \cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(9)$$

وبالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{n-1} وعن z بـ z_n في الصيغة (5) نجد أن:

$$f(x_0,y_{n-1},z_n) = [1+(x_0-x_1)D_x + (z_n-z_{n-1})D_z + \frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^{\,2} + \frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2!}D_z^{\,2} +$$
$$(x_0-x_1)(z_n-z_{n-1})D_xD_z + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^{\,3} + \frac{(z_n-z_{n-1})^3}{3!}D_z^{\,3} + \frac{(x_0-x_1)^2(z_n-z_{n-1})}{2!}D_x^{\,2}D_z +$$
$$\frac{(x_0-x_1)(z_n-z_{n-1})^2}{2}D_xD_z^{\,2} + \frac{(x_0-x_1)^4}{24}D_x^{\,4} + \frac{(z_n-z_{n-1})^4}{24}D_z^{\,4} + \cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(10)$$

وكذلك بالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{n-1} وعن z بـ z_{n-1} في الصيغة (5) نجد أن:

$$f(x_0,y_{n-1},z_{n-1}) = [1+(x_0-x_1)D_x + \frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^{\,2} + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^{\,3} + \frac{(x_0-x_1)^4}{24}D_x^{\,4} +$$
$$\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad (11)$$

وأيضاً بالتعويض عن x بـ x_1 وعن y بـ y_n وعن z بـ z_n في الصيغة (5) نجد أن:

$$f(x_1,y_n,z_n)=[1+(y_n-y_{n-1})D_y+(z_n-z_{n-1})D_z+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y{}^2+\frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2!}D_z{}^2+$$
$$(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})D_yD_z+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y{}^3+\frac{(z_n-z_{n-1})^3}{3!}D_z{}^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^2(z_n-z_{n-1})}{2}D_y{}^2D_z+$$
$$\frac{(y_n-y_{n-1})(z_n-z_{n-1})^2}{2}D_yD_Z{}^2+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y{}^4+\frac{(z_n-z_{n-1})^4}{24}D_z{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(12)$$

وكذلك بالتعويض عن x بـ x_1 وعن y بـ y_n وعن z بـ z_{n-1} في الصيغة (5) نجد أن:

$$f(x_1,y_n,z_{n-1})=[1+(y_n-y_{n-1})D_y+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y{}^2+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y{}^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y{}^4+$$
$$\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(13)$$

وأيضاً بالتعويض عن x بـ x_1 وعن y بـ y_{n-1} وعن z بـ z_n في الصيغة(5) نجد أن:

$$f(x_1,y_{n-1},z_n)=[1+(z_n-z_{n-1})D_z+\frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2!}D_z{}^2+\frac{(z_n-z_{n-1})^3}{3!}D_z{}^3+\frac{(z_n-z_{n-1})^4}{24}D_z{}^4+$$
$$\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(14)$$

وبالتعويض عن كل من (z_n-z_{n-1}) ، (y_n-y_{n-1}) بـ h في الصيغ (8)،(9)،(10)،(11)،(12)،(13)،(14) على التوالي نحصل على:

$$i)\, f(x_0,y_n,z_n)=\Big[1-h\,D_x+hD_y+hD_z+\frac{h^2}{2}D_x{}^2+\frac{h^2}{2}D_y{}^2+\frac{h^2}{2}D_z{}^2-h^2D_xD_y-h^2D_xD_z+$$
$$h^2D_yD_z-\frac{h^3}{6}D_x{}^3+\frac{h^3}{6}D_y{}^3+\frac{h^3}{6}D_z{}^3+\frac{h^3}{2}D_x{}^2D_y-\frac{h^3}{2}D_xD_y{}^2+\frac{h^3}{2}D_x{}^2D_z-\frac{h^3}{2}D_xD_z{}^2+$$
$$\frac{h^3}{2}D_y{}^2D_z+\frac{h^3}{2}D_yD_z{}^2-h^3D_xD_yD_z+\frac{h^4}{24}D_x{}^4+\frac{h^4}{24}D_y{}^4+\frac{h^4}{24}D_z{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(15)$$

$$ii)\, f(x_0,y_n,z_{n-1})=\Big[1-h\,D_x+hD_y+\frac{h^2}{2}D_x{}^2+\frac{h^2}{2}D_y{}^2-h^2D_xD_y-\frac{h^3}{6}D_x{}^3+$$
$$\frac{h^3}{6}D_y{}^3+\frac{h^3}{2}D_x{}^2D_y-\frac{h^3}{2}D_xD_y{}^2+\frac{h^4}{24}D_x{}^4+\frac{h^4}{24}D_y{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(16)$$

$$iii)\, f(x_0,y_{n-1},z_n)=\Big[1-h\,D_x+hD_z+\frac{h^2}{2}D_x{}^2+\frac{h^2}{2}D_z{}^2-h^2D_xD_z-\frac{h^3}{6}D_x{}^3+\frac{h^3}{6}D_z{}^3+$$
$$\frac{h^3}{2}D_x{}^2D_z-\frac{h^3}{2}D_xD_z{}^2+\frac{h^4}{24}D_x{}^4+\frac{h^4}{24}D_z{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(17)$$

$$iv)\, f(x_0,y_{n-1},z_{n-1})=\Big[1-h\,D_x+\frac{h^2}{2}D_x{}^2-\frac{h^3}{6}D_x{}^3+\frac{h^4}{24}D_x{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(18)$$

$$v)\, f(x_1,y_n,z_n)=\Big[1+hD_y+hD_z+\frac{h^2}{2}D_y{}^2+\frac{h^2}{2}D_z{}^2+h^2D_yD_z+\frac{h^3}{6}D_y{}^3+\frac{h^3}{6}D_z{}^3+\frac{h^3}{2}D_y{}^2D_z+$$
$$\frac{h^3}{2}D_yD_z{}^2+\frac{h^4}{24}D_y{}^4+\frac{h^4}{24}D_z{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(19)$$

$$vi)\, f(x_1,y_n,z_{n-1})=\Big[1+hD_y+\frac{h^2}{2}D_y{}^2+\frac{h^3}{6}D_y{}^3+\frac{h^4}{24}D_y{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(20)$$

$$vii)\, f(x_1,y_{n-1},z_n)=\Big[1+hD_z+\frac{h^2}{2}D_z{}^2+\frac{h^3}{6}D_z{}^3+\frac{h^4}{24}D_z{}^4+\cdots]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(21)$$

بضرب الصيغ (15)،(16) ،(17)،(18) ،(19)، (20) ،(21) بـ $-\frac{h}{8}$ وجمعها مع الصيغة (7) نحصل على:

$$I_4=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\Big[\ f(x_0,y_{n-1},z_{n-1})+f(x_0,y_{n-1},z_n)+f(x_0,y_n,z_{n-1})+$$
$$f(x_0,y_n,z_n)+f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+f(x_1,y_{n-1},z_n)+f(x_1,y_n,z_{n-1})+f(x_n,y_{n-1},z_{n-1})\ \Big]+$$
$$\Big[h^5(\frac{-1}{12}D_x{}^2+\frac{-1}{12}D_y{}^2+\frac{-1}{12}D_z{}^2)+h^6(\frac{1}{24}D_x{}^3+\frac{-1}{24}D_y{}^3+\frac{-1}{24}D_z{}^3+\frac{-1}{24}D_x{}^2D_y+\frac{1}{24}D_xD_y{}^2+$$
$$\frac{-1}{24}D_x{}^2D_z+\frac{1}{24}D_xD_z{}^2+\frac{-1}{24}D_y{}^2D_z+\frac{-1}{24}D_z{}^2D_y)+h^7(\frac{-1}{80}D_x{}^4+\frac{-1}{80}D_y{}^4+\frac{-1}{80}D_z{}^4)+$$
$$\cdots\ \Big]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1}) \qquad \cdots(22)$$

التكامل الخامس: هلال[9].

$$I_5=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{k=0}^{n-2}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sum_{j=0}^{n-2}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{h^3}{8}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_j,z_k)+f(x_i,y_j,z_{k+1})+f(x_i,y_{j+1},z_k)+f(x_i,y_{j+1},z_{k+1})+f(x_{i+1},y_j,z_k)+$$
$$f(x_{i+1},y_j,z_{k+1})+f(x_{i+1},y_{j+1},z_k)+f(x_{i+1},y_{j+1},z_{k+1})]+d_1h^2+d_2h^4+\cdots \qquad \cdots(23)$$

التكامل السادس: هلال[9].

$$I_6=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1}[f(x_r,y_s,z_{n-1})+$$
$$f(x_r,y_s,z_n)+f(x_r,y_{s+1},z_{n-1})+f(x_r,y_{s+1},z_n)+f(x_{r+1},y_s,z_{n-1})+f(x_{r+1},y_s,z_n)+$$
$$f(x_{r+1},y_{s+1},z_{n-1})+f(x_{r+1},y_{s+1},z_n)]+e_1h^2+e_2h^4+\cdots \qquad \cdots(24)$$

التكامل السابع: هلال[9].

$$I_7=\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1}[f(x_r,y_{n-1},z_t)+$$
$$f(x_r,y_{n-1},z_{t+1})+f(x_r,y_n,z_t)+f(x_r,y_n,z_{t+1})+f(x_{r+1},y_{n-1},z_t)+f(x_{r+1},y_{n-1},z_{t+1})+$$
$$f(x_{r+1},y_n,z_t)+f(x_{r+1},y_n,z_{t+1})]+g_1h^2+g_2h^4+\cdots \qquad \cdots(25)$$

التكامل الثامن: هلال[9].

$$I_8=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{r=1}^{n-1} f(x_r,y_{n-1},z_{n-1})+$$
$$f(x_r,y_{n-1},z_n)+f(x_r,y_n,z_{n-1})+f(x_r,y_n,z_n)+f(x_{r+1},y_{n-1},z_{n-1})+f(x_{r+1},y_{n-1},z_n)+$$
$$f(x_{r+1},y_n,z_{n-1})+f(x_{r+1},y_n,z_n)]+h_1h^2+h_2h^4+\cdots \qquad \cdots(26)$$

حيث ان $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,g_i,h_i$ ثوابت و $(i=1,2,\cdots)$ تعتمد على قيم المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة لـ x،y،z وبجمع الصيغ(2)،(3)،(4)،(22)،(23)،(24)،(25)،(26)نحصل على:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\Bigg[\ f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_n)+f(x_0,y_n,z_0)+f(x_0,y_n,z_n)+$$

$$f(x_n,y_0,z_0)+f(x_n,y_0,z_n)+f(x_n,y_n,z_0)+f(x_n,y_n,z_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_0,y_0,z_j)+$$

$$f(x_0,y_n,z_j)+f(x_n,y_0,z_j)+f(x_n,y_n,z_j)+f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_n)+$$

$$f(x_n,y_j,z_0)+f(x_n,y_j,z_n)+f(x_j,y_0,z_0)+f(x_j,y_0,z_n)+f(x_j,y_n,z_0)+$$

$$f(x_j,y_n,z_n)+4\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}[\,f(x_i,y_0,z_k)+f(x_i,y_n,z_k)+f(x_i,y_k,z_0)+f(x_i,y_k,z_n)+$$

$$f(x_0,y_i,z_k)+f(x_n,y_i,z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j,z_k)\ \ ]\Bigg]+$$

$$\Bigg[h^5(\frac{-1}{12}D_x{}^2+\frac{-1}{12}D_y{}^2+\frac{-1}{12}D_z{}^2)+h^6(\frac{1}{24}D_x{}^3+\frac{-1}{24}D_y{}^3+\frac{-1}{24}D_z{}^3+$$

$$\frac{-1}{24}D_x{}^2D_y+\frac{1}{24}D_xD_y{}^2+\frac{-1}{24}D_x{}^2D_z+\frac{1}{24}D_xD_z{}^2+\frac{-1}{24}D_y{}^2D_z+\frac{-1}{24}D_yD_z{}^2)+$$

$$h^7(\frac{-1}{80}D_x{}^4+\frac{-1}{80}D_y{}^4+\frac{-1}{80}D_z{}^4)+\cdots\Bigg]f(x_1,y_{n-1},z_{n-1})+A_1h^2+A_2h^4+\cdots \qquad \cdots(27)$$

حيث أن $A_1, A_2,\cdots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط وبهذا تم البرهان.

وبنفس الطريقة يمكن اشتقاق القاعدة عندما تكون دالة المكامل معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطتين $\left(x_n,y_0,z_n\right)$ أو $\left(x_n,y_n,z_0\right)$.

الحالة الثانية: التكاملات الثلاثية ذات المكامل المستمر– معتل المشتقة في النقطة (x_n, y_0, z_0) باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الأبعاد (الداخلي x والأوسط y والخارجي z) (TTT).

مبرهنة:2

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[z_0, z_n]\times[y_0, y_n]\times[x_0, x_n]$ عدا النقطة $(x,y,z)=(x_n, y_0, z_0)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

يمكن حسابها بتطبيق القاعدة (TTT) من الصيغة الآتية :

$$\begin{aligned}TTT(h)=\frac{h^3}{8}\Big[\ & f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_n)+f(x_0,y_n,z_0)+f(x_0,y_n,z_n)+\\ & f(x_n,y_0,z_0)+f(x_n,y_0,z_n)+f(x_n,y_n,z_0)+f(x_n,y_n,z_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_0,y_0,z_j)+\\ & f(x_0,y_n,z_j)+f(x_n,y_0,z_j)+f(x_n,y_n,z_j)+f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_n)+\\ & f(x_n,y_j,z_0)+f(x_n,y_j,z_n)+f(x_j,y_0,z_0)+f(x_j,y_0,z_n)+f(x_j,y_n,z_0)+\\ & f(x_j,y_n,z_n)+4\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_0,z_k)+f(x_i,y_n,z_k)+f(x_i,y_k,z_0)+f(x_i,y_k,z_n)+\\ & f(x_0,y_i,z_k)+f(x_n,y_i,z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j,z_k)\ \ ]\Big]\end{aligned}$$

وإن صيغة الخطأ(حدود التصحيح)هي:

$$\begin{aligned}E_{TTT}(h)=\Big[&h^5(\frac{-1}{12}D_x^{\ 2}+\frac{-1}{12}D_y^{\ 2}+\frac{-1}{12}D_z^{\ 2})+h^6(\frac{-1}{24}D_x^{\ 3}+\frac{1}{24}D_y^{\ 3}+\frac{1}{24}D_z^{\ 3}+\\ &+\frac{1}{24}D_x^{\ 2}D_y+\frac{-1}{24}D_xD_y^{\ 2}+\frac{1}{24}D_x^{\ 2}D_z+\frac{-1}{24}D_xD_z^{\ 2}+\frac{1}{24}D_y^{\ 2}D_z+\frac{1}{24}D_yD_z^{\ 2})+\\ &h^7(\frac{-1}{80}D_x^{\ 4}+\frac{-1}{80}D_y^{\ 4}+\frac{-1}{80}D_z^{\ 4})+\cdots\Big]f(x_{n-1},y_1,z_1)\ +B_1h^2+B_2h^4+\cdots\end{aligned}$$

حيث $B_1, B_2, ...$ ثوابت تعتمد فقط على المشتقات الجزئية للدالة f فقط.

البرهان :

التكامل I يمكن تجزئته بالصورة الأتية :

$$\begin{aligned}I&=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz\\ &+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+\\ &\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz\end{aligned}\qquad\cdots(28)$$

عند ملاحظة التكاملات الثمانية اعلاه نرى انها جميعاً مستمرة في مناطق تكاملها ماعدا التكامل الخامس فيه الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة تحديداً في النقطة $(x,y,z)=(x_n,y_0,z_0)$ وهذا يعني أن متسلسلة تايلر موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $(x,y,z)=(x_n,y_0,z_0)$سستري[11]. وهنا سنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

التكامل الأول: هلال[9].

$$I_1=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{r=0}^{n-2}[f(x_r,y_0,z_0)+$$
$$f(x_r,y_0,z_1)+f(x_r,y_1,z_0)+f(x_r,y_1,z_1)+f(x_{r+1},y_0,z_0)+f(x_{r+1},y_0,z_1)+$$
$$f(x_{r+1},y_1,z_0)+f(x_{r+1},y_1,z_1)]+a_1h^2+a_2h^4+\cdots \qquad ...(29)$$

التكامل الثاني: هلال[9].

$$I_2=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-2}[f(x_r,y_0,z_t)+$$
$$f(x_r,y_0,z_{t+1})+f(x_r,y_1,z_t)+f(x_r,y_1,z_{t+1})+f(x_{r+1},y_0,z_t)+f(x_{r+1},y_0,z_{t+1})+$$
$$f(x_{r+1},y_1,z_t)+f(x_{r+1},y_1,z_{t+1})]+b_1h^2+b_2h^4+\cdots \qquad \cdots(30)$$

التكامل الثالث: هلال[9].

$$I_3=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-2}[f(x_r,y_s,z_0)+$$
$$f(x_r,y_s,z_1)+f(x_r,y_{s+1},z_0)+f(x_r,y_{s+1},z_1)+f(x_{r+1},y_s,z_0)+f(x_{r+1},y_s,z_1)+$$
$$f(x_{r+1},y_{s+1},z_0)+f(x_{r+1},y_{s+1},z_1)]+c_1h^2+c_2h^4+\cdots \qquad ...(31)$$

التكامل الرابع: هلال[9].

$$I_4=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{h^3}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-2}[f(x_r,y_s,z_t)+f(x_r,y_s,z_{t+1})+f(x_r,y_{s+1},z_t)+f(x_r,y_{s+1},z_{t+1})+f(x_{r+1},y_s,z_t)+$$
$$f(x_{r+1},y_s,z_{t+1})+f(x_{r+1},y_{s+1},z_t)+f(x_{r+1},y_{s+1},z_{t+1})]+d_1h^2+d_2h^4+\cdots \qquad ...(32)$$

التكامل الخامس: في المنطقة الجزئية $[x_{n-1},x_n]\times[y_0,y_1]\times[z_0,z_1]$ نستخدم متسلسلة تايلر للدالة $f(x,y,z)$ حول النقطة (x_{n-1},y_1,z_1):

$$f(x,y,z)=[1+(x-x_{n-1})D_x+(y-y_1)D_y+(z-z_1)D_z+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2!}{D_x}^2+\frac{(y-y_1)^2}{2!}{D_y}^2+$$
$$\frac{(z-z_1)^2}{2!}{D_z}^2+(x-x_{n-1})(y-y_1)D_xD_y+(x-x_{n-1})(z-z_1)D_xD_z+(y-y_1)(z-z_1)D_yD_z+$$
$$\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}{D_x}^3+\frac{(y-y_1)^3}{3!}{D_y}^3+\frac{(z-z_1)^3}{3!}{D_z}^3+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_1)}{2!}{D_x}^2D_y+$$
$$\frac{(x-x_{n-1})(y-y_1)^2}{2!}D_x{D_y}^2+\frac{(x-x_{n-1})^2(z-z_1)}{2!}{D_x}^2D_z+\frac{(x-x_{n-1})(z-z_1)^2}{2!}D_x{D_z}^2+$$
$$\frac{(y-y_1)^2(z-z_1)}{2!}{D_y}^2D_z+\frac{(y-y_1)(z-z_1)^2}{2!}D_y{D_Z}^2+(x-x_{n-1})(y-y_1)(z-z_1)D_xD_yD_z+$$
$$\frac{(x-x_{n-1})^4}{4!}{D_x}^4+\frac{(y-y_1)^4}{4!}{D_y}^4+\frac{(z-z_1)^4}{4!}{D_z}^4+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(33)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y,z\right)$ موجودة عند النقطة $\left(x_{n-1},y_1,z_1\right)$ وبأخذ التكامل الثلاثي للصيغة (33) في المنطقة $\left[x_{n-1},x_n\right]\times\left[y_0,y_1\right]\times\left[z_0,z_1\right]$ نحصل على :

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=[(x_n-x_{n-1})(y_1-y_0)(z_1-z_0)+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_1-y_0)(z_1-z_0)}{2}D_x$$
$$-\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^2(z_1-z_0)}{2}D_y-\frac{(x_n-x_{n-1})(y_1-y_0)(z_0-z_1)^2}{2}D_z+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_1-y_0)(z_1-z_0)}{6}D_x{}^2-\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^3(z_1-z_0)}{6}D_y{}^2-$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_1-y_0)(z_0-z_1)^3}{6}D_z{}^2-\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_0-y_1)^2(z_1-z_0)}{4}D_xD_y$$
$$-\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_1-y_0)(z_0-z_1)^2}{4}D_xD_z+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^2(z_0-z_1)^2}{4}D_yD_z$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^4(y_1-y_0)(z_1-z_0)}{24}D_x{}^3-\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^4(z_1-z_0)}{24}D_y{}^3-$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_1-y_0)(z_0-z_1)^4}{24}D_z{}^3-\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_0-y_1)^2(z_1-z_0)}{12}D_x{}^2D_y$$
$$-\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_0-y_1)^3(z_1-z_0)}{12}D_xD_y{}^2-\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_1-y_0)(z_0-z_1)^2}{12}D_x{}^2D_z$$
$$-\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_1-y_0)(z_0-z_1)^3}{12}D_xD_z{}^2+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^3(z_0-z_1)^2}{12}D_y{}^2D_z+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^2(z_0-z_1)^3}{12}D_yD_z{}^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_0-y_1)^2(z_0-z_1)^2}{8}D_xD_yD_z+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})^5(y_1-y_0)(z_1-z_0)}{120}D_x{}^4-\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^5(z_1-z_0)}{120}D_y{}^4-$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_1-y_0)(z_0-z_1)^5}{120}D_z{}^4+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(34)$$

وبالتعويض عن كل من (z_1-z_0) ، (y_1-y_0) ، (x_n-x_{n-1}) بـ h في الصيغة (34) نحصل على:

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=h^3+\frac{h^4}{2}D_x-\frac{h^4}{2}D_y-\frac{h^4}{2}D_z+\frac{h^5}{6}D_x{}^2+\frac{h^5}{6}D_y{}^2+\frac{h^5}{6}D_z{}^2-$$
$$\frac{h^5}{4}D_xD_y-\frac{h^5}{4}D_xD_z+\frac{h^5}{4}D_yD_z+\frac{h^6}{24}D_x{}^3-\frac{h^6}{24}D_y{}^3-\frac{h^6}{24}D_z{}^3-\frac{h^6}{12}D_x{}^2D_y+\frac{h^6}{12}D_xD_y{}^2-$$
$$\frac{h^6}{12}D_x{}^2D_z+\frac{h^6}{12}D_xD_z{}^2-\frac{h^6}{12}D_y{}^2D_z-\frac{h^6}{12}D_yD_z{}^2+\frac{h^6}{8}D_xD_yD_z+\frac{h^7}{120}D_x{}^4+\frac{h^7}{120}D_y{}^4+$$
$$\frac{h^7}{120}D_z{}^4+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(35)$$

ولإيجاد قاعدة شبه المنحرف على الأبعاد الثلاثة(الداخلي x والأوسط y والخارجي z) في المنطقة $\left[x_{n-1},x_n\right]\times\left[y_0,y_1\right]\times\left[z_0,z_1\right]$ نعوض عن x بـ x_n وعن y بـ y_0 وعن z بـ z_0 في الصيغة (33) فنحصل على:

$$f(x_n,y_0,z_0)=[1+(x_n-x_{n-1})D_x+(y_0-y_1)D_y+(z_0-z_1)D_z+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^{\,2}+$$
$$\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^{\,2}+\frac{(z_0-z_1)^2}{2!}D_z^{\,2}+(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)D_xD_y+(x_n-x_{n-1})(z_0-z_1)D_xD_z+$$
$$(y_0-y_1)(z_0-z_1)D_yD_z+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^{\,3}+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^{\,3}+\frac{(z_0-z_1)^3}{3!}D_z^{\,3}+$$

$$\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_0-y_1)}{2!}D_x^{\,2}D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^2}{2!}D_xD_y^{\,2}+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(z_0-z_1)}{2!}D_x^{\,2}D_z+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(z_0-z_1)^2}{2}D_xD_z^{\,2}+\frac{(y_0-y_1)^2(z_0-z_1)}{2}D_y^{\,2}D_z+\frac{(y_0-y_1)(z_0-z_1)^2}{2}D_yD_Z^{\,2}+$$
$$(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)(z_0-z_1)D_xD_yD_z+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{(y_0-y_1)^4}{24}D_y^{\,4}+\frac{(z_0-z_1)^4}{24}D_z^{\,4}+$$
$$\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad (36)$$

الآن نعوض عن x بـ x_n وعن y بـ y_0 وعن z بـ z_1 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_n,y_0,z_1)=[1+(x_n-x_{n-1})D_x+(y_0-y_1)D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^{\,2}+\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^{\,2}+$$
$$(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)D_xD_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^{\,3}+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^{\,3}+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_0-y_1)}{2!}D_x^{\,2}D_y+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_0-y_1)^2}{2!}D_xD_y^{\,2}+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{(y_0-y_1)^4}{24}D_y^{\,4}+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(37)$$

وبالتعويض عن x بـ x_n وعن y بـ y_1 وعن z بـ z_0 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_n,y_1,z_0)=[1+(x_n-x_{n-1})D_x+(z_0-z_1)D_z+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^{\,2}+\frac{(z_0-z_1)^2}{2!}D_z^{\,2}+$$
$$(x_n-x_{n-1})(z_0-z_1)D_xD_z+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^{\,3}+\frac{(z_0-z_1)^3}{3!}D_z^{\,3}+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(z_0-z_1)}{2!}D_x^{\,2}D_z+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(z_0-z_1)^2}{2}D_xD_z^{\,2}+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{(z_0-z_1)^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(38)$$

وكذلك بالتعويض عن x بـ x_n وعن y بـ y_1 وعن z بـ z_1 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_n,y_1,z_1)=[1+(x_n-x_{n-1})D_x+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^{\,2}+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^{\,3}+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{24}D_x^{\,4}+$$
$$\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(39)$$

وأيضاً بالتعويض عن x بـ x_{n-1} وعن y بـ y_0 وعن z بـ z_0 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_{n-1},y_0,z_0)=[1+(y_0-y_1)D_y+(z_0-z_1)D_z+\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^{\,2}+\frac{(z_0-z_1)^2}{2!}D_z^{\,2}+$$
$$(y_0-y_1)(z_0-z_1)D_yD_z+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^{\,3}+\frac{(z_0-z_1)^3}{3!}D_z^{\,3}+\frac{(y_0-y_1)^2(z_0-z_1)}{2}D_y^{\,2}D_z+$$
$$\frac{(y_0-y_1)(z_0-z_1)^2}{2}D_yD_Z^{\,2}+\frac{(y_0-y_1)^4}{24}D_y^{\,4}+\frac{(z_0-z_1)^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(40)$$

وبالتعويض عن x بـ x_{n-1} وعن y بـ y_0 وعن z بـ z_1 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_{n-1},y_0,z_1)=[1+(y_0-y_1)D_y+\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^{\,2}+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^{\,3}+\frac{(y_0-y_1)^4}{24}D_y^{\,4}+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(41)$$

وكذلك بالتعويض عن x بـ x_{n-1} وعن y بـ y_1 وعن z بـ z_0 في الصيغة (33) نجد أن:

$$f(x_{n-1},y_1,z_0)=[1+(z_0-z_1)D_z+\frac{(z_0-z_1)^2}{2!}D_z^{\,2}+\frac{(z_0-z_1)^3}{3!}D_z^{\,3}+\frac{(z_0-z_1)^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(42)$$

وأيضاً بالتعويض عن كل من (x_n-x_{n-1}) بـ h وعن (z_0-z_1) ، (y_0-y_1) بـ $-h$ في الصيغ (36)،(37)،(38)،(39)،(40)،(41)،(42) ينتج:

$$i)\ f(x_n,y_0,z_0)=\left[1+hD_x-hD_y-hD_z+\frac{h^2}{2}D_x^{\,2}+\frac{h^2}{2}D_y^{\,2}+\frac{h^2}{2}D_z^{\,2}-h^2D_xD_y-h^2D_xD_z+h^2D_yD_z+\frac{h^3}{6}D_x^{\,3}-\frac{h^3}{6}D_y^{\,3}-\frac{h^3}{6}D_z^{\,3}-\frac{h^3}{2}D_x^{\,2}D_y+\frac{h^3}{2}D_xD_y^{\,2}-\frac{h^3}{2}D_x^{\,2}D_z+\frac{h^3}{2}D_xD_z^{\,2}-\frac{h^3}{2}D_y^{\,2}D_z-\frac{h^3}{2}D_yD_z^{\,2}+h^3D_xD_yD_z+\frac{h^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{h^4}{24}D_y^{\,4}+\frac{h^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(43)$$

$$ii)\ f(x_n,y_0,z_1)=\left[1+hD_x-hD_y+\frac{h^2}{2}D_x^{\,2}+\frac{h^2}{2}D_y^{\,2}-h^2D_xD_y+\frac{h^3}{6}D_x^{\,3}-\frac{h^3}{6}D_y^{\,3}-\frac{h^3}{2}D_x^{\,2}D_y+\frac{h^3}{2}D_xD_y^{\,2}+\frac{h^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{h^4}{24}D_y^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(44)$$

$$iii)\ f(x_n,y_1,z_0)=\left[1+hD_x-hD_z+\frac{h^2}{2}D_x^{\,2}+\frac{h^2}{2}D_z^{\,2}-h^2D_xD_z+\frac{h^3}{6}D_x^{\,3}-\frac{h^3}{6}D_z^{\,3}-\frac{h^3}{2}D_x^{\,2}D_z+\frac{h^3}{2}D_xD_z^{\,2}+\frac{h^4}{24}D_x^{\,4}+\frac{h^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(45)$$

$$iv)\ f(x_n,y_1,z_1)=\left[1+hD_x+\frac{h^2}{2}D_x^{\,2}+\frac{h^3}{6}D_x^{\,3}+\frac{h^4}{24}D_x^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(46)$$

$$v)\ f(x_{n-1},y_0,z_0)=\left[1-hD_y-hD_z+\frac{h^2}{2}D_y^{\,2}+\frac{h^2}{2}D_z^{\,2}+h^2D_yD_z-\frac{h^3}{6}D_y^{\,3}-\frac{h^3}{6}D_z^{\,3}-\frac{h^3}{2}D_y^{\,2}D_z-\frac{h^3}{2}D_yD_z^{\,2}+\frac{h^4}{24}D_y^{\,4}+\frac{h^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(47)$$

$$vi)\ f(x_{n-1},y_0,z_1)=\left[1-hD_y+\frac{h^2}{2}D_y^{\,2}-\frac{h^3}{6}D_y^{\,3}+\frac{h^4}{24}D_y^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(48)$$

$$vii)\ f(x_{n-1},y_1,z_0)=\left[1-hD_z+\frac{h^2}{2}D_z^{\,2}-\frac{h^3}{6}D_z^{\,3}+\frac{h^4}{24}D_z^{\,4}+\cdots\right]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(49)$$

بضرب الصيغ (43)،(44)،(45)،(46)،(47)،(48)،(49)بـ $-\frac{h}{8}$ وجمعها مع الصيغة(35)نحصل على:

$$I_5=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\Big[f(x_{n-1},y_0,z_0)+f(x_{n-1},y_0,z_1)+f(x_{n-1},y_1,z_0)+f(x_{n-1},y_1,z_1)+$$
$$f(x_n,y_0,z_0)+f(x_n,y_0,z_1)+f(x_n,y_1,z_0)+f(x_n,y_1,z_1)\Big]+$$
$$\Big[h^5(\frac{-1}{12}D_x{}^2+\frac{-1}{12}D_y{}^2+\frac{-1}{12}D_z{}^2)+h^6(\frac{-1}{24}D_x{}^3+\frac{1}{24}D_y{}^3+\frac{1}{24}D_z{}^3+\frac{1}{24}D_x{}^2D_y+\frac{-1}{24}D_xD_y{}^2+$$
$$\frac{1}{24}D_x{}^2D_z+\frac{-1}{24}D_xD_z{}^2+\frac{1}{24}D_y{}^2D_z+\frac{1}{24}D_yD_z{}^2)+h^7(\frac{-1}{80}D_x{}^4+\frac{-1}{80}D_y{}^4+\frac{-1}{80}D_z{}^4)+$$
$$\cdots\Big]f(x_{n-1},y_1,z_1) \qquad \cdots(50)$$

التكامل السادس: هلال[9].

$$I_6=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=1}^{n-1}[(f(x_{n-1},y_0,z_t)+$$
$$f(x_{n-1},y_0,z_{t+1})+f(x_{n-1},y_1,z_t)+f(x_{n-1},y_1,z_{t+1})+f(x_n,y_0,z_t)+f(x_n,y_0,z_{t+1})+$$
$$f(x_n,y_1,z_t)+f(x_n,y_1,z_{t+1})]+$$
$$e_1h^2+e_2h^4+\cdots \qquad ...(51)$$

التكامل السابع: هلال[9].

$$I_7=\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_1}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{s=1}^{n-1}[f(x_{n-1},y_s,z_0)+$$
$$f(x_{n-1},y_s,z_1)+f(x_{n-1},y_{s+1},z_0)+f(x_{n-1},y_{s+1},z_1)+f(x_n,y_s,z_0)+f(x_n,y_s,z_1)+$$
$$f(x_n,y_{s+1},z_0)+f(x_n,y_{s+1},z_1)]+g_1h^2+g_2h^4+ \qquad \cdots(52)$$

التكامل الثامن: هلال[9].

$$I_8=\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=1}^{n-1}\int_{z_t}^{z_{t+1}}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}[f(x_{n-1},y_s,z_t)+$$
$$f(x_{n-1},y_s,z_{t+1})+f(x_{n-1},y_{s+1},z_t)+f(x_{n-1},y_{s+1},z_{t+1})+f(x_n,y_s,z_t)+f(x_n,y_s,z_{t+1})+$$
$$f(x_n,y_{s+1},z_t)+f(x_n,y_{s+1},z_{t+1})]+h_1h^2+h_2h^4+\cdots \qquad \cdots(53)$$

حيث ان $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,g_i,h_i$ ثوابت و $(i=1,2,\cdots)$ تعتمد على قيم المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة لـ z،y،x وبجمع الصيغ (29)،(30)،(31)،(50)،(51)،(52)،(53) نحصل على :

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{8}\Big[\ f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_n)+f(x_0,y_n,z_0)+f(x_0,y_n,z_n)+$$
$$f(x_n,y_0,z_0)+f(x_n,y_0,z_n)+f(x_n,y_n,z_0)+f(x_n,y_n,z_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_0,y_0,z_j)+$$
$$f(x_0,y_n,z_j)+f(x_n,y_0,z_j)+f(x_n,y_n,z_j)+f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_n)+$$
$$f(x_n,y_j,z_0)+f(x_n,y_j,z_n)+f(x_j,y_0,z_0)+f(x_j,y_0,z_n)+f(x_j,y_n,z_0)+$$
$$f(x_j,y_n,z_n)+4\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_0,z_k)+f(x_i,y_n,z_k)+f(x_i,y_k,z_0)+f(x_i,y_k,z_n)+$$
$$f(x_0,y_i,z_k)+f(x_n,y_i,z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j,z_k)\ \Big]\Big]+$$
$$\Big[h^5(\frac{-1}{12}D_x^{\ 2}+\frac{-1}{12}D_y^{\ 2}+\frac{-1}{12}D_z^{\ 2})+h^6(\frac{-1}{24}D_x^{\ 3}+\frac{1}{24}D_y^{\ 3}+\frac{1}{24}D_z^{\ 3}+$$
$$\frac{1}{24}D_x^{\ 2}D_y+\frac{-1}{24}D_xD_y^{\ 2}+\frac{1}{24}D_x^{\ 2}D_z+\frac{-1}{24}D_xD_z^{\ 2}+\frac{1}{24}D_y^{\ 2}D_z+\frac{1}{24}D_yD_z^{\ 2})+$$
$$h^7(\frac{-1}{80}D_x^{\ 4}+\frac{-1}{80}D_y^{\ 4}+\frac{-1}{80}D_z^{\ 4})+\cdots\Big]f(x_{n-1},y_1,z_1)+B_1h^2+B_2h^4+\cdots \qquad \cdots(54)$$

حيث أن $B_1,B_2,\cdots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط وبهذا تم البرهان.
كذلك يمكننا بنفس الطريقة اشتقاق القواعد التي تكون فيها دالة المكامل مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطتين (x_0,y_n,z_0) أو (x_0,y_0,z_n).

3. الأمثلة

-1 إن مكامل التكامل $I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}-xz\sqrt[3]{x^2+z^2-y+1}\ dxdydz$ مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y,z)=(0,1,0)$ ونوع الاعتلال جذري وإن قيمته التحليلية 0.28211705037698 مقربة الى أربعة عشر مرتبة عشرية. وبتطبيق القاعدة TTT كانت حدود التصحيح $E(h)=a_1h^2+a_2h^4+a_3h^{\frac{16}{3}}+a_4h^6+a_5h^{\frac{19}{3}}+\ldots$ عند تطبيق المبرهنة(1) وإن القيمة بطريقة TTT صحيحة لست مراتب عشرية بعد الفاصلة عندما $m=n_1=n=256$ وبعد استعمال تعجيل رومبرك على النتائج المحصل عليها وباعتماد حدود التصحيح التي حصلنا عليها حصلنا على قيمة صحيحة لإحدى عشر مرتبة عشرية بعد الفاصلة عندما $m=n_1=n=256$ ، النتائج مدونة في الجدول رقم(1).علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(48.38 ثانية).

m=n=n1	TTT	K=2	K=4	K=16/3	K=6	K=19/3	K=22/3	K=8	K=25/3
1	0.33777132752529								
2	0.29610099403009	0.28221088286503							
4	0.28558850662810	0.28208434416077	0.28207590824715						
8	0.28298251816969	0.28211385535022	0.28211582276285	0.28211683794800					
16	0.28233321785898	0.28211678442208	0.28211697969354	0.28211700911889	0.28211701183589				
32	0.28217107592170	0.28211702860927	0.28211704488842	0.28211704654658	0.28211704714068	0.28211704758401			
64	0.28213055540301	0.28211704856344	0.28211704989372	0.28211705002103	0.28211705007618	0.28211705011304	0.28211705012882		
128	0.28212042651675	0.28211705022133	0.28211705033185	0.28211705034300	0.28211705034811	0.28211705035152	0.28211705035301	0.28211705035389	
256	0.28211789440159	0.28211705036320	0.28211705037266	0.28211705037370	0.28211705037418	0.28211705037451	0.28211705037465	0.28211705037474	0.28211705037480
الجدول رقم(1) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}-xz\sqrt[3]{x^2+z^2-y+1}\ dxdydz$ بطريقة $RTTT$.									0.28211705037698

-2 إن مكامل التكامل $I=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\frac{-xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$ معتل في النقطة $(x,y,z)=(0,0,0)$ ونوع الاعتلال جذري وإن قيمته التحليلية 0.10785963464284 مقربة الى أربعة عشر مرتبة عشرية بعد الفاصلة. وبتطبيق القاعدة TTT كانت حدود التصحيح $E(h)=a_1h^2+a_2h^4+a_3h^5+a_4h^6+\ldots$ عند تطبيق المبرهنة (2) وحسب اقتراح دافيز ورابينوتز[3] كانت القيمة بطريقة TTT مطابقة لأربع مراتب عشرية عندما $m=n_1=n=64$ وبعد استعمال تعجيل رومبرك على النتائج المحصل عليها وباعتماد حدود التصحيح التي حصلنا عليها حصلنا على قيمة صحيحة لثلاثة عشر مرتبة عشرية صحيحة عندما $m=n_1=n=64$ النتائج مدونة في الجدول رقم(2).علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (32.94 ثانية).

m=n=n1	TTT	K=2	K=4	K=5	K=6	K=8	K=10
1	0.07216878364870						
2	0.09658657109925	0.10472583358277					
4	0.10489572791344	0.10766544685150	0.10786142106942				
8	0.10710967493295	0.10784765727279	0.10785980463420	0.10785975249113			
16	0.10767158565447	0.10785888922831	0.10785963802535	0.10785963265087	0.10785963074864		
32	0.10781258751251	0.10785958813186	0.10785963472543	0.10785963461898	0.10785963465022	0.10785963466552	
64	0.10784787068163	0.10785963173801	0.10785963464508	0.10785963464249	0.10785963464287	0.10785963464284	0.10785963464281
الجدول رقم(2) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1 \frac{-xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$ بطريقة $RTTT$.							0.10785963464284

3-إن التكامل $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ من التكاملات التي ليس لها قيمة تحليلية وكذلك فإن المكامل معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y,z)=(1,0,0)$ ونوع اعتلاله جذري وبتطبيق القاعدة TTT تكون حدود التصحيح $E(h)=a_1h^2+a_2h^4+a_3h^6+\ldots$ على الرغم من وجود الاعتلال والذي يمثل تطبيقاً للمبرهنة (2) وأنه عند استخدام برنامج الماتلاب حصلنا على دقة لغاية (14) مرتبة عشرية بعد الفاصلة عندما $m=n_1=n=64$ ولبيان كيفية الحصول على هذه الدقة نلاحظ من الجدول أن العدد نفسه تكرر في الأعمدة الأربعة الأخيرة أي أن القيمة تكررت عندما كانت (k=6,8,10,12) باستخدام الطريقة $RTTT$ هذا يعني أن القيمة التحليلية التقريبية لهذا التكامل هي 0.96059195645511 أي أنها صحيحة على الأقل لأربعة عشر مرتبة عشرية حتى وإن كان التكامل غير معروف القيمة التحليلية وكما موضح في الجدول رقم(3). علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (35.67 ثانية).

$m=n_1=n$	TTT	k=2	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12
1	1.12183643683602						
2	1.00783628782656	0.96983623815674					
4	0.97284210149518	0.96117737271805	0.96060011502214				
8	0.96368188818831	0.96062848375268	0.96059189115499	0.96059176061742			
16	0.96136615081684	0.96059423835969	0.96059195533349	0.96059195635220	0.96059195711978		
32	0.96078561199729	0.96059209905744	0.96059195643729	0.96059195645481	0.96059195645521	0.96059195645456	
64	0.96064037702494	0.96059196536749	0.96059195645483	0.96059195645511	0.96059195645511	0.96059195645511	0.96059195645511

الجدول رقم (3) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ بطريقة $RTTT$.

4.المناقشة :

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل بقاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاثة x ، y ،z وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الاوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة TTT قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التقريبية الصحيحة للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استخدام تعجيل رومبرك عليها ،على سبيل المثال في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لستة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 256$ وفي التكامل الثاني القيمة صحيحة لأربعة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ وفي التكامل الثالث كانت القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 64$.

إلا إنه عند استخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب مقارنة مع قيم التكاملات التحليلية أذ كانت مطابقة للقيمة التحليلية في التكامل الأول لإحدى عشر مرتبة عشرية بعد الفاصلة عندما $m = n_1 = n_2 = 256$ وفي التكامل الثاني لثلاثة عشر مرتبة عشرية بعد الفاصلة عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ ، وفي التكامل الثالث عندما $m = n = 64$ كانت النتيجة دقيقة لأربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة $RTTT$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp.87-93,1967.

[2] Hans Schjar and Jacobsen,"Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function",The Technical University of Denmark Lyngby,pp.1-12 ,1973

[3] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company, pp. 1-2 ,599,113, chapter 5,1975.

[4] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , pp 5-7 , 2008.

[5] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[6] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010 .

[7]ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

[8] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988.

[9]هلال ، رنا حسن ،"اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي النقطة الوسطى وشبه المنحرف وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عددياً وتحسين باستخدام طرائق تعجلية" ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2013 .