تحسين طريقة بول باستخدام التجزئة والعمليات المتوازية للتكامل العددي

صهيب عبد الجبار عبد الباقي
قسم علوم الحاسوب / كلية التربية
جامعة الموصل

القبول	**الاستلام**
2011 / 09 / 15	**2011 / 05 / 17**

Abstract

The objective of this paper is to develop a parallel Pole numerical integration method suitable for renaming in MIMD computing systems.
In this paper we improve the Pole Method for numerical integration by partitioning and parallel processing .we compared the developed methods with initial methods the comparison showed the supervise the developed Method for the initial method.
The developed methods are suitable fof running on MIMD computing systems.

الملخص

هدف البحث هو تطوير طرائق متوازية لطريقة بول للتكامل العددي Pole Integration Methods والتي تستعمل في التكامل العددي لحل الدوال.

تم في هذا البحث تطوير طريقة بول للتكامل العددي باستخدام أسلوب التجزئة وعمليات التوازي. إذ تمت مقارنة الطرائق المطورة مع الطريقة الأصلية لبول، إذ أثبتت هذه المقارنة تفوق الطرائق المطورة على طريقة بول الأصلية. الطرائق المطورة ملائمة للتنفيذ لأجهزة حواسيب من نوع MIMD .

وعلى العموم أظهرت النتائج العملية والبرمجيات الحاسوبية المقترحة للخوارزميتين الجديدتين بأنهما أفضل من مثيلاتها التي تنفذ على الطريقة الاعتيادية أي طريقة بول للتكامل العددي (Pole Integration Methods).

1- مقدمة:

يعد حسبان التكامل من المسائل البالغة الأهمية في علوم الرياضيات وتطبيقاته المختلفة. ومن المسائل التي لاقت اهتمامات كبيرة لدى الباحثين حسبان التكامل العددي الذي يستخدم عادة عندما يصعب إيجاد القيم المضبوطة للتكامل. ويعرف التكامل العددي بأنه دراسة سبل إيجاد القيم العددية للتكاملات. ولقد أشار الباحثان [1] إلى أن التكامل العددي بسيط وصعب في نفس الوقت، فهو أسلوب بسيط إذ انه يستطيع إيجاد الحل العددي بنجاح، وهو أسلوب صعب قد يحتاج إلى المزيد من الوقت والى المزيد من المعرفة العلمية الواسعة في مواضيع التحليل الصرف والتطبيقي.

درس (2000 عبدالحبيب عبدالله احمد) تطوير وإيجاد خوارزميات عددية متوازية جديدة لحل أنظمة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية الجافة، كما تم اشتقاق طرائق رنج-كوتا الضمنية الجزئية التوازي [4].

ودرس (2006 مثنى صبحي سليمان) التكامل العددي باستخدام طرائق المونت كارلو وأساليب تقليص التباين [6].

و درس (2010 أ.د. بشير محمد صالح خلف و محمد واجد النعمة) طرائق البحث المباشرة المتوازية هو تطوير خوارزميات متوازية لإيجاد اقل أو أكبر قيمة للدوال التي تحتاج حساب قيمها وقت طويل، وأساس هذا التطوير هو إيجاد قيمة دالة الهدف في نقاط مختلفة في آن واحد. (2010) [10].

كما درس (2010 بتول حاتم عكَار) بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية هو إيجاد قيم التكاملات الثنائية والثلاثية الأبعاد عدديا. التي مكاملاتها مستمرة او معتلة المشتقة الجزئية او معتلة في نقطة واحدة أو أكثر من مناطق التكامل، وإيجاد صيغة عامة لصيغ الخطأ حسب سلوك المكامل بأسلوب جديد [2].

ولقد لخص الباحثون [5] مبررات استخدام طرائق التكامل العددي بالنقاط الآتية:

يتم اللجوء إلى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحيانا استحالة في إيجاد قيمة التكامل للدالة بالطرائق التحليلية المعتادة على سبيل المثال:

$$\int e^{x^2} dx \quad , \int \sqrt{\sin x}\, dx \quad , \int \frac{1}{2+\cos x} dx$$

عندما يمكن إيجاد التكامل التحليلي للدالة ولكن النتائج تكون معقدة للغاية وحسابها يستغرق وقتا طويلا.

عندما تكون الدالة معرفة بشكل جداول من القيم مثل جدول قراءات مختبريه لتجربة معينة وكما هو الحال في الجدول الأتي لبيان سرعة جسم ساقط مع الزمن:

جدول (1): مثال قراءة مختبرية لتجربة معينة

السرعة	الزمن
2.443	0.1
3.446	0.2
4.004	0.3
.	.
.	.
10.230	1.0
12.006	1.2

فعند حساب المسافة المقطوعة من قبل الجسم يجب حساب تكامل السرعة مع الزمن هكذا:

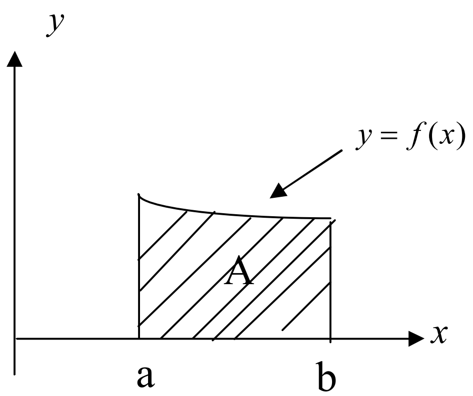
$$\textbf{i.e}\quad v = \frac{ds}{dt} \quad \text{or} \quad s = \int v\,dt$$

وهنا نجد أن السرعة معرفة في الجدول(1) أعلاه.

ومن المعلوم أن معظم هذه المعادلات تأخذ وقتا طويلا للتنفيذ عند استخدام الطرائق الاعتيادية أو عند استخدام حاسبات ذات معالج تتابعي، فلهذا السبب كان هدف البحث هو إيجاد طرائق جديدة لتقليل وقت التنفيذ بالإضافة إلى زيادة كفاءة الطريقة **[12]، [8]**.

2- طريقة بول:

من التطبيقات الشائعة للطرائق العددية هو استعمالها في حساب التكامل المحدد أو ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات كما هو مبين في الشكل (1):



شكل(1): حساب التكامل العددي

أي أن :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{............ (1)}$$

1-2 اشتقاق الطريقة:

نستعمل أولا صيغة نيوتن التقدمية للاندراج وتكاملها على الفترة $[x_0,x_4]$ (الفترة $[0,4]$ بالنسبة إلى t) فنحصل على

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = h\int_0^4\Big[f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 f_0 + \ldots\ldots\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]_0^4 \quad \ldots\ldots(3)$$

في المتسلسلة اللامنتهية (3) إذا أهملت الحدود في الفروقات الخامسة وما بعدها نحصل على الصيغة:-

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وهي صيغة بول للتكامل العددي.[3],[5]،[12]

2-2 - مثال:- باستخدام طريقة بول جد التكامل العددي لـ $\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{x^4 dx}$

الحل:

$$I = \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{5} \quad ,n = 4\ ,\ h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(x_0) = f(0) = 0\ ,f(x_1) = f(0.25) = 0.0039\ ,f(x_2) = f(0.5) = 0.0625$$

$$f(x_3) = f(0.75) = 0.316\ ,f(x_4) = f(1) = 1$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx &= \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]\\ &= \frac{2}{45}\times\frac{1}{4}\left[7(0) + 32(0.0039) + 12(0.0625) + 32(0.316) + 7(1)\right]\\ &= 0.2\end{aligned}$$

3- الطريقة الجديدة الأولى: (طريقة التجزئة)

تتضمن هذه الطريقة القيام بتجزئة فترة التكامل إلى عدة فترات (n فترة) متساوية البعد حيث يتم تطبيق طريقة بول للتكامل على كل فترة ومن ثم يتم جمع نتائج التكامل لكل فترة، أي

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_i + \dots + I_n \qquad (5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=a+0h}^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+3h} f(x)dx + \dots + \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx + \dots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh=b} f(x)dx \qquad (6)$$

حيث أن:

$$I_i = \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

حيث تم تطبيق الطريقة الجديدة على عدد من الأمثلة وكانت النتائج كما هي موضحة في الجدول(2):

جدول (2): حل بعض الأمثلة لبيان مدى فعالية الخوارزمية المقترحة

الدالة	حدود التكامل P	Exact solution	الحل العددي	مقدار الخطأ	الزمن	عدد فترات التجزئة
$\frac{11}{10}\sqrt[10]{x}$	(0,1)	1	0.942902241	0.057097759	0.016	1
			0.973362682	0.026637318	0.016	2
			0.995464515	0.004535485	0.015	10
			1.00E+00	3.60E-04	9.40E-02	1.00E+02
$\frac{1}{x^2+1}$	(1,2)	0.32175	0.321744841	5.15947E-06	0.016	1
			0.321750435	4.3474E-07	0.015	2
			0.321750554	5.54389E-07	0.015	10
			3.22E-01	5.54E-07	1.60E-02	1.00E+02
$\frac{1}{2x^2+2x}$	(1,2)	0.143841	0.143854417	1.34172E-05	0.015	1
			0.14384139	3.90342E-07	0.016	2
			0.143841036	3.62556E-08	0.015	10
			1.44E-01	3.62E-08	2.19E-01	1.00E+02
$\sin^7 x$	$(0,\pi/2)$	16/35	0.462230519	0.005087661	0.016	1
			0.457251963	0.000109106	0.016	2
			0.457142857	3.35E-11	0.016	10
			4.57E-01	0.00E+00	3.20E-02	1.00E+02
$8\cos^4 2\pi x$	(0,1)	3	2.311111111	0.688888889	0.016	1
			2.666666667	0.333333333	0.016	2
			3	0	0.015	10
			3.00E+00	0.00E+00	1.60E-02	1.00E+02
$8\sin^4 x\cos^2 x$	$(0,\pi)$	$\pi/2$	2.234021443	0.663225116	0.015	1
			1.535889742	0.034906585	0.015	2
			1.570796327	0	0.016	10
			1.57E+00	0.00E+00	3.20E-02	1.00E+02
$\sin 3x \sin 3x$	$(\pi,-\pi)$	π	4.468042885	1.326450232	0.015	1
			3.071779484	0.06981317	0.015	2
			3.141592654	0	0.015	10
			3.14E+00	0.00E+00	3.10E-02	1.00E+02

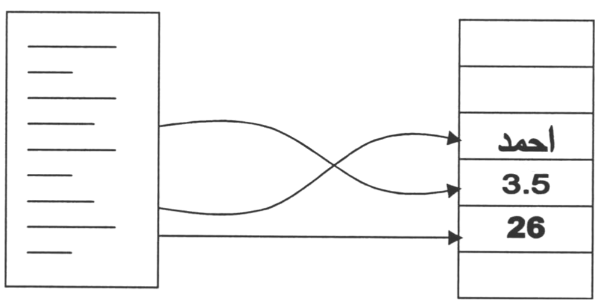
عدد فترات التجزئة	الزمن	مقدار الخطأ	الحل العددي	Exact solution	حدود التكامل P	الدالة
1	0.015	0.013880085	0.707027085	0.693147	$(-\pi/4, \pi/4)$	$\sqrt{\sec^2 x - 1}$
2	0.016	5.37079E-05	0.693200708			
10	0.015	1.87856E-07	0.693147188			
1.00E+02	1.60E-02	1.81E-07	6.93E-01			
1	0.016	0.002858536	3.997141464	4	$(0, 2\pi)$	$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
2	0	3.37381E-05	3.999966262			
10	0	1.99345E-09	3.999999998			
1.00E+02	3.20E-02	0.00E+00	4.00E+00			
1	0.015	0.001293764	1.764040764	1.762747	$(-\pi/4, \pi/4)$	$\sqrt{1+\tan^2 x}$
2	0	5.63343E-05	1.762803334			
10	0.016	1.81557E-07	1.762747182			
1.00E+02	1.50E-02	1.74E-07	1.76E+00			
1	0	4.31648E-06	0.133978316	0.133974	(1,3/2)	$\frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}$
2	0	6.89077E-07	0.133974689			
10	0.016	5.96223E-07	0.133974596			
1.00E+02	1.60E-02	5.96E-07	1.34E-01			

4- التوازي في طريقة بول للتكامل العددي:

سنناقش في هذا البند دراسة موضوع التوازي لطريقة بول للتكامل العددي وسوف نتكلم بصورة موجزة عن الحاسبات المتوازية.

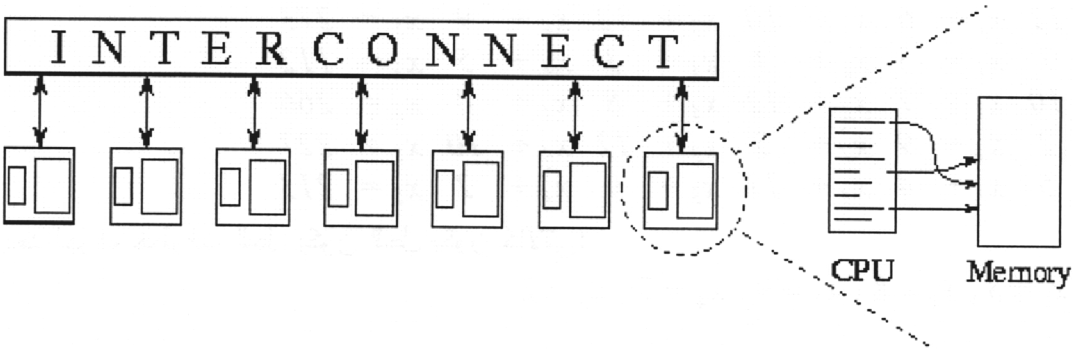
4-1- الحاسبات المتوازية:

يعود الفضل للتقدم السريع في صناعة الحاسبات ودخولها مجالات عدة مثل التجارة والعلوم والتعليم لنموذج الحاسبة الأولى (Single Machine Model) لحاسبات Von Neuman وكما هو معروف فان هذه الحاسبات تمتلك وحدة معالجة مركزية واحدة (CPU) مرتبطة بوحدة خزن (Memory) (شكل 2) وان المعالج يقوم بتنفيذ برنامج مخزون والذي يحدد بواسطة مجموعة متسلسلة من علميات القراءة والكتابة على الذاكرة [14].



شكل(2): حاسبة Von Neuman تقوم على وحدة معالجة مركزية(cpu) بانجاز البرنامج الذي ينفذ بشكل تسلسلي لعمليات القراءة والكتابة على الذاكرة المحجوزة[14]

بينما في الحاسبات المتوازية فهو إيجاد نموذج متوازي يتكون من عدد من حاسبات Von Neuman (شكل 3) يكون عاماً لكثير من التطبيقات وان تمتلك الحاسبة المتوازية ميزتين أساسيتين هما (البساطة والواقعية)، والبساطة تعني إمكانية فهم الحاسبة والبرمجة لها، والواقعية هي ضمان تنفيذ النماذج البرمجية لها بكفاءة معقولة **[13]**.



شكل (3): نموذج حاسبة متوازية مثالية ،تحتوي كل نقطة ارتباط على حاسبة من نوع Von Neuman ، ويمكن لكل نقطة الاتصال بالنقاط الاخرى عن طريق ارسال واستقبال الرسائل عبر الشبكة المربوطة

4-2- تعاريف:

4-2-1- **الحاسوب المتوازي:** هو مجموعة من المعالجات التي بإمكانها العمل بصورة متوازية او تعاونية (Cooperatively) لحل مسألة حسابية ما وهذا التعريف يشمل الحاسبات المتوازية التي تمتلك عشرات او مئآت من المعالجات(processers). أو هو حاسوب يستخدم عدة معالجات تعمل بشكل متزامن (أي تعمل في الوقت نفسه) لحل مسألة او لأداء وظيفة معينة [7]، [13].

4-2-2- الخوارزميات المتوازية:

الخوارزمية: هي مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مصممة بشكل يؤدي الى حل المسألة المعطاة.[1],[5]

وعليه فمن الممكن تعريف الخوارزمية المتوازية: عبارة عن تجزئة مسألة واحدة الى عدة مسائل جزئية مستقلة حتى يمكن حل كل مسألة جزئية في معالج مستقل ثم جمع الحلول لتركيب حل المسألة الأصلية [9].

4-2-3- قياس وحساب الوقت: تقاس القدرة الحسابية للحاسوب بعدد العمليات التي ينفذها بالثانية على الأعداد الحقيقية (flooating point operation per second) MEGA FLOPS ، وتتطلب التطبيقات الحسابية قدرة حسابية من درجة الف مليون عملية في الثانية،

لقد وصلت الحاسبات الفائقة في عام 2003 إلى 35TEFLOPS وهو ما يقارب 36.5 تريليون عملية في كل ثانية. ومن اجل تحسين الأداء يجب تقصير زمن دورة المعالج للعملية الواحدة وزيادة العمليات التي تنفذ على التوازي، ولكن تسريع المعالجات لا يكفي إذا لم يصاحب القدرة على نقل المعلومات من الذاكرة إلى وحدة المعالجة بالسرعة الكافية وتقاس هذه القدرة بعدد البايتات Bytes التي يمكن نقلها من الذاكرة إلى وحدة المعالجة في الثانية [4].

ملاحظة مهمة:

إن حاسبات من نوع (MIMD) غير متوفرة في بلادنا، فلذلك تم تنفيذ كل إجراء على حدا وحساب الوقت، ويكون الوقت الأكبر هو الوقت المعتمد في حساب تنفيذ الإجراءات المتوازية، وهذا ممكن إذ أن المعالج المستخدم في الحاسبات المتوازية هو المعالج نفسه المستخدم في الحاسبات الشخصية، كما توصل إليه الباحث Y.F.Fung,et al في دراسته إذ اثبت انه بإمكان الطلاب استخدام حاسباتهم الشخصية لتنفيذ ومعالجة البرامج والخوارزميات المتوازية وذلك بسبب ارتفاع كلفة الحاسبات ذات المعالجات المتعددة [14].

4-2-4- التسريع (S_p):

هو حاصل قسمة الزمن التسلسلي (t_s) على الزمن المتوازي (t_p) أي أن $S_p = \frac{t_s}{t_p}$.

3-3- تصنيف الحاسبات المتوازية:

يعمل أي نوع من أنواع الحاسبات (حاسبات تسلسلية كانت أم متوازية) على تنفيذ مجموعة من الايعازات (Instruction) على مجموعة من البيانات (Data) ومن ثم يتم معالجتها وإخراجها على شكل معلومات[9].

وهناك تصانيف عدة لمعمارية الحاسبات، من أشهر هذه التصانيف (تصنيف الباحث Flynn) [11]، فقد صنف أنظمة بحسب نوع التحكم (Type of control) والخوارزميات (Algorithms) والمعالجات المنطقية (Logical Processors) غالى أربعة أصناف رئيسة [9],[4] هي:

1. معالجات ذات إيعاز فردي وبيانات جارية فردية (SISD)

Single Instruction Stream, Single Data Stream.

2. معالجات ذات ايعازات متعددة وبيانات جارية مفردة.(MISD)

Multiple Instruction Stream, Single Data Stream.

3. معالجات ذات إيعاز فردي وبيانات جارية متعددة.(SIMD)

Single Instruction Stream, Multiple Data Stream.

4. معالجات ذات ايعازات متعددة وبيانات جارية متعددة.(MIMD)

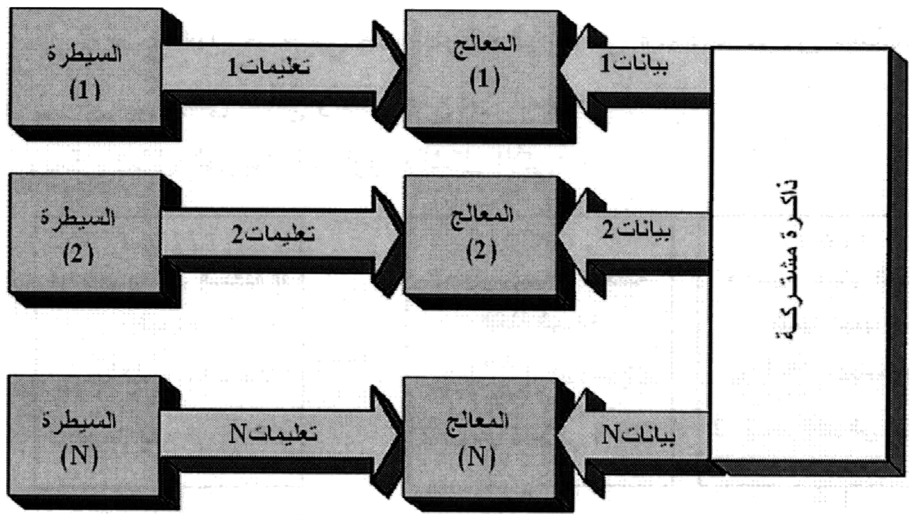
Multiple Instruction Stream, Multiple Data Stream.

وهدفنا من البحث هو تطوير طرائق متوازية ملائمة للتنفيذ على حاسبات من نوع MIMD ولهذا سوف نقتصر الحديث عنها:

3-4- حاسبات من نوع MIMD [9]:

يعد هذا النوع من الحاسبات الأكثر شيوعا وكفاءة وقوة في تنفيذ التطبيقات العامة في موضوع الحاسبات المتوازية اذ تكون فيها مجموعة الايعازات ومجموعة البيانات مختلفة.

يحتوي هذا النوع من الحاسبات على (N) من المعالجات وعلى (N) من الايعازات وعلى (N) من البيانات شكل (3). ويمتلك كل معالج ذاكرة خاصة به فضلاً عن وحدة الحساب والمنطق ووحدة السيطرة الخاصة به، وله القدرة على العمل بصورة ليست متزامنة ومستقلة على بياناته الجارية الخاصة، وفي اي وقت من الممكن ان تقوم معالجات مختلفة بتنفيذ ايعازات مختلفة وعلى بيانات مختلفة [4].



شكل (4): مخطط توزيع الايعازات والبيانات في حاسبات من نوع MIMD.

5- الطريقة الجديدة الثانية (الطريقة المتوازية الأولى):

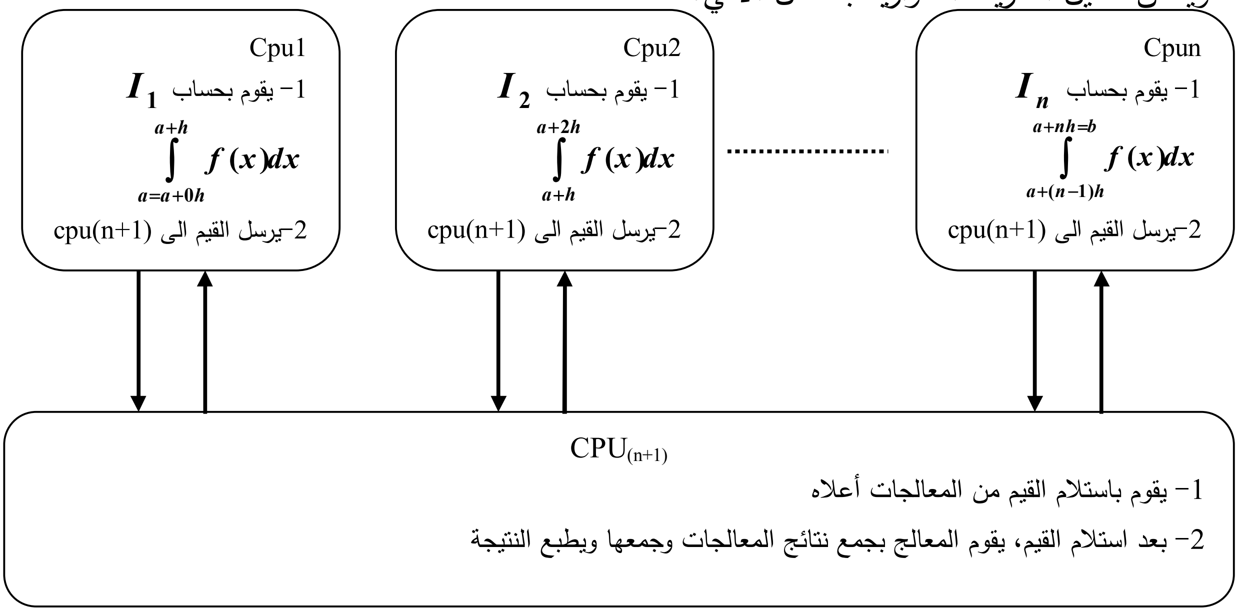
كما لاحظنا خطوات حل الطريقة الجديدة الأولى (طريقة التجزئة) فان هنالك خطوات مستقلة فيما بينها اي انه من الممكن ان ننجزها في الوقت نفسه، لأنها لا تعتمد على بعضها البعض، وهذه الخطوات المستقلة هي خطوات التجزئة للتكامل حيث يمكن حساب كل فترة بصورة مستقلة والموضحة في المعادلات (5) و(6) و(7).

فمن الممكن تنفيذ كل فترة تكامل على معالج مستقل، وبالتالي يكون الزمن المحسوب

لتنفيذ هذه الخطوات هو زمن تنفيذ فترة واحدة.

من الواضح إننا نحتاج في تنفيذ هذه الطريقة الى n+1 من المعالجات ، لان العمليات تتكرر n من المرات ويبقى معالج واحد للجمع بين المعالجات.

ويمكن تمثيل الطريقة المتوازية بالشكل الأتي:



شكل (5): توزيع الأوامر على المعالجات في طريقة التوازي للتكامل بطريقة بول

توزيع الأوامر على المعالجات للطريقة المتوازية:

الـ CPU1 يقوم بحساب $I_1 = \int_{a=a+0h}^{a+h} f(x)dx$

الـ CPU2 يقوم بحساب

⋮

الـ CPU_n يقوم بحساب $I_n = \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)dx$

الـ CPU_{n+1} يقوم باستلام القيم من المعالجات ومن ثم يجمع قيم النتائج ويطبعها.

5-1-حساب عامل التسريع :

نفذ البرنامج باستخدام لغة MatLab 6.5 وحاسبة p4 وتم حساب المدة المستغرقة كالأتي:
عند حساب عامل التسريع Speed up بين الطريقة العادية والطريقة المتوازية نحصل على

$$\text{التسريع Sp} = \frac{\text{وقت التنفيذ لـ M1 باستخدام معالج واحد (Ts)}}{\text{وقت التنفيذ لـ M باستخدام N من المعالجات (Tp)}}$$

$$\text{التسريع Sp} = \frac{\mathbf{1.6}}{\mathbf{0.15}} = \mathbf{10.66}$$

إذن كما نلاحظ أن عامل التسريع الذي حصلنا عليه هو 10.66 أي أن مقدار التسريع في

تنفيذ البرنامج قد زاد وبذلك نكون قد كسبنا وقتا جيدا للتنفيذ .وان عامل التسريع في هذه الطريقة يعتمد على عدد التقسيمات (الفترات) التي تم اختيارها حيث كلما كانت التقسيمات أكثر كلما كان عامل التسريع أفضل.

6- الطريقة الجديدة المتوازية الثانية:

من الملاحظ ان خطوات حل (طريقة التجزئة) أن كل فترة تكامل هي مستقلة عن الفترات الأخرى.

$$I_i = \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

إي بمعنى انه يمكن أن نحتاج إلى معالجين، لان معالج واحد يستخدم في حساب $I_i = \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx$ والأخر يبقى للجمع.

او يمكن ان نحتاج الى 3 معالجات، لان معالجين يستخدم في حساب $I_i = \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx$ و $I_{i+1} = \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx$ والأخر يبقى للجمع.

وهكذا يمكن استخدام أي عدد من المعالجات ممكن معالجين أو 3 معالجات او 4 معالجات وهكذا. أي انه يمكن استخدام ابسط أنواع الحاسبات المتوازية في هذه الطريقة. ويمكن المقارنة بين الطريقة المتوازية الأولى والطريقة المتوازية الثانية:

	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
1	تحتاج الى n+1 من المعالجات حسب عدد فترات التقسيم n .	تحتاج إلى معالجين على الأقل مهما كان عدد التكرارات.
2	تعد مكلفة إذا كان عدد الفترات كبير يفضل استخدامها مع تقسيمات صغيرة	غير مكلفة بالنسبة للفترات الكبيرة
3	الحمل يكون بشكل متساوي على المعالجات	الحمل يكون بشكل متساوي على المعالجات
4	عندما تكون عدد الفترات كبيرة يكون وقت التنفيذ اقل من الطريقة الثانية ولكن بعدد معالجات أكثر.	عندما تكون عدد الفترات كبيرة تأخذ وقتا كبيرا بالنسبة للطريقة الأولى ولكن بعدد معالجات اقل.

7- الاستنتاجات:

من خلال هذا البحث تم استنتاج ما يلي: إن النتائج التي تم الحصول عليها من الطرائق الجديدة الثلاثة هي أفضل من طريقة بول الاعتيادية و حسب المقارنة الموجودة في الجدول (2) ومن الممكن تطبيق هذه الطرائق على طرائق التكامل العددي. وكذلك إن الوقت سريع جدا والنتائج أدق عند استخدام الطرائق المتوازية في الحل.

المصادر:

1) الالوسي، د.احمد صالح و عادل زينل البياتي (1989): "**مقدمة في التحليل العددي**"، مطبعة التعليم العلي في الموصل.

2) عكّار، بتول حاتم (2010): "**بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية**"، أطروحة ماجستير ،كلية التربية للبنات، جامعة الكوفة، وزارة التعليم العلي والبحث العلمي.

3) اميل، شكر الله، (2003): "**التحليل العددي التطبيقي، النظريات التطبيقية و الطرق التقريبية**"، جامعة المنوفية، مصر.

4) مرشد، عبد الحبيب عبدالله احمد (2000): "**تقصي خوارزميات عددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية الصلبة للحاسبات المتوازية**"، اطروحة دكتوراه، كلية العلوم، جامعة الموصل، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

5) سيفي، د.علي محمد صادق ود.ابتسام كمال الدين (1989): "مبادي التحليل العددي"، مديرية دار الكتب للطباعة و النشر، جامعة الموصل.

6) سليمان، مثنى صبحي (2006): "**التكامل العددي باستخدام طرائق المونت كارلو واساليب تقليص التباين**"، اطروحة دكتوراه، كلية العلوم، جامعة الموصل، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

7) القاضلي، يحيى قاسم إبراهيم (2002): "**حل مسالة التخصيص باستخدام خوارزمية متوازية**"، اطروحة ماجستير، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، وزارة التعليم العلي والبحث العلمي.

8) Autar Kaw, (2007) ***"Introduction of Matrix Algebra"***, http://numericalmethods .eng. usf.edu.

9) Khalaf Bashir M. S, and Khlil K. Abbo (2001): Parallel Revised Simplex Method", Raf. Jour. Sci., Vol. 13, No.1, pp51-60.

10) Khalaf Bashir M. S.,and Mohammed Wajid Al-Neama "**Parallel Direct Search Methods" AL-Rafidain journal of computer sciences and mathematic, vol 7, no 3,.** (2010), pp 51-59.

11) Flynn M. J. (1972): "**Some Computer Organization and their Effectiveness**". IEEE Transaction on computers, Vol. C-21, pp. 948-960.

12) J. M. McDonough, (2004) "**Lectures in Basic Computational Numerical Analysis**", University of Kentucky.

13) Michael Wasilewski (2004), "**Parallel Gaussian Elimination**", University of Waterloo.

14) Fung Y. F., et al; "**Teaching Parallel 'Computing Concepts with A Desktop Computer**" International Journal of Electrical Engineering Education Journal, Vol.41 Issue 2, April (2004), pp 113-125.