تقدير بيز للأنموذج الخطي العشوائي ثلاثي التقسيم بوجود التفاعل

نجلاء صديق يحيى
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

أغصان محمود إبراهيم
قسم علوم الحاسوب / كلية التربية
جامعة الموصل

الاستلام 2011 / 10 / 02
القبول 2011 / 12 / 08

Abstract

The papear deals with the estimation of parameters random of effect three-way analysis of variance linear with interaction. The present study includes eight parameters which represent σ_1^2 variance component of factor effect A, σ_2^2 of factor effect B, σ_3^2 of factor effect C, σ_4^2 of

between the factors AB, σ_5^2 variance component of interaction effect between the factors AC, σ_6^2 variance component of interaction effect between the factors BC, σ_7^2 variance component of random line effect between the factors ABC and σ_8^2 variance component of random erorr. These parameters have been estimated by using Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE). Prior information have been assumed as data obtained by using variance analysis, and the prior probability distribution assumed as uniform distribution and the second order moment of these parameters has been obtained BAQUE has been applied on real data obtained from University of Mosul/ College of Agriculture and Forestry/ Department of agricultural yields which represent A its tow spaces for agriculture between planets and B its three categorise of cotton and C it's a level between manure and the netrogin, n its interaction for all cell about cotton agriculture in Iraq 2009. The results obtained are encouraging in comparison with the prior information ,All algorithm are programed by using MATHLAB system.

الملخص

يتناول هذا البحث تقدير معلمات الأنموذج الخطي العشوائي ثلاثي التقسيم بوجود التفاعل .هذه الدراسة تشتمل على ثمان معلمات والتي تمثل σ_1^2 مركبة تباين تأثير العامل A و

σ_2^2 مركبة تباين تأثير العامل B و σ_3^2 مركبة تباين العامل C و σ_4^2 مركبة تباين التفاعل بين العاملين AB و σ_5^2 مركبة تأثير تباين التفاعل بين العاملين AC و σ_6^2 مركبة تأثير تباين التفاعل بين العاملين BC و σ_7^2 مركبة تباين تأثير التفاعل بين العوامل الثلاثة ABC و σ_8^2 مركبة تباين تأثير الخطأ العشوائي وتم تقدير هذه المعلمات باستخدام مقدر بيز التربيعي Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE). بعد افتراض المعلومات الأولية هي المعلومات المحصل عليها باستخدام أسلوب تحليل التباين. ومن ثم الحصول على التوزيع الاحتمالي الاولي الذي افترضناه بوصفه توزيعاً منتظماً. والحصول على العزم الثاني للمعلمات .

تم تطبيق BAQUE على بيانات حقيقية حصلنا عليها من جامعة الموصل/ كلية الزراعة والغابات/ قسم المحاصيل الزراعية عن زراعة القطن في العراق لعام 2009.

وترجمة كافة الخوارزميات باستخدام نظام Matlab

1- المقدمة:

الإحصاء هو علم من العلوم المهمة التي كان ولا يزال له مكانة بارزة لتضمنه مجالات كثيرة ومتنوعة، وقد أصبحت دراسته في طليعة الدراسات التي اهتمت بها الشعوب النامية والناهضة. ويبحث في المجموعات التي تتكون من مفردات (مشاهدات) كثيرة ويعالجها ويمنح الوسائل التي تساعد على جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها والحكم عليها ومقارنتها بغيرها. ويهتم ايضاً بجمع المعلومات حول المعلمات باستعمال نظرية التقدير واختبار الفرضيات. وقد اهتم باسلوب بيز واستخدامه في الاستدلال الاحصائي بعد عقد الستينات من القرن الماضي اذ كان ذلك محط اهتمام العديد من العلماء على سبيل المثال.

Barent (1982), Mike and Harrison (1989).

والاستدلال هو فرع من فروع علم الاحصاء ويصنف على وفق مدرسة الاحصاء التي يتبع اسلوبها في التحليل والاستنتاج الى الاستدلال الكلاسيكي واستدلال بيز.

ويعتمد مقدر بيز غير المتحيز التربيعي في بحثنا هذا على تقدير الدالة الخطية لمركبات (لمعلمات التباين) ويعتبر هذا الاسلوب من وجهة نظر بيز بسهولة التطبيق العملي للانموذج الخطي العام من دون اية عمليات حول الحصول على التوزيع الاحتمالي اللاحق Posterior Distribution هو يعتمد فقط على العزمين الاول والثاني للتوزيعات الاحتمالية الاولية التي تعتبر معلومات اولية للمعلمات اي مركبات التباين.

الأنموذج الخطي الذي يمثل بالمعادلة الرياضية الاتية:

$$X_{ijlk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_i + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{il} + (\beta\gamma)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijl} + e_{ijlk}$$

حيث ان:

$i=1,2,\ldots\ldots,r,\ j=1,2,\ldots\ldots,c\ ,\ l=1,2,\ldots\ldots,l\ ,k=1,2,\ldots\ldots,n$ …… (1)

حيث ان r عدد مستويات العامل الأول، **c** عدد مستويات العامل الثاني، و l عدد مستويات العامل الثالث ، و n عدد التكرارات لكل من التوافقات للعامل الاول والثاني والثالث.

حيث ان:

μ : الوسط العام للمشاهدات.

α_i : تأثير عشوائي للصف i.

β_j : تأثير عشوائي للعمود j.

γ_l : تأثير عشوائي للطبقة l .

$(\alpha\beta)_{ij}$: تأثير عشوائي للتفاعل بين الصف والعمود.

$(\alpha\gamma)_{il}$: تأثير عشوائي للتفاعل بين الصف والطبقة.

$(\beta\gamma)_{jl}$: تأثير عشوائي للتفاعل بين العمود والطبقة.

$(\alpha\beta\gamma)_{ijl}$: تأثير عشوائي للتفاعل بين العوامل الثلاثة.

e_{ijlk}: الخطأ العشوائي للمشاهدة X_{ijlk} .

ونفترض أن α_i و β_j و γ_l و $(\alpha\beta)_{ij}$ و $(\alpha\gamma)_{il}$ و $(\beta\gamma)_{jl}$ و $(\alpha\beta\gamma)_{ijl}$ و e_{ijlk} متغيرات عشوائية مستقلة وتتوزع توزيعاً طبيعياً بتوقع صفر وتباين $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2, \hat{\sigma}_4^2, \hat{\sigma}_5^2, \hat{\sigma}_6^2, \hat{\sigma}_7^2, \hat{\sigma}_8^2$ على التوالي. وتمثل هذه المعلمات مركبات التباين للنموذج (1).

حيث ان:

$$Var(X_{ijlk}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2 + \sigma_7^2 + \sigma_8^2$$

هدف البحث:

تقدير هذه المعلمات باستخدام أسلوب مقدر بيز غير المتحيز التربيعي (BAQUE) اعتمادا على المعلومات الأولية التي نفترضها.

2- مقدر بيز غير المتحيز التربيعي:

Bayes Quadratic Unbised Estimator (BAQUE):

يمكن كتابة الأنموذج (1) بصيغة المصفوفات وكما موضح في الشكل الآتي:

$$X = F\mu + ZK + e \qquad \text{.......(2)}$$

اذ ان :

X : متجهة المشاهدات ذات بعد N .

μ : الوسط العام وهي قيمة غير اتجاهية scalar .

F: متجه ذو بعد N من الواحدات .

Z_i : مصفوفة تصميم ذات بعد $N \times q_i$ حيث (i=1,2,….,r) معلومة، ولها الشكل الآتي :

$$Z_i = (Z'_1, Z'_2, \ldots\ldots, Z'_r)$$

K: متجه ذو بعد q_i من التأثيرات العشوائية، اذ ان:

$$K_i = (K'_1, K'_2, \ldots\ldots, K'_r)$$

e: متجه ذات بعد N من الأخطاء العشوائية.

ان الفروض الأساسية على الأنموذج (2)

$$\begin{aligned} &e \sim N\left(0, \sigma_e^2 I_N\right) \\ &K \sim N\left(0,\ diag\left(\sigma_1^2 Iq_1, \sigma_2^2 Iq_2, \sigma_3^2 Iq_3, \ldots, \sigma_r^2 Iq_r\right)\right) \qquad \ldots\ldots.(3) \\ &Cov(K, e) = 0 \end{aligned}$$

ووفق هذه الفروض يكون لدينا:

$$Y \sim N(F\mu, V)$$

$$Y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)'$$

$$Var(y) = V = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 Z_i Z_i' + \sigma_e^2 I_N \qquad \ldots\ldots.(4)$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i^2 Z_i Z_i'$$

$$\sigma_8^2 = \sigma_e^2$$

ان المعلمات $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{r+1}^2$ تدعى مركبات التباين

$$Z_8 Z_8' = I_N$$

حيث ان I_N مصفوفة الوحدة Identity Matrix.

3- كيفية التعبير عن المصفوفات Z

إن المصفوفات Zi في الأنموذج (2) معلومة، وتسمى مصفوفات التصميم ويمكن كتابه الأنموذج (1) بصيغة المصفوفات وكما يلي:

$$X = F\mu + Z_1K_1 + Z_2K_2 + Z_3K_3 + Z_4K_4 + Z_5K_5 + Z_6K_6 + Z_7K_7 + e \qquad \ldots\ldots.(5)$$

أنظر Searle and Casella (1992)

إذ أن $F = (1,1,\ldots,1)'$ متجه بسعة N، من الواحدات وأن المشاهدات تكتب بشكل متجه عمود صفا بعد صف:

K_1 : هو تأثير عشوائي للصف i أي العامل الأول .

K_2 : هو تأثير عشوائي للعمود j أي العامل الثاني .

K_3 : هو تأثير عشوائي العامل الثالث .

K_4 : التفاعل بين العامل الأول والثاني.

K_5 : التفاعل بين العامل الأول والثالث .

K_6 : التفاعل بين العامل الثاني والثالث.

K_7 : التفاعل بين العوامل الثلاثة.

تحسب المصفوفات Z_i بواسطة حاصل كرونيكر وكما يلي :

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= I_a \otimes 1_b \otimes 1_n \otimes 1_c \\
Z_2 &= 1_a \otimes I_b \otimes 1_n \otimes 1_c \\
Z_3 &= 1_a \otimes 1_b \otimes 1_n \otimes I_c \\
Z_4 &= 1_a \otimes I_b \otimes 1_n \otimes 1_c \\
Z_5 &= I_a \otimes 1_b \otimes 1_n \otimes I_c \\
Z_6 &= 1_a \otimes I_b \otimes 1_n \otimes 1_c \\
Z_7 &= I_a \otimes I_b \otimes 1_n \otimes I_c \\
Z_8 &= I_a \otimes I_b \otimes I_n \otimes I_c
\end{aligned}
$$

و $\otimes$ ترمز الى مضروب كرونيكر

ان الأنموذج (2) يحتوي على المعلمة μ وهي مقدار غير اتجاهي Scalar وممكن التخلص منها وذلك بضرب طرفي الأنموذج (5) بمصفوفة الإسقاط والتي تعرف بالصيغة الاتية:

$$M = I - F(F'F)^{-1}F'$$

ومن شروطها:

1- M=M' Symetric - متماثل
2- MM=M^2=M Idempotent – متساوي القوة
3- MF=0

$$MX = MF\mu + MZ_1K_1 + MZ_2K_2 + MZ_3K_3 + MZ_4K_4 + MZ_5K_5 + MZ_6K_6 + MZ_7K_7 + Me \quad ....(6)$$

وبما أن $MF = 0$ حسب خاصية مصفوفة الإسقاط M يكون لدينا:

$$MX = MZ_1K_1 + MZ_2K_2 + MZ_3K_3 + MZ_4K_4 + MZ_5K_5 + MZ_6K_6 + MZ_7K_7 + Me$$

نفرض أن $MX = Y$ حيث ان $E(MX)=0$

وعليه فإن الأنموذج الخطي العام يكون على النحو الآتي :

$$Y = MZ_1K_1 + MZ_2K_2 + MZ_3K_3 + MZ_4K_4 + MZ_5K_5 + MZ_6K_6 + MZ_7K_7 + Me \quad ....(7)$$

$$E(Y)=0, E(Me)=ME(e)=0$$
$$Var(Y)=MZ_1\,Var(K_1)(MZ_1)'+MZ_2\,Var(K_2)(MZ_2)'+MZ_3\,Var(K_3)(MZ_3)'+ \\ MZ_4\,Var(K_4)(MZ_4)'+MZ_5\,Var(K_5)(MZ_5)'+.....+M\,Var(e)(M)'$$

ونفرض ان:

$$G_i=MZ_i \qquad , \qquad i=1,2,3,4,5,6,7,8$$
$$Var(Y)=G_1\,diag\,\sigma_1^2\,I_{q_1}\,G_1'+G_2\,diag\,\sigma_2^2\,I_{q_2}\,G_2'+G_3\,diag\,\sigma_3^2\,I_{q_3}\,G_3' \\ +G_4\,diag\,\sigma_4^2\,I_{q_4}\,G_4'+G_5\,diag\,\sigma_5^2\,I_{q_5}\,G_5'.......... \\ +M\,diag\,\sigma_8^2\,I_N M'$$

والمصفوفة M متماثلة وغير قابلة للنمو (صماء) : Idempotent

$$M=M'=MYM=M^2$$
$$Var(Y)=\sigma_1^2G_1\,G_1'+\sigma_2^2G_2G_2'+\sigma_3^2G_3G_3'+\sigma_4^2G_4\,G_4'+\sigma_5^2G_5\,G_5' \\ +\sigma_6^2G_6\,G_6'+\sigma_7^2G_7\,G_7'+\sigma_8^2M$$

نفرض أن :

$$V_i=G_iG_i' \qquad , \qquad i=1,2,3,4,5,6,7,8$$
$$Var(Y)=\sigma_1^2V_1+\sigma_2^2V_2+\sigma_3^2V_3+\sigma_4^2V_4+\sigma_5^2V_5+\sigma_6^2V_6+\sigma_7^2V_7+\sigma_8^2V_8$$

اذ ان $V_8=M$.

نفرض ان

$$\theta_i=\sigma_i^2 \quad , \quad (i=1,2,.......,8), \quad \theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,.....,\theta_8)$$

وبما أن $Var(X)$ هي دالة بدلالة المعلمات θ_i

إذن يمكن كتابة

$$Var(Y)=\sum(\theta)$$

وإن مصفوفة التباين $\sum(\theta)$ يمكن التعبير عنها بالشكل التالي :

$$\sum(\theta)=\theta_1V_1+\theta_2V_2+\theta_3V_3+\theta_4V_4+\theta_5V_5+\theta_6V_6+\theta_7V_7+\theta_8V_8 \qquad ....(8)$$

وهي مصفوفة متماثلة بسعة $N\times N$.

إن المصفوفة $\sum(\theta)$ هي حالة خاصة من الأنموذج وان المعلمات $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8$ تقدر بواسطة مقدر الدالة الخطية والتي صيغتها بالشكل التالي:

$$\alpha(Y)=\ell_1\theta_1+\ell_2\theta_2+\ell_3\theta_3+\ell_4\theta_4+\ell_5\theta_5+\ell_6\theta_6+\ell_7\theta_7+\ell_8\theta_8=\ell'\theta \qquad ....(9)$$

انظر Mistal (1997) .

اذ أن $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,........,\theta_8)' \quad , \quad \ell=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,.....,\ell_8)'$

والدالة الخطية $\alpha(Y)$ ثوابت معلومة تقدر بواسطة الشكل الثنائي

$$\hat{\alpha} = Y' A Y$$

حيث ان A مصفوفة متماثلة بسعة $N \times N$ مطلوب إيجادها من البيانات، ويجب $\hat{\alpha}$ تحقق الشرطين الآتيين :

1. عدم التحيز Unbiasedness.
2. تصغير دالة مجازفة بيز. انظر Rao and Kleffe (1988) .

وفي حالة وجود معلومات أولية عن المعلمة θ بشكل توزيع أولي ولتكن دالة الكثافة الاحتمالية $g(\theta)$ للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \ldots\ldots, \theta_8)'$ فإن دالة الخسارة التربيعية تأخذ الصيغة الآتية :

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \qquad \ldots\ldots.(10)$$

وإن دالة المجازفة تكون كما يأتي :

$$R(\hat{\alpha}, \alpha) = \mathrm{E}[L(\hat{\alpha}, \alpha)] = \mathrm{E}\left[(\hat{\alpha} - \alpha)^2\right]$$

بينما تأخذ دالة مجازفة بير $B(\hat{\alpha})$ الشكل الآتي :

$$B(\hat{\alpha}) = \mathrm{E}_\theta[R(\hat{\alpha}, \alpha)] = \mathrm{E}_\theta\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha} - \alpha)^2\right]$$

$$B(\hat{\alpha}) = \int_{\theta \in \Omega} R(\hat{\alpha}, \alpha) g(\theta) d\theta$$

$$= \int_{\theta \in \Omega} \mathrm{E}_\theta(\hat{\alpha} - \alpha)^2 g(\theta) d\theta \ , \ \Omega = \{\theta : \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8 > 0\} \qquad \ldots\ldots.(11)$$

والآن نبرهن شرط عدم التحيز.

البرهان : يقال للتقدير $\hat{\alpha}$ تقديراً غير متحيز للدالة الخطية α إذا كانت:

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \mathrm{E}(Y' A Y) = \alpha$$

$$\mathrm{E}(Y' A Y) = \mathrm{E}(tr(Y' A Y))$$

$$\mathrm{E}(tr\, A Y Y') = tr\, A\, \mathrm{E}(Y Y')$$

$$\mathrm{E}(Y Y') = Var(Y) = \sum(\theta)$$

$$= \theta_1 V_1 + \theta_2 V_2 + \theta_3 V_3 + \theta_4 V_4 + \theta_5 V_5 + \theta_6 V_6 + \theta_7 V_7 + \theta_8 V_8$$

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = tr\, A(\theta_1 V_1 + \theta_2 V_2 + \theta_3 V_3 + \theta_4 V_4 + \theta_5 V_5 + \theta_6 V_6 + \theta_7 V_7 + \theta_8 V_8)$$

$$= tr\, A \sum_{i=1}^{8} \theta_i V_i$$

$$= \sum_{i=1}^{8} \theta_i\, tr\, A V_i$$

يكون $\hat{\alpha}$ غير متحيز بالنسبة الى α اذا فقط إذا :

$$tr\,AV_i = \ell_i \qquad , \qquad i = 1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad \ldots\ldots.(12)$$

أي أن :

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{8} \ell_i\, \theta_i = \ell'\,\theta = \alpha$$

والآن نبرهن تصغير دالة مجازفة بيز.

البرهان : يعتمد تصغير دالة مجازفة بيز على تصغير دالة المجازفة كما يأتي :

من (11) لدينا العلاقة:

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) &= \int_{\theta\in\Omega} \mathrm{E}_\theta(\hat{\alpha}-\alpha)^2\, g(\theta)d\theta \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha}-\alpha)^2\right] = \mathrm{E}_\theta\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha}-\mathrm{E}(\hat{\alpha}))^2\right] \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[Var(\hat{\alpha})\right] = \mathrm{E}_\theta\left[Var(Y'\,A\,Y)\right] \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[2tr\,A\,Var(Y')\,A\,Var(Y)\right] \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[2tr\,A\sum(\theta)A\sum(\theta)\right] \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[2tr\,A\sum_{i=1}^{8} V_i\theta_i\ A\sum_{i=1}^{8} V_i\theta_i\right] \\ &= \mathrm{E}_\theta\left[2\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \theta_i\theta_j\, tr\,AV_iAV_j\right] \end{aligned}$$

$$B(\hat{\alpha}) = 2\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \mathrm{E}(\theta_i\theta_j)\,tr\,AV_iAV_j \qquad \ldots\ldots.(13)$$

اذ أن: $\mathrm{E}(\theta_i\theta_j)$ يمثل العزم الثاني بالنسبة للمعلمة θ_i ومصفوفة العزم الثاني هي:

$$\mathrm{E}(\theta\theta') = C = \left(\mathrm{E}(\theta_i\theta_j)\right) = Var(\theta) + \mathrm{E}(\theta)(\mathrm{E}(\theta))'$$

حيث ان: $i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8$

ويمكن تمثيل المصفوفة D بالشكل الآتي :

$$D = (d_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{8} r_{ik}r_{kj}\right) \qquad , \qquad i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad \ldots\ldots.(14)$$

أي أن D تساوي حاصل ضرب المصفوفتين اللتين تمثلان جذري المصفوفة D

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D} = RR$$

بتعويض (14) في (13) ينتج أن:

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) &= 2\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{8} r_{ik}r_{kj}\, tr\,AV_iAV_j \\ &= 2\sum_{k=1}^{8} tr\,A\left(\sum_{i=1}^{8} r_{ik}V_i\right)A\left(\sum_{j=1}^{8} r_{kj}V_j\right) \end{aligned}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{8} trAT_k AT_k \qquad \text{.......(15)}$$

اذ أن:

$$T_k = \sum_{i=1}^{8} r_{ik} V_i \quad , \quad k = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

ولتصغير العلاقة (15) نستخدم طريقة لاكرانج وفقاً إلى القيد $trAV_i = \ell_i$ نفرض ان:

$$S = 2\sum_{k=1}^{4} trAT_k AT_k + 4\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left(trAV_i - \ell_i \right) \qquad \text{.......(16)}$$

اذ أن λ_i تمثل مضاريب لاكرانج Lagrange Multipliers ونشتق (16) بالنسبة الى A ثم نجعل المشتقة مساوية للصفر فنحصل على :

$$\frac{dS}{dA} = 4\sum_{k=1}^{8} T_k AT_k + 4\sum_{i=1}^{8} \lambda_i V_i = 0$$

أي أن

$$= \sum_{k=1}^{8} T_k AT_k + \sum_{i=1}^{8} \lambda_i V_i = 0 \qquad \text{.......(17)}$$

ثم نشتق (16) بالنسبة الى λ_i وبمساواة المشتقة بالصفر يكون.

$$\frac{dS}{d\lambda_i} = 4\left(trAV_i - \ell_i \right) = 0$$

لهذا

$$trAV_i = \ell_i \quad , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad \text{.......(18)}$$

إن المعادلتين (17) و(18) تكون على شكل مصفوفات ، ممكن كتابة نظام المعادلات الخطية وذلك باستخدام عملية المتجه Vec Operation:

$$\left(\sum_{k=1}^{8} T_k \otimes T_k \right) VecA + \sum_{i=1}^{8} \lambda_i VecV_i = 0 \qquad \text{.......(19)}$$

$$\left(VecV_i \right)' VecA = \ell_i \quad , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad \text{.......(20)}$$

ويمكن التعبير عن المعادلة (19) بالصيغة الآتية:

$$H\, VecA + \sum_{i=1}^{8} \lambda_i VecV_i = 0 \qquad \text{.......(21)}$$

اذ ان :

$$H = \sum_{k=1}^{8} T_k \otimes T_k$$

ويمكن صياغة نظام المعادلات الخطية (20) و(21) على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} VecV_1 & VecV_2 & VecV_3 & VecV_4 & VecV_5 & VecV_6 & VecV_7 & VecV_8 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_4' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_5' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_6' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_7' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_8' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ VecA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \\ \ell_6 \\ \ell_7 \\ \ell_8 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots.(22)$$

ليكن

Q : تمثل مصفوفة النظام (22) وبسعة $(N^2+8)\times(N^2+8)$.

E : يمثل متجه المجاهيل في النظام (22) وبسعة (N^2+8) .

U : يمثل متجه الثوابت في النظام (22) وبسعة (N^2+8) .

اذن يمكن كتابة نظام المعادلات (22) بالصيغة الآتية:

$$QE=U \qquad \ldots\ldots.(23)$$

واذا كانت Q قابلة للانعكاس فيكون:

$$E=Q^{-1}U \qquad \ldots\ldots.(24)$$

وبإيجاد قيم المجاهيل Eالذي يحتوي على $VecA,\lambda_i$ يمكن إيجاد المصفوفة A التي بواسطتها يمكن الحصول على تقدير مركبات التباين $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8)$ وذلك من الشكل الثنائي $\hat{\alpha}=Y'AY$ لكونه تقديراً غير متحيز للدالة الخطية:

$$\alpha(Y)=\ell_1\theta_1+\ell_2\theta_2+\ell_3\theta_3+\ell_4\theta_4+\ell_5\theta_5+\ell_6\theta_6+\ell_7\theta_7+\ell_8\theta_8=\ell'\theta \qquad \ldots\ldots.(25)$$

اذا وفقط اذا :

$$trAV_i=\ell_i \qquad , \qquad i=1,2,3,4,5,6,7,8$$

راجع (12)

مثلاً لإيجاد $\hat{\theta}_1$ الذي هو تقدير للمعلمة θ_1 نضع $\ell_2=\ell_3=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0,\ell_1=1$ في (22) ونضع $\ell_1=\ell_3=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0,\ell_2=1$ فنحصل على $\hat{\theta}_2$ وهو تقدير للمعلمة θ_2 ونضع $\ell_1=\ell_2=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0,\ell_3=1$ فنحصل على $\hat{\theta}_3$ وهو تقدير للمعلمة θ_3 وهكذا الى ان نصل $\ell_1=\ell_2=\ell_3=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=0,\ell_8=1$ فنحصل على $\hat{\theta}_8$ وهو تقدير للمعلمة θ_8.

وأيضاً لو طلب تقدير $\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2$ نضع $\ell_1=\ell_2=1,\ell_3=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0$
وكذلك لو طلب تقدير $\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2+\hat{\theta}_3$ نضع $\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0$ وتصبح قيمة $\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$.

وأيضاً لو طلب تقدير $\frac{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2}{2}$ نضع $\ell_3=\ell_4=\ell_5=\ell_6=\ell_7=\ell_8=0$ وتصبح قيمة $\ell_1=\ell_2=\frac{1}{2}$ وهكذا .

4- التوزيع الأولي للمعلمات θ_i

نفترض دالة كثافة احتمالية أولية Prior-Pdf لمركبات التباين $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8$ كالتوزيع المنتظم Uniform Distribution الذي يعتبر ابسط توزيع أولي ممكن افتراضه وذلك لتوفر معلومات قليلة جداً عن المعلمات θ_i أي ان :

$$g(\theta)=\frac{1}{\bar{\theta}-\underline{\theta}} \quad \underline{\theta}\le\theta\le\bar{\theta} \qquad \ldots\ldots.(26)$$

اذ $\underline{\theta}$ تمثل الحد الأدنى للمعلمات و $\bar{\theta}$ تمثل الحد الأعلى للمعلمات. وفرض أن المعلمات $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8)$ مستقلة أي أن

$$g(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8)=g(\theta_1)g(\theta_2)g(\theta_3)g(\theta_4)g(\theta_5)g(\theta_6)g(\theta_7)g(\theta_8)$$

لذلك يكون

$$Cov(\theta_i,\theta_j)=0 \qquad i\ne j=1,2,3,4,5,6,7,8$$

فينتج لدينا :

$$D=\begin{bmatrix}\frac{\bar{b}_1+\underline{b}_1}{2}\\ \frac{\bar{b}_2+\underline{b}_2}{2}\\ \frac{\bar{b}_3+\underline{b}_3}{2}\\ \frac{\bar{b}_4+\underline{b}_4}{2}\\ \frac{\bar{b}_5+\underline{b}_5}{2}\\ \frac{\bar{b}_6+\underline{b}_6}{2}\\ \frac{\bar{b}_7+\underline{b}_7}{2}\\ \frac{\bar{b}_8+\underline{b}_8}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\bar{b}_1+\underline{b}_1}{2} & \frac{\bar{b}_2+\underline{b}_2}{2} & \frac{\bar{b}_3+\underline{b}_3}{2} & \frac{\bar{b}_4+\underline{b}_4}{2} & \frac{\bar{b}_5+\underline{b}_5}{2} & \frac{\bar{b}_6+\underline{b}_6}{2} & \frac{\bar{b}_7+\underline{b}_7}{2} & \frac{\bar{b}_8+\underline{b}_8}{2}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_1-\underline{b}_1)^2}{12} \end{bmatrix}$$
…….(27)

إن المصفوفة D تكون بمثابة المعلومات الأولية حول المعلمات $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8$ أنظر Taraldsen and Lindqvist (2007) .

ثم نجد جذر المصفوفة D :

$$D = RR = (r_{ij})(r_{ij}) \quad , \quad i,j = 1,2,3,4,5,6,7,8 \qquad …….(28)$$

5- الجانب التطبيقي :

لقد طبقت النتائج النظرية في هذا البحث على بيانات حقيقية مصدرها تجارب نفّذت في كلية الزراعة والغابات في جامعة الموصل حول زراعة القطن في العراق لسنة (2009). وكانت البيانات على النحو الآتي:

جدول (1): يمثل بيانات عن زراعة القطن في المستوى الأول (C1)

العامل B / العامل A	b1	b2	b3	مجموع الصفوف
a1	120 145 150 $X_{(111.)}$	119 144 151 $X_{(121.)}$	118 143 150 $X_{(131.)}$	$X_{1.1.}$
a2	151 114 141 $X_{(211.)}$	151 113 140 $X_{(221.)}$	150 115 143 $X_{(231.)}$	$X_{2.1.}$
مجموع الأعمدة	$X_{.11.}$	$X_{.21.}$	$X_{.31.}$	$X_{..1.}$

جدول (2): يمثل بيانات عن زراعة القطن في المستوى الثاني (C2)

العامل B / العامل A	b1	b2	b3	مجموع الصفوف
a1	153 131 173 $X_{(112.)}$	152 130 170 $X_{(122.)}$	150 131 174 $X_{(132.)}$	$X_{1.2.}$
a2	117 143 152 $X_{(212.)}$	117 141 151 $X_{(222.)}$	115 142 149 $X_{(232.)}$	$X_{2.2.}$
مجموع أعمدة	$X_{.12.}$	$X_{.22.}$	$X_{.32.}$	$X_{..2.}$

حيث أن:

a : هي مسافتين للزراعة بين النباتات.

b : هي ثلاثة أصناف من القطن.

n : هي التكرار لكل خلية.

c: هي مستويين من السماد النتروجيني.

جدول (3): يمثل مجموع الصفوف والأعمدة المتناظرة في المستويين الأول والثاني

العامل B / العامل A	b1	b2	b3	مجموع الصفوف
a1	812 $X_{(11..)}$	824 $X_{(12..)}$	968 $X_{(13..)}$	2604 $X_{1...}$
a2	801 $X_{(21..)}$	768 $X_{(22..)}$	876 $X_{(23..)}$	2445 $X_{2...}$
مجموع الاعمدة	1613 $X_{.1..}$	1592 $X_{.2..}$	1844 $X_{.3..}$	5049 $X_{....}$

حيث أن:

$X....$: المجموع العام لنتائج جميع المشاهدات من العينة العشوائية ويعبر عنه بالرمز:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l}\sum_{l=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} X^2{}_{ijlk}$$

$X....$: الوسط العام ويعبر عنه بالرمز $\frac{X....}{nrcl}$

وهنا n=3, c=2,l=3, r=2

$$X_{i...} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{c} X^2{}_{ijlk}$$

$$X_{.j..} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} X^2_{ijlk}$$

$$X_{ij..} = \sum_{l=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} X^2_{ijlk}$$

حيث ان:

$X_{i...}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل i .

$X_{.J..}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل j .

$X_{ij..}$: مجموع المشاهدات في الخلية الواقعة في الصف i والعمود j .

وبعدها ثم تطبيق طريقة تحليل التباين (ANOVA) وظهرت النتائج في جدول تحليل التباين وعلى الشكل التالي:

جدول (4): تحليل التباين

مصدر التباين $(S.O.V)$	مجموع المربعات $(S.S.)$	درجات الحرية $(D.F.)$	متوسط المربعات $(M.S.)$	توقع متوسط المربعات $\mathrm{E}(M.S.)$
بين الصفوف A	662.20	1	662.20	$\hat{\sigma}_1^2 = 22.9$
بين الأعمدة B	1463.11	2	731.55	$\hat{\sigma}_2^2 = 45.17$
بين الطبقات C	540.98	1	540.98	$\hat{\sigma}_3^2 = 19.53$
التفاعل بين AB	124.33	2	62.16	$\hat{\sigma}_4^2 = -28.25$
التفاعل بين AC	248.66	1	248.58	$\hat{\sigma}_5^2 = 1.87$
التفاعل بين BC	478.88	2	189.44	$\hat{\sigma}_6^2 = 31.07$
التفاعل بين ABC	463.04	2	231.69	$\hat{\sigma}_7^2 = 76.23$
الخطأ	71.50	24	2.98	$\hat{\sigma}_8^2 = 2.98$
الكلي	9938.75	35		

نلاحظ ان $\hat{\sigma}_4^2 = -(28.25)$ وهذا ما يناقض تعريف التباين حيث ان التباين يجب ان لا تكون لـه قيمـة سالبة $(\hat{\sigma}_4^2 \geq 0)$ الا ان قبول التقدير السالب كمؤشر علـى ان الحقيقة لمكونـات التبـاين تساوي صفر.حيث من الممكن ان يكون تقدير التبـاين سالب وعليـه يصبح مقدر التبـاين يساوي صفر انظر Box and Tiao (1973)

Marshall And Mardia(1985)

$\hat{\sigma}_4^2 = 0$

ومن ثم تطبيق أسلوب BAQUE المذكور في الجانب النظري اذ تعتبر التقديرات التي حصلنا عليها فـي جدول تحليل التباين قيماً أولية للمعلمات مع اعتبار دالـة الخسارة التربيعية اذ تم عد

التوزيع الأولي للمعلمات بوصفه توزيعاً منتظماً وهذا التوزيع يعتبر اضعف التوزيعات الأولية وابسطها.

وقد اعتبرنا هذا التوزيع أولي بسبب عدم توفر معلومات أولية أو تاريخية عن هذه المعلمات.

ومن معرفة التوزيعات الأولية للمعلمات نحصل على العزم الأول والثاني للمعلمات وهذه العزوم هي المطلوبة في أسلوب (BAQUE).

افرض $\theta_i = \sigma_i^2 \;,\; i = 1,2,3,4,5,6,7,8$

حصلنا على التقديرات الأولية باستخدام طريقة تحليل التباين فكانت:

$$\hat{\theta}_1 = 22.9\,,\quad \hat{\theta}_2 = 45.17\,,\quad \hat{\theta}_3 = 19.53\,,\quad \hat{\theta}_4 = 0\,,\quad \hat{\theta}_5 = 1.87\,,\quad \hat{\theta}_6 = 31.07\,,$$
$$\hat{\theta}_7 = 67.23\,,\ \hat{\theta}_8 = 2.98$$

وباستخدام المعدلات في (26) نحصل على:

$$g(\theta_1) = f(\theta_1) = \frac{1}{22.9} = 0.0430 \qquad 0 < \theta_1 < 22.9$$
$$g(\theta_2) = f(\theta_2) = \frac{1}{45.17} = 0.022 \qquad 0 < \theta_2 < 45.17$$
$$g(\theta_3) = f(\theta_3) = \frac{1}{19.54} = 0.051 \qquad 0 < \theta_3 < 19.54$$
$$g(\theta_5) = f(\theta_5) = \frac{1}{1.87} = 0.053 \qquad 0 < \theta_5 < 1.87$$
$$g(\theta_6) = f(\theta_6) = \frac{1}{31.07} = 0.032 \qquad 0 < \theta_6 < 31.07$$
$$g(\theta_7) = f(\theta_7) = \frac{1}{76.23} = 0.01 \qquad 0 < \theta_7 < 76.23$$
$$g(\theta_8) = f(\theta_8) = \frac{1}{2.98} = 0.33 \qquad 0 < \theta_8 < 2.98$$

وباستخدام النتائج في (27) نحصل على:

$$D = \begin{bmatrix} 2.9601 & 56.7914 & 23.1472 & 1.3932 & 0 & 14.5499 & 33.6517 & 17.0605 \\ 56.7914 & 1.9370 & 5921165 & 35.6375 & 0 & 3721930 & 860.8273 & 4364163 \\ 23.1472 & 5921165 & 321.7816 & 14.5252 & 0 & 151.6993 & 350.8580 & 177.875 \\ 1.3932 & 35.6375 & 14.5252 & 1.1656 & 0 & 9.1303 & 21.1170 & 10.7058 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14.599 & 3721930 & 151.6993 & 9.1303 & 0 & 127.1403 & 220.5425 & 111.8093 \\ 33.6517 & 860.8273 & 350.8580 & 21.1170 & 0 & 220.5425 & 680.1096 & 258.5983 \\ 17.0605 & 4364168 & 177.8757 & 10.7058 & 0 & 111.8093 & 258.5983 & 1748033 \end{bmatrix}$$

وكانت نتائج تقديرات بيز بوساطة أسلوب BAQUE على النحو الآتي:

$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
22.9	44.17	19.33	-28.25
$\hat{\sigma}_5^2$	$\hat{\sigma}_6^2$	$\hat{\sigma}_7^2$	$\hat{\sigma}_8^2$
1.87	30.07	76.23	2.98

حيث ان $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_1$

نلاحظ ان نتائج التقديرات مقاربة جداً من التقديرات التي حصلنا عليها بأسلوب تحليل التباين وهي نتائج مشجعة.

الاستنتاجات والتوصيات:

1- اظهر تحليل التباين ان تقدير (تباين تأثير التفاعل بين A و B) هو سالب وهذا يناقض لتعريف التباين الذي يجب ان يكون غير سالب وهنا يجب ان نعتبره مساويا للصفر.

2- يمكن افتراض القيم الابتدائية قيماً لا على التعيين ومحاولة تكرار أسلوب (BAQUE) للحصول على التقارب convergence دون تطبيق أسلوب تحليل التباين للحصول على القيم الابتدائية ولأي تصميم رباعي التقسيم او تصميم المربع اللاتيني .... الخ.

المصادر:

1) إسماعيل، يونس حازم، (2005)، "الكشف عن القيم الشاذة باستخدام التوزيع المختلط بالاعتماد على معاينة جبس وأسلوب بيز"، (رسالة ماجستير غير منشورة)، كلية التربية، جامعة الموصل.

2) فتحي، يونس محمد، (1998)، "تقدير بيز لدوال التغاير الفراغي بمعلمتين وثلاث معالم"، (رسالة ماجستير غير منشورة)، كلية التربية، جامعة الموصل.

3) قاسم، محمد نذير، يحيى, نجلاء صديق, (2009), "تقدير بيز للنموذج الخطي العشوائي ثنائي التقسيم بوجود التفاعل", المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (17) 2010 عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات – الإحصاء والمعلوماتية ص ص [129–146], جامعة الموصل , كلية علوم الرياضيات و الحاسبات.

4) قاسم، محمد نذير، عباس، سمير عبد الجبار، (2001)، "استخدام اسلوب بيز في تقدير مركبات التباين لنموذج التأثير العشوائي الأحادي التقسيم"، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (1) 2001، ص ص [69–81]، جامعة الموصل، كلية علوم الحاسبات والرياضيات.

5) Besag, J. and Green, P.J. (1993): Spatial Statistical and Bayesian Computation. J.R. Statist. Soc. B., No.1, pp.25-37.

6) Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973): Bayesian inference in Statistical Analysis Addison-Wesley Publishing Company, California, London.

7) Chaturvedi, A. (1996): Robust Bayesian Analysis of the Linear Rogression Model. J. of Statistical Planning and Inference, 50, 175-178.

8) Gui, H., Stein, A. and Myers, D.E. (1995): Extension of Spatial Information, Bayesian Kriging and updating of prior Variogram Parameters. Envmtrc, 6, pp. 373-384.

9) Hogg and Tanis (2001): Probability and Statistical Intereivce, New Jersey.

10) Kleffe, J. and Pincus, R. (1974): Bayes and Best Quadratic Unbiased Estimator for Parameters of the Covariance Matrix in Linear Model Math, Operation Statist 5, p. 43-67.

11) Marshall R. J. and Mardia K. V. (1985) Minimum Norm Qudratic Estimation Of spatial Covariance .Mathmaticall Geology. vol.17, No.5.pp.521

12) Marshall, R.J. and Mardia, K.V. (1985): Minimum Norm Quadratic Estimation of Components of Spatial Covariance. Math Geo., Vol. 17, No. 5, pp.517-525.

13) Mistal, I. (1997): Estimation of variance components with large-scale Dominance Models.

14) Rao, C.R. (1972): "Estimation of variance components in linear models" J. Am. Statist. Assoc., Vol. 67, p.112-115.

15) Rao, CR. And kleffe, J. (1988): Estimation of variance component and application north Holland, Amsterdam.

16) Searl, S.R. (1971): Linear Models. John Wiley, New York.

17) Searl, S.R. Casella, G. and McClloch, C.E. (1992): Variance component. Wiley, New York.

18) Taraldsen, G and Lindqvist, B.H. (2007): Bayes Theorem for Improper priors .http:// www.math.ntnu.no/preprint/statistic

19) Winer B. J. (1971): Statistical Principles in experimental design, second ed., McGraw-Hill Kogakusha, LTD.