الحل الدوري لنظام معين من المعادلات التكاملية -التفاضلية اللاخطية ذات تأخر المتغير المستقل

رعد نوري بطرس أياد سلو سيتو
قسم الرياضيات /كلية التربية /جامعة الموصل

تاريخ الأستلام 2005/3/20 تاريخ القبول 2005/6/6

ABSTRACT

In this paper we investigate the existence and approximation of the periodic solution for a system of nonlinear integro –differential equations with retarded argument. The numerical –analytic method has been adapted to study the periodic solutions of the nonlinear ordinary differential equations that were introduced by Samoilenko.

This work lead to develop and expand the method, which is mentioned above, and thus the results obtained are more comprehensive that the study mentioned previously in the reference [1].

الخلاصة

تناولنا في هذا البحث وجود وتقارب الحل الدوري لنظام معين من المعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطية ذات تأخر المتغير المستقل وذلك باستخدام الطريقة التحليلية – العددية لدراسة الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية لـ Samolilenko .

من خلال هذا العمل تم تطوير وتوسيع الطريقة أعلاه وهكذا أصبحت النتائج التي حصلنا عليها اكثر توسعا وشمولا من الدراسة السابقة المعطاة في المرجع[1] .

البند الأول: المقدمة

في الدراسات الحديثة يجري تكريس عدد كبير من البحوث والدراسات ومن ضمنها [3,2] لمعالجة الأنظمة الدورية غير المستقلة وخاصة المعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطية ذات تأخر المتغير المستقل وهي في مجملها تتناول وبشكل شمولي مسائل عامة تخص نظرية الحلول

الدورية والطرق الحديثة لدراسة المعادلات التكاملية – التفاضلية الدورية إلى جانب ذلك نتناول الخوارزميات في أبنيتها التقريبية وبسبب الإمكانيات الهائلة لتسخير الحاسبات الإلكترونية فإن الطرق التحليلية – العددية [3] تصبح هي الوسيلة الفعالة لإيجاد الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية والمعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطية ذات تأخر المتغير المستقل

لقد اقترح Samoilenko [3] الطريقة التحليلية – العددية لدراسة الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية وبنائها الخوارزمي وتضمنت تلك الطرق متتابعات منتظمة للدوال الدورية، إن ما نتج عن تلك الدراسة هو استخدام الحلول الدورية وبشكل واسع النطاق في مختلف المعالجات العلمية والعملية وخاصة في المجالات الحديثة في الصناعة والتكنولوجيا كما في بعض الدراسات والبحوث [4,3,2,1].

ندرس نظام المعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطية ذات تأخر المتغير المستقل والتي هي من الشكل أدناه:

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),x(t-h),\int_t^{t+T}g(s,x(s),x(s-h))ds), \qquad (1.1)$$

إذ أن $D, x\in D\subset R^n$ مجال مغلق ومحدد الدالتين المتجهتين $f(t,x,y,z)$ و $g(t,x,y)$ معرفتان في المجال

$$(t,x,y,z)\in R^1\times D\times D\times D_1=(-\infty,\infty)\times D\times D\times D_1 \qquad (1.2)$$

و مستمرتان في t, x, y, z ودوريتان في t ذات دورة تساوي T حيث D_1 مجال مغلق ومحدد وجزئي من الفراغ الأقليدي R^m.

نفرض أن كل من الدالة f(t,x,y,z) و g(t,x,y) تحقق المتباينات التالية

$$|f(t,x,y,z)|\le M, \qquad |g(t,x,y)|\le N, \qquad (1.3)$$

$$|f(t,x_1,y_1,z_1)-f(t,x_2,y_2,z_2)|\le$$
$$\le K|x_1-x_2|+L|y_1-y_2|+Q|z_1-z_2|, \qquad (1.4)$$

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)|\le K|x_1-x_2|+L|y_1-y_2| \qquad (1.5)$$

لكل h>0، $y,y_1,y_2\in D, x,x_1,x_2\in D, t\in R^1$ ، $z,z_1,z_2\in D_1$ حيث أن $N=(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ و $M=(M_1,M_2,\ldots,M_n)$ متجهان ثابتان موجبان وكذلك K=(Kij) و L=(Lij) و Q=(Qij) مصفوفات موجبة ثابتة من السعة (nxn)، $\|.\|=\max_{t\in[0,T]}|.|$

نعرف المجموعتين غير الخاليتين كما يلي

$$D_f=D-\frac{MT}{2}, \qquad (1.6)$$

$$D_{1f} = D_1 - (K+L)\frac{MT^2}{2} + NT$$

فضـــلاً عـــن ذلـــك نفـــترض أن القـــيمة الذاتيـــة العظمـــى للمصـــفوفة $W = [(K+L)(E+QT)]T/2$ لا تتعدى الوحدة أي أن

$$\lambda_{max}(W) < 1 \qquad (1.7)$$

مأخوذة 1.1[3]

لتكن $f(t)$ دالة متجة مستمرة ومعرفة في الفترة $[0,T]$ عندئذ المتباينة:-

$$\left|\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right)ds\right| \le \alpha(t)M$$

محققة لأجل $0 \le t \le T$ إذأن $\alpha(t) \le \frac{T}{2}$,

$$\alpha(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \qquad M = \max_{t\in[0,T]}|f(t)|$$

البرهان مباشرة من المتباينة التالية

$$\left|\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right)ds\right| \le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |f(s)|ds + \frac{t}{T}\int_t^T |f(s)|ds$$

البند الثاني : الحل التقريبي الدوري للنظام (1.1)

في هذا البند ندرس الحل الدوري للنظام (1.1) وذلك في برهان المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2.1

إذا كان نظام المعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطيـــة (1.1) يحقـــق المتباينـــات (1.3)، (1.4)، (1.5) والشرطين (1.6)، (1.7) فإن متتابعة الدوال

$$x_{m+1}(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t [f(s, x_m(s,x_\circ), x_m(s-h,x_\circ),$$

$$\int_s^{s+T} g(\tau, x_m(\tau,x_\circ), x_m(\tau-h,x_\circ))d\tau) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(s, x_m(s, x_\circ), x_m(s-h, x_\circ),$$

$$\int_{s}^{s+T} g(\tau, x_m(\tau, x_\circ), x_m(\tau-h, x_\circ))d\tau)ds]ds \qquad (2.1)$$

مع $\quad x_\circ(t,x_\circ) = x_\circ, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots..$

دورية في t ذات دوره يساوي T ، متقاربة بانتظام عندما $m \to \infty$ في المجال

$$(t, x_\circ) \in R^1 \times D_f = (-\infty, \infty) \times D_f \qquad (2.2)$$

من الدالة $x^\circ(t, x_\circ)$ المعرفة في المجال (2.2) مستمرة ودورية في t ذات دوره يساوي T وتحقق نظام المعادلات التكاملية

$$x(t, x_\circ) = x_\circ + \int_{0}^{t}[f(s, x(s, x_\circ), x(s-h, x_\circ), \int_{s}^{s+T} g(\tau, x(\tau, x),$$

$$x(\tau-h, x_\circ)d\tau) - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(s, x(s, x_\circ), x(s-h, x_\circ),$$

$$\int_{s}^{s+T} g(\tau, x(\tau, x_\circ), x(\tau-h, x_\circ))d\tau)ds]ds \qquad (2.3)$$

الذي هو حل وحيد للنظام (1.1) ويحقق المتباينتين التاليتين

$$|x^\circ(t, x_\circ) - x_\circ| \le \frac{MT}{2} \qquad (2.4)$$

$$|x^\circ(t, x_\circ) - x_m(t, x_\circ)| \le W^m(E-W)^{-1}M\alpha(t) \qquad (2.5)$$

لكل $t \in R^1$ و $x_\circ \in D_f$.

البرهان:

تأمل متتابعة الدوال $x_m(t,x_\circ)$ ، .... $x_1(t,x_\circ),\ x_2(t,x_\circ)$ ،. المعرفة في العلاقة المتكررة (2.1)، كل متتابعات الدوال دورية في t ذات دوره يساوي T.

الآن حسب المأخوذة 1.1 ومن (2.1) عندما m=0 نحصل على

$$|x_1(t, x_\circ) - x_\circ| \le (1-\frac{t}{T})\int_{0}^{t}|f(s, x_\circ, x_\circ, \int_{s}^{s+T} g(\tau, x_\circ, x_\circ)d\tau)|ds +$$

$$+\frac{t}{T}\int_{t}^{T}|f(s, x_\circ, x_\circ, \int_{s}^{s+T} g(\tau, x_\circ, x_\circ)d\tau)|ds$$

$$\leq M\alpha(t) \leq \frac{MT}{2}$$

يتبع ذلك أن $x_1(t,x_\circ) \in D$ لكل $x_\circ \in D_f$ هكذا بواسطة الاستقراء الرياضي يمكن أن نثبت صحة المتباينة التالية لأجل $m \geq 1$

$$|x_m(t,x_\circ) - x_\circ| \leq M\alpha(t) \leq \frac{MT}{2} \qquad (2.6)$$

وكذلك من دورية كل من المتتابعة $x_m(t,x_\circ)$ و $x_m(t-h,x_\circ)$ ومن (2.6) نجد أن المتباينة التالية

$$|x_m(t-h,x_\circ) - x_\circ| \leq \frac{MT}{2}$$

محققة لأجل $m \geq 1$ هذا يعني أن $x_m(t,x_\circ) \in D,\ \ x_m(t-h,x_\circ) \in D,$ لكل $x_\circ \in D_f$.

$$z_m(t,x_\circ) = \int_t^{t+T} g(s, x_m(s,x_\circ), x_m(s-h,x_\circ))ds, \qquad m = 0,1,2,..$$

علاوة على ذلك نجد أن

$$|z_1(t,x_\circ)| \leq |z_1(t,x_\circ) - z_\circ(t,x_\circ)| + |z_\circ(t,x_\circ)|$$

$$\leq \int_t^{t+T} (K|x_1(s,x_\circ) - x_\circ| + L|x_1(s-h,x_\circ) - x_\circ|)ds +$$

$$+ \int_t^{t+T} |g(s,x_\circ,x_\circ)|ds \leq (K+L)\frac{MT^2}{2} + NT$$

هذا يعني $z_1(t,x_\circ) \in D_1$ لكل $x_\circ \in D_f$ و $z_\circ(t,x_\circ) \in D_{1f}$ هكذا باستخدام الاستقراء الرياضي من الممكن اثبات صحة المتباينة التالية

$$|z_m(t,x_\circ) - z_\circ(t,x_\circ)| \leq (K+L)\frac{MT^2}{2} + NT$$

لكل $m \geq 1$ و $x_\circ \in D_f$، هذا يعني $z_m(t,x_\circ) \in D_1$ لكل $x_\circ \in D_f$ و $z_\circ(t,x_\circ) \in D_{1f}$.

الآن سوف نبرهن بأن متتابعة الدوال $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بانتظام في المجال (2.2) وبالتالي فإن نهاية هذه المتتابعة دورية ومستمرة في المجال نفسه.

من أجل ذلك نلاحظ بأن تقارب المتتابعة (2.1) كافي لتقارب المتسلسلة

$$x_\circ + [x_1(t,x_\circ) - x_\circ] + [x_2(t,x_\circ) - x_1(t,x_\circ)] + \dots\dots\dots +$$
$$+ [x_m(t,x_\circ) - x_{m-1}(t,x_\circ)] + \dots\dots\dots \qquad (2.7)$$

وذلــك لأن متتابعــة المجموعــات الجزئيــة للسلســلة (2.7) هــي المتتابعــة $x_m(t, x_\circ)$
كما أن

$$|x_2(t,x_\circ) - x_1(t,x_\circ)| \le \frac{T}{2}(E+QT)(K+L)M\alpha(t)$$
$$\le WM\alpha(t)$$

وبالمثل نجد أن

$$|x_3(t,x_\circ) - x_2(t,x_\circ)| \le W^2 M\alpha(t)$$

الآن نبرهن على صحة المتباينة التالية

$$|x_{m+1}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)| \le W^m M\alpha(t)$$

لأجل ....m=0,1,2

في الواقع لدينا

$$\begin{aligned}
&|x_{m+1}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)| \le \\
&(1-\frac{t}{T})[\int_0^t (K|x_m(s,x_\circ) - x_{m-1}(s,x_\circ)| + \\
&+L|x_m(s-h,x_\circ) - x_{m-1}(s-h,x_\circ)| + \\
&+Q\int_s^{s+T}(K|x_m(\tau,x_\circ) - x_{m-1}(\tau,x_\circ)| + \\
&L|x_m(\tau-h,x_\circ) - x_{m-1}(\tau-h,x_\circ)|)d\tau)]ds + \\
&+\frac{t}{T}[\int_t^T (K|x_m(s,x_\circ) - x_{m-1}(s,x_\circ)| + \\
&+L|x_m(\tau-h,x_\circ) - x_{m-1}(\tau-h,x_\circ)| + \\
&+Q\int_s^{s+T} K|x_m(\tau,x_\circ) - x_{m-1}(\tau,x_\circ)| + \\
&+L|x_m(\tau-h,x_\circ) - x_{m-1}(\tau-h,x_\circ)|)d\tau)]ds \\
&\le W^m M\alpha(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

وبالتالي من أجل........m=1,2,3، يكون لدينا

$$|x_m(t,x_\circ) - x_{m-1}(t,x_\circ)| \le W^{m-1} M\alpha(t)$$

من المتتابعة (2.8) ومن أجل $p \geq 1$ نحصل على

$$|x_{m+p}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)| \leq W^m M\alpha(t)\sum_{i=0}^{p-1} W^i \qquad (2.9)$$

و من العلاقة (2.9) نجد أن

$$|x_{m+p}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)| \leq W^m (E-W)^{-1} M\alpha(t) \qquad (2.10)$$

لكل $p \geq 1$ وبالاستفادة من العلاقة (2.10) والشرط (1.7) فإن متتابعة الدوال (2.1) متقاربة بانتظام في المجال (2.2) عندما $m \to \infty$ نضع

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_\circ) = x^\circ(t,x_\circ) \qquad (2.11)$$

بما أن متتابعة الدوال (2.1) مستمرة ودورية في t ذات دور يساوي T فإن نهاية متتابعة الدوال $x_m(t,x_\circ)$ مستمرة ودورية في t ذات دور يساوي T وبالتالي $x^o(t,x_o) = x(t,x_o)$ فضلاً عن ذلك باستخدام المأخوذة 1.1 والعلاقة (2.11) فإن المتباينتين (2.4) و (2.5) محققتين من أجل $m = 0,1,2,3,\ldots\ldots$ و.

نبرهن على وحدانية الحل $x(t, x_\circ)$ للنظام (1.1) . نفرض ان $\hat{x}(t,x_\circ)$ حل اخر للنظام (1.1) معرف و مستمر ودوري في t ذات دوره يساوي T ومن الشكل أدناه:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t [f(s,\hat{x}(s-h,x_\circ),\hat{x}(s-h,x_\circ),\\
\int_s^{s+T} g(\tau,\hat{x}(\tau,x_\circ),\hat{x}(\tau-h,x_\circ))d\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,\hat{x}(s,x_\circ),\\
\hat{x}(s-h,x_\circ), \int_s^{s+T} g(\tau,\hat{x}(\tau,x_\circ),\hat{x}(\tau-h,x_\circ))d\tau)ds]ds.
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

ولأجل ذلك سوف نثبت صحة المتباينة $x_\circ \in D_f$ لكل $\hat{x}(t,x_\circ) = x(t,x_\circ)$ الآن سوف نبرهن أن التالية بواسطة الاستقراء الرياضي

$$|\hat{x}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)| \leq W^m (E-W)^{-1} M^* \alpha(t) \qquad (2.13)$$

إذ أن

$$M^* = \max_{\substack{x\in[0.T]\\ \hat{x}\in D_f}} |f(t,\hat{x}(t,x_\circ),\hat{x}(t-h,x_\circ), \int_t^{t+T} g(s,\hat{x}(s,x_\circ),\hat{x}(s-h,x_\circ))ds)|$$

لنفرض صحة المتباينة (2.13) من أجل $m = p$ أي أن

$$|\hat{x}(t,x_\circ) - x_p(t,x_\circ)| \le W^p (E-W)^{-1} M^* \alpha(t)$$

ولنثبت صحة المتباينة التالية

$$|\hat{x}(t,x_\circ) - x_{p+1}(t,x_\circ)| \le W^{p+1} (E-W)^{-1} M^* \alpha(t)$$

في الواقع

$$|\hat{x}(t,x_\circ) - x_{p+1}(t,x_\circ)| \le (1-\frac{t}{T})\int_0^t [K|\hat{x}(s,x_\circ) - x_p(s,x_\circ)| +$$

$$+ L|\hat{x}(s-h,x_\circ) - x_p(s-h,x_\circ)| + Q\int_s^{s+T} (K|\hat{x}(\tau,x_\circ) - x_p(\tau,x_\circ)| +$$

$$+ L|\hat{x}(\tau-h,x_\circ) - x_p(s-h,x_\circ)|)d\tau]ds + \frac{t}{T}\int_t^T (K|\hat{x}(s,x_\circ) - x_p(s,x_\circ)| +$$

$$+ L|\hat{x}(s,x_\circ) - x_p(s,x_\circ)| + Q\int_s^{s+T} (K|\hat{x}(\tau-h,x_\circ) - x_p(\tau-h,x_\circ)| +$$

$$+ L|\hat{x}(\tau-h,x_\circ) - x_p(\tau-h,x_\circ)|)d\tau]ds$$

$$\le W^{p+1}(E-W)^{-1} M^* \alpha(t)$$

وبالتالي من أجل $m = 1,2.....$ نؤكد صحة المتباينة (2.13) إذن بواسطة الشرط (1.7) والعلاقة (2.11) نحصل على

$$\hat{x}(t,x_\circ) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,x_\circ) = x(t,x_\circ)$$

وهذا يبرهن أن الحلين متطابقان في المجال (2.2) أي أن الحل $x(t,x_o)$ هو حل وحيد للنظام (1.1).

البند الثالث : وجود الحل الدوري للنظام (1.1)

إن مسألة وجود الحل الدوري للنظام (1.1) مرتبطة وبشكل وحيد مع وجود صفرية الدالة $\Delta(x_\circ)$ والتي تمتلك الشكل التالي

$$\Delta(x_\circ) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^\circ(t, x_\circ), x^\circ(t-h, x_\circ), \int_t^{t+T} g(s, x^\circ(s, x_\circ), x^\circ(s-h, x_\circ)ds)dt \qquad (3.1)$$

وهذه الدالة لا يمكن اثبات وجودها إلا بطريقة التقريب $x_m(t, x_\circ)$ نهاية المتتابعة $x^\circ(t, x_\circ)$ إذ أن المتتالي وبخاصة من متتابعة الدوال الآتية

$$\Delta_m(x_\circ) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, x_\circ), x_m(t-h, x_\circ), \int_t^{t+T} g(s, x_m(s, x_\circ), x_m(s-h, x_\circ))ds)dt \qquad (3.2)$$

مبرهنة 3.1

إذا كانت فرضيات وشروط المبرهنة 1.1معطاة فإن المتباينة التالية

$$|\Delta(x_\circ) - \Delta_m(x_\circ)| \le W^{m+1}(E-W)^{-1}M$$

تتحقق لكل $m \ge 0$ و $x_\circ \in D_f$.

البرهان :

بواسطة المعادلات (3.1) و (3.2) يكون لدينا

$$\begin{aligned}|\Delta(x_\circ) - \Delta_m(x_\circ)| \le \frac{1}{T}\int_0^T [K\,|x^\circ(t, x_\circ) - x_m(t, x_\circ)| + \\ + L\,|x^\circ(t-h, x_\circ) - x_m(t-h, x_\circ) + \\ + Q\int_t^{t+T} (K\,|x^\circ(s, x_\circ) - x_m(s, x_\circ)| + \\ + L\,|x^\circ(s-h, x_\circ) - x_m(s-h, x_\circ)|)ds]dt\end{aligned}$$

و بواسطة المتباينة (2.5) نجد أن

$$|\Delta(x_\circ) - \Delta_m(x_\circ)| \le W^{m+1}(E-W)^{-1}M \qquad (3.3)$$

لكل $x_\circ \in D_f$.

بمساعدة المبرهنة 2.2 نقدم المبرهنة التالية أخذين بعين الاعتبار صحة المتباينة (3.3) لأجل $m \ge 1$.

مبرهنة3.2

لتكن كل من $f(t, x, y, z)$ و $g(t, x, y)$ في النظام (1.1) معرفة في الفترة $[a, b]$ على R^1 ودورية في t ذات دور يساوي T بفرض أن متتابعة الدوال (3.2) تحقق المتباينين التاليين

$$\left.\begin{aligned} \min_{a+\frac{MT}{2}\le x_\circ \le b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x_\circ) &\le -\frac{W^{m+1}M}{1-W}, \\ \max_{a+\frac{MT}{2}\le x_\circ \le b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x_\circ) &\ge \frac{W^{m+1}M}{1-W}, W\ne 1 \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

لاجل $m \ge 0$ أذان $\left\| W=(K+L)(1+QT)\frac{T}{2} \right\|$ و M,K,L,Q ثوابت موجبة، عندئذ النظام (1.1) له حل دوري $x=x(t)$ لأجل $x(0)\in\left[a+\frac{MT}{2}, b-\frac{MT}{2}\right]$.

البرهان :

لتكن x_2 و x_1 أية نقطتين في الفترة $\left[a+\frac{MT}{2}, b-\frac{MT}{2}\right]$ إذ أن

$$\left.\begin{aligned} \Delta_m(x_1) &= \min_{a+\frac{MT}{2}\le x_\circ \le b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x_\circ), \\ \Delta_m(x_2) &= \max_{a+\frac{MT}{2}\le x_\circ \le b-\frac{MT}{2}} \Delta_m(x_\circ), \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

باستعمال المتباينتين (3.4) و (3.5) يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned} \Delta(x_1) &= \Delta_m(x_1) + (\Delta(x_1) - \Delta_m(x_1)) < 0, \\ \Delta(x_2) &= \Delta_m(x_2) + (\Delta(x_2) - \Delta_m(x_2)) > 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

من استمرارية الدالة $\Delta(x_\circ)$ والعلاقتين (3.6) فإنه يوجد نقطة منعزلة منفردة $x^\circ = x_\circ$ وإن $x_\circ \in [x_1, x_2]$ بحيث أن $\Delta(x_\circ) = 0$ هذا يعني أن للنظام (1.1) حل دوري $x = x(t)$ لكل $x(0)\in\left[a+\frac{MT}{2}, b-\frac{MT}{2}\right]$.

ملاحظة 3.1

تم برهان المبرهنة 3.2 عندما $R^n = R^1$ بمعنى آخر عندما تكون $x_\circ$ كمية غير متجهة.

مبرهنة3.3

لتكن

$$\Delta(x_\circ)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^\circ(t,x_\circ),x^\circ(t-h,x_\circ),$$

$$\int_t^{t+T} g(s,x^\circ(s,x_\circ),x^\circ(s-h,x_\circ))ds)dt$$

حيث الدالة $x^\circ(t,x_\circ)$ نهاية المتتابعة الدوال الدورية (2.1) عندئذ تكون المتباينتان الآتيتان متحققتان

$$|\Delta(x_\circ)|\le M, \qquad (3.7)$$

$$|\Delta(x_\circ^1)-\Delta(x_\circ^2)|\le\frac{2W}{T}(E-W)^{-1}|x_\circ^1-x_\circ^2| \qquad (3.8)$$

لأجل النقاط $x_\circ,x_\circ^1,x_\circ^2\in D_f$.

البرهان :

من صفات الدالة $x^\circ(t,x_\circ)$ المثبتة بواسطة المبرهنة 1.1 فإن الدالة $\Delta=\Delta(x_\circ)$ ، $x_\circ\in D_f$ مستمرة ومحددة بالمتجه الموجب M في المجال (1.2).

من العلاقة (3.1) فإن المتباينة التالية تتحقق

$$\left|\Delta(x_\circ^1)-\Delta(x_\circ^2)\right|\le\frac{2W}{T}\left|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)\right| \qquad (3.9)$$

إذ أن

$$x(t,x_\circ^k)=x_\circ^k+\int_0^t[f(s,x(s,x_\circ^k),x(s-h,x_\circ^k),\int_s^{s+T}g(\tau,x(\tau,x_\circ^k),x(\tau-h,x_\circ^k))d\tau)-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,x_\circ^k),x(s-h,x_\circ^k),\int_s^{s+T}g(\tau,x(\tau,x_\circ^k),x(\tau-h,x_\circ^k))d\tau)ds]ds, \qquad K=1,2,...$$

بما أن $x^\circ(t,x_\circ)$ تحقق المعادلة (2.3) ومن المأخوذة 1.1 نجد أن

$$|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)|\le$$

$$\le|x_\circ^1-x_\circ^2|+(K+KQT)\frac{T}{2}|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)|+$$

$$+(L+LQT)\frac{T}{2}|x^\circ(t-h,x_\circ^1)-x^\circ(t-h,x_\circ^2)| \qquad (3.10)$$

تتحقق من اجل K=1,2 .

من دورية $x^\circ(t,x_\circ)$ و $x^\circ(t-h,x_\circ)$ يكون لدينا

$$| x^{\circ}(t,x_{\circ}^{1}) - x^{\circ}(t,x_{\circ}^{2}) | \leq | x_{\circ}^{1} - x_{\circ}^{2} | + W | x^{\circ}(t,x_{\circ}^{1}) - x^{\circ}(t,x_{\circ}^{2}) | \quad (3.11)$$

إذن

$$| x^{\circ}(t,x_{\circ}^{1}) - x^{\circ}(t,x_{\circ}^{2}) | \leq (E - W)^{-1} | x_{\circ}^{1} - x_{\circ}^{2} | \qquad (3.12)$$

بتعويض المتباينة (3.12) في (3.9) نحصل على (3.8).

ملاحظة 3.2

تؤكد المبرهنة3.3 استقرارية الحل لنظام المعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطيـــة ذات تـــأخر المتغير المستقل(1.1) وذلك أنه عندما يحدث تغيير طفيف في النقطة $x_{\circ}$ فإن تغييراً طفيفاً ســيقابله فـــي الدالة $\Delta = \Delta(t, x_{\circ})$ (لاجل هذة الملاحظة راجع المصدر[2]).

المصادر

1-Butris R.N. J.Educ. And Sci. Vol. (25), (1994), P.P. (156-167).
2-MitropolskyYu. and Martynyuk, D.I. Periodic solutions for the oscillation systems with retarded argument, Ukrain, Kiev, (1979).
3-Samoilenko A.M. and Ronto, N.I. A numerical-analytic method for investigation of periodic solutions, Ukrain, Kiev, (1976).
4-Seeto, A.S. M.Sc. College of Education, University of Mosul(2001).(In Arabic).