شروط الحل لمسالة قيم حدودية خاصة بطريقة التشويش

اكرم حسان محمود
قسم علوم الحاسبات - كلية التربية
جامعة الموصل

اسراء عبد العالي جاسم
قسم علوم الحاسبات - كلية التربية
جامعة الموصل

تاريخ الاستلام 2005/10/9

تاريخ القبول 2006/1/3

ABSTRACT

This paper deals with the study of solvability condition for certain boundary value problem with boundary conditions by using perturbation method [5] .

$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + w^2\varphi = 0$

$\varphi_y = 0$ at $y = a$

$\varphi_y = \in k_w \varphi_x \mathrm{Cos} k_w x$ at $y = b + \in \mathrm{Sin} k_w x$

Since w, k_w are constants, and $\in$ is a small parameter .

الملخص

يتضمن هذا البحث تحديد شرط امكانية الحل لمسالة قيمة حدودية خاصة

$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + w^2\varphi = 0$

عندما $y = a$ $\varphi_y = 0$

عندما $y = b + \in \mathrm{Sin} k_w x$ $\varphi_y = \in k_w \varphi_x \mathrm{Cos} k_w x$

حيث w , k_w ثوابت و $\in$ معلم صغير .

وذلك باستخدام طريقة التشويش المعطاة في A.H.Nayhf [5] .

المقدمة

ان معظم المسائل التي تواجه الفيزيائيين والرياضيين تتضمن صعوبات نتيجة احتوائها على معادلات تفاضلية او جبرية غير خطية ومعادلات ذات معاملات متغيرة كذلك المسائل ذات الشروط الحدودية غير الخطية التي تحول دون الوصول الى الحلول المضبوطة لها .

ولحل لمثل هذه المسائل نلجأ الى الحلول المحاذية ومن بين التقنيات التقريبية هي طريقة التشويش ووفقا لهذه الطريقة فان الحل يمثل من خلال بعض الحدود الاولى للتوسعات المحاذية [2] .

ان طريقة التشويش هي دراسة تاثيرات صغيرة في النموذج الرياضي وهذا النموذج يمكن ان يعبر عنه بمعادلة جبرية او معادلة تفاضلية ورياضيا فان هذه الطريقة مكافئة لحل تقريبي لمسالة القيم الذاتية لمؤثر خطي .

استخدم [3] طريقة التشويش لايجاد شرط امكانية الحل بمسالة قيم ذاتية خاصة ومن الرتبة الثانية وذلك باستخدام طريقة التشويش المعطاة في [5] .

في هذا البحث ندرس شرط امكانية الحل لمعادلة تفاضلية جزئية ومن الشكل :

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + w^2\varphi = 0$$

ذات الشروط الحدودية

$$y = a \quad \text{عندما} \quad \varphi_y = 0$$

$$y = b + \in \mathrm{Sin}k_w x \quad \text{عندما} \quad \varphi_y = \in k_w \varphi_x \mathrm{Cos}k_w x$$

حيث w , k_w ثوابت و $\in$ معلم صغير .

تعريف (1): المعادلة المتزاملة ذاتيا Self-Adjoint Equation [1]

يقال ان المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

متزاملة ذاتيا اذا كانت المعادلة المزاملة

$$\bar{L}(z) \equiv (a_2(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_0(x)z = 0$$

لها نفس الصورة مثل المعادلة الاصلية أي : -

$$\bar{L}(y) = L(y)$$

شروط إمكانية الحل لمعادلة تفاضلية جزئية مع الشروط الحدودية :

يتضمن هذا البحث ايجاد شروط امكانية الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية .

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + w^2\varphi = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$y = a \quad \text{عندما} \quad \varphi_y = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$\varphi_y = \in k_w \varphi_x \mathrm{Cos}k_w x \quad \text{عندما} \quad y = b + \in \mathrm{Sin}k_w x \qquad ...(3)$$

وذلك باستخدام طريقة التشويش .
يمكن تقسيم هذه الدراسة الى الاجزاء التالية :

I – تحويل الشرط الحدودي من $y = b + \in \mathrm{Sin}\, k_w x$ الى $y = b$.

نفرض ان

$$\varphi = \varphi_0(x,y) + \in \varphi_1(x,y) + \in^2 \varphi_2(x,y) + ... \qquad ...(4)$$

نلاحظ ان الشرط الحدودي (3) يتحقق عندما $y = b + \in \mathrm{Sin}k_w x$ وعليه $\in$ تظهر في الدالة φ بالاضافة الى المعاملات ولكي نتمكن من تطبيق الطريقة الترجافية التي تعتمد على مساواة المعاملات ذات أسس متساوية لـ $\in$ ولكي نحذف $\in$ فاننا نستخدم ما هو معروف عادة بتحويل الشرط الحدودي. في هذه المسالة نحول الشرط الحدودي من $y = b + \in \mathrm{Sin}k_w x$ الى $y = b$ باستخدام مفكوك تايلر :

$$\varphi_y(x, b + (\in \mathrm{Sin}k_w x) = \varphi_y(x,b) + \in \varphi_{yy}(x,b)\mathrm{Sin}k_w x + \frac{1}{2!}\in^2 \varphi_{yyy}(x,b)\mathrm{Sin}^2 k_w x + ...$$

كذلك نوجد مفكوك φ_x عندما $y = b + \in \mathrm{Sin}\, k_w x$

$$\varphi_x(x, b + (\mathrm{Sin}k_w x) = \varphi_x(x,b) + \in \varphi_{xy}(x,b)\mathrm{Sin}k_w x + \frac{1}{2!}\in^2 \varphi_{xyy}(x,b)\mathrm{Sin}^2 k_w x + ...$$

وعند تعويض قيم φ_y و φ_x في المعادلة (3) ينتج :

$$\varphi_y(x,b) + \varphi_{yy}(x,b) \in \mathrm{Sin}k_w x + ... = \in k_w \left[\varphi_x(x,b) + \varphi_{xy}(x,b) \in \mathrm{Sin}k_w x + ...\right]\mathrm{Cos}k_w x \qquad ...(5)$$

ثم نعوض المعادلة (4) في كل من المعادلات (1) ، (2) ، (5) وبعد التبسيط ومساواة معاملات قوى $\in$ في الاطراف المتناظرة من المعادلات أعلاه ينتج :

لاجل $\in^0$

$$\varphi_{0xx}+\varphi_{0yy}+w^2\varphi_0 = 0 \qquad ...(6)$$

$$\varphi_{0y}(x,a)=0 \qquad ...(7)$$

$$\varphi_{0y}(x,b)=0 \qquad ...(8)$$

لاجل $\in^1$

$$\varphi_{1xx}+\varphi_{1yy}+w^2\varphi_1 = 0 \qquad ...(9)$$

$$\varphi_{1y}(x,a)=0 \qquad ...(10)$$

$$\varphi_{1y}(x,b)=-\varphi_{0yy}(x,b)\text{Sink}_w x+k_w\varphi_{0x}(x,b)\text{Cosk}_w x \qquad ...(11)$$

II - تطبيق طريقة فصل المتغيرات

بما ان المسالة (6)-(8) ذات معاملات ثابتة ومتجانسة أذن يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات كالاتي :

نفرض

$$\varphi_0 = X(x).Y(y) \qquad ...(12)$$

$$x''y+xy'+w^2xy=0$$

$$\varphi_{0y}(x,a)=0 \;\Rightarrow\; X(x).Y'(a)=0 \Rightarrow y'(a)=0 \qquad ...(13)$$

$$\varphi_{0y}=(x,b)=0 \;\Rightarrow\; X(x)Y'(b)=0 \Rightarrow y'(b)=0 \qquad ...(14)$$

$$\frac{-x''}{x}=\frac{y''}{y}+w^2=c$$

$$\Rightarrow \frac{-x''}{x}=c \qquad , \; c\rangle 0$$

نفرض ان $c=k^2$

$$\Rightarrow x''+k^2x=0$$

وحل هذه المعادلة هو

$$x=e^{\pm ikx} \qquad ...(15)$$

والحل العام للمعادلة

$$y'' + (w^2 - k^2)y = 0$$

هو

$$y = C_1 \mathrm{Sin}\sqrt{w^2 - k^2}\,y + C_2 \mathrm{Cos}\sqrt{w^2 - k^2}\,y \qquad ...(16)$$

وبتعويض الشروط (13) ،(14) في (16) وايجاد محدد المعاملات ومساواته بالصفر نحصل على :

$$\therefore y = C_1 \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}y + C_2 \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}y \qquad ...(17)$$

حيث

$$k_n^2 = w^2 - \left(\frac{n\pi}{(b-a)}\right)^2 \qquad , \qquad n = 0,1,.....$$

الان نعوض (17) ، (15) في (12) فنحصل على الاتي :

$$\varphi_0 = e^{ik_n x}\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}y + \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}y\right) \qquad ...(18)$$

ونعوض المعادلة (18) في المعادلة (11) ينتج :

$$\varphi_{1y}(x,b) = e^{ik_n x}\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b + \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\mathrm{Sin}k_w x$$

$$+ k_w \mathrm{Cos}k_w x\left[ik_n e^{ik_n x}\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a} + \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\right]$$

$$= e^{ik_n x}\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \cdot \left(\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b + \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\frac{-1}{2}i\left(e^{ik_w x} - e^{-ik_w x}\right) - \frac{1}{2}ik_w k_n\, e^{ik_n x}$$

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b + \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\left(e^{ik_w x} + e^{-ik_w x}\right)$$

$$= \delta_1 e^{i(k_n + k_w)x} + \delta_2 e^{i(k_n - k_w)x} \qquad ...(19)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b + \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\left(k_n k_w - \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\right)\\ \delta_2 &= \frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b + \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\left(k_n k_w + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\right)\end{aligned}\right\} \qquad ...(20)$$

لايجاد حل المعادلات (9) ، (10) (19) لـ φ_1 نلاحظ ان الشرط الحدودي (19) غير متجانس لذلك نفصل المتغيرات كالأتي :

$$\varphi_1 = \Phi_1(y)e^{i(k_n + k_w)x} + \Phi_2(y)e^{i(k_n - k_w)x} \qquad ...(21)$$

ثم نعوض (21) في (9) ، (10) ، (19) فنحصل على :

$$\Rightarrow \left[\Phi_1''(y)+\alpha_1^2\Phi_1(y)\right]e^{i(k_n+k_w)x}+\left[\Phi_2''(y)+\alpha_2^2\Phi_2(y)\right]e^{i(k_n-k_w)x}=0 \qquad ...(22)$$

حيث

$$\alpha_1^2=w^2-(k_n+k_w)^2 \quad , \quad \alpha_2^2=w^2-(k_n-k_w)^2 \qquad ...(23)$$

$$\Phi_1'(a)e^{i(k_n+k_w)x}+\Phi_2'(a)e^{i(k_n-k_w)x}=0$$

$$\Phi_1'(b)e^{i(k_n+k_w)x}+\Phi_2'(b)e^{i(k_n-k_w)x}=\delta_1 e^{i(k_n+k_w)x}+\delta_2 e^{i(k_n-k_w)x}$$

وبمقارنة معاملات الدوال الاسية في الطرفين نجد ان

$$\Rightarrow \Phi_1''+\alpha_1\Phi_1=0 \quad , \Phi_1'(a)=0 \quad , \quad \Phi_1'(b)=\delta_1 \qquad ...(24)$$

$$\Phi_2''+\alpha_2\Phi_2=0 \quad , \Phi_2'(a)=0 \quad , \quad \Phi_2'(b)=\delta_2 \qquad ...(25)$$

ان الحل العام لــ (24) هو

$$\Phi_1=C_1\text{Cos}\alpha_1 y+C_2\text{Sin}\alpha_1 y$$

وان

$$\Rightarrow C_1=\frac{-\delta_1\text{Cos}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)} \quad , \quad C_2=\frac{-\delta_1\text{Sin}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)}$$

$$\therefore \Phi_1=\frac{-\delta_1\text{Cos}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)}\text{Cos}\alpha_1 y-\frac{\delta_1\text{Sin}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)}\text{Sin}\alpha_1 y$$

وبنفس الطريقة نجد حل Φ_2 وهو

$$\Phi_2=\frac{-\delta_2\text{Cos}\alpha_2 a}{\alpha_2\text{Sin}\alpha_2(b-a)}\text{Cos}\alpha_2 y-\frac{\delta_2\text{Sin}\alpha_2 a}{\alpha_2\text{Sin}\alpha_2(b-a)}\text{Sin}\alpha_2 y,$$

$$\varphi_1=\left[\frac{-\delta_1\text{Cos}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)}\text{Cos}\alpha_1 y-\frac{\delta_1\text{Sin}\alpha_1 a}{\alpha_1\text{Sin}\alpha_1(b-a)}\text{Sin}\alpha_1 y\right]e^{i(k_n+k_w)x}$$

$$+\left[\frac{-\delta_2\text{Cos}\alpha_2 a}{\alpha_2\text{Sin}\alpha_2(b-a)}\text{Cos}\alpha_2 y-\frac{\delta_2\text{Sin}\alpha_2 a}{\alpha_2\text{Sin}\alpha_2(b-a)}\text{Sin}\alpha_2 y\right]e^{i(k_n-k_w)x} \qquad ......(26)$$

وبتعويض (18) ، (26) في (4) ينتج

$$\varphi = e^{ikx}\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}y+\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}y\right)$$

$$+\in\left[\frac{-\delta_1\mathrm{Cos}\alpha_1 a}{\alpha_1\mathrm{Sin}\alpha_1(b-a)}\mathrm{Cos}\alpha_1 y-\frac{\delta_1\mathrm{Sin}\alpha_1 a}{\alpha_1\mathrm{Sin}\alpha_1(b-a)}\mathrm{Sin}\alpha_1 y\right]e^{i(k_n+k_w)x}$$

$$+\in\left[\frac{-\delta_2\mathrm{Cos}\alpha_2 a}{\alpha_2\mathrm{Sin}\alpha_2(b-a)}\mathrm{Cos}\alpha_2 y-\frac{\delta_2\mathrm{Sin}\alpha_2 a}{\alpha_2\mathrm{Sin}\alpha_2(b-a)}\mathrm{Sin}\alpha_2 y\right]e^{i(k_n-k_w)x}+\ldots \qquad \ldots(27)$$

نجد انه اذا كان $\mathrm{Sin}\alpha_1(b-a)=0$ او $\mathrm{Sin}\alpha_2(b-a) = 0$ فان الحد الثاني يقترب من المالانهايـــة وبالتالي فان المتسلسلة (27) تكون متباعدة .

$$\mathrm{Sin}\alpha_1(b-a)=0 \Rightarrow \quad \alpha_1=\left(\frac{m\pi}{b-a}\right) \ , \ (m=0,1,\ldots\ldots)$$

$$w^2 - (k_n+k_w)^2 \approx \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 \qquad \text{او} \qquad w^2 - (k_n+k_w)^2 \approx \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$$

ولكن

$$w^2 - \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 = k_m^2$$

لهذا فان

$$(k_n+k_w)^2 \approx k_m^2 \quad \text{أو} \quad (k_n-k_w)^2 \approx k_m^2 \quad \text{أو} \quad k_w \approx \mp k_n \mp k_m$$

ولكي تكون المتسلسلة متقاربة عندما $k_w \approx k_n - k_m$ نفرض الوسيط σ بالشكل الاتي

$$K_w = K_n - k_m + \in\sigma$$

III – استخدام طريقة المقاييس المتعددة [4]

باستخدام طريقة المقاييس المتعددة نعرف المتغيرات الجديدة الاتية :

$$x_0 = x \qquad ، \quad x_1 = \in x$$

ثم نفرض المتسلسلة بالشكل الاتي :

$$\varphi(x,y,\in)=\varphi(x_0,x_1,y,\in)=\varphi_0(x_0,x,y)+\in\varphi_1(x_0,x_1,y) \quad ...(28)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x_0}+\in\frac{\partial}{\partial x_1}+...\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+2\in\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial x_1}+...\end{aligned}\right] \quad ...\ (29)$$

الان نعوض (28) و(29) في (1) ، (2) ، (5) ونبسط ونساوي معاملات قوى $\in$ في الأطراف المتناظرة من المعادلات ونحصل على :

لاجل $\in^0$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}+w^2\varphi_0=0\\ &\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}=0 \quad \text{عندما} \quad y=a\end{aligned}\right] \quad ...(.30)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}=0 \quad \text{عندما} \quad y=b \quad ...(31)$$

لاجل $\in^1$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+w^2\varphi_1=-2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0\partial x_1}\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \quad \text{عندما} \quad y=a\end{aligned}\right] \quad ...(32)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{-\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\operatorname{Sin}k_w x_0+k_w\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\operatorname{Cos}k_w x_0 \quad \text{عندما } y=b \quad ...(33)$$

حيث $\operatorname{Sin}k_w x$ ، $\operatorname{Cos}k_w x$ يعبر عنهما بواسطة x_0 وهذا يؤدي الى إبعاد احتمال كون $k_w=0$.

ويمكـــن ايجـــاد الحـــل العـــام لـــــ (30) بطريقـــة فـــصل المتغيـــرات لـــذا بـــدلا مـــن ابقاء φ_0 تحوي على نمط واحد سنجعلها تحوي على نمطين هما n , m ولهذا يمكن كتابة الحل بالـشكل الاتي :

$$\varphi_0 = A_n(x_1)\left(Cos\frac{n\pi}{b-a}y + Sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)e^{ik_n x_0} +$$

$$+A_m(x_1)\left(Cos\frac{m\pi}{b-a}y + Sin\frac{m\pi}{b-a}y\right)e^{ik_m x_0} \qquad ...(34)$$

حيث k_m ، k_n معرفتان سابقا و A_m ، A_n نجدهما لاحقا .

الان نعوض (34) في (32) ، (33) ينتج :

$$\therefore \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + w^2\varphi_1 = -2ik_n A_n'(x_1)\left(Cos\frac{n\pi}{b-a}y + Sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)e^{ik_n x_0}$$

$$-2ik_m A_m'(x_1)\left(Cos\frac{m\pi}{b-a}y + Sin\frac{m\pi}{b-a}y\right)e^{ik_m x_0} \qquad ...(35)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \cdot \left(Cos\frac{n\pi}{b-a}b + Sin\frac{n\pi}{b-a}b\right)A_n e^{ik_n x_0} Sin k_w x_0 +$$

$$+\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 \cdot \left(Cos\frac{m\pi}{b-a}b + Sin\frac{m\pi}{b-a}b\right)A_m e^{ik_m x_0} Sin k_w x_0 +$$

$$+ik_n.k_w\left(Cos\frac{n\pi}{b-a}b + Sin\frac{n\pi}{b-a}b\right)A_n e^{ik_n x_0}.Cos_w x_0 +$$

$$+ik_m k_w.\left(Cos\frac{m\pi}{b-a}b + Sin\frac{m\pi}{b-a}b\right)A_m e^{ik_m x_0} Cos k_w x_0$$

$$=\frac{-1}{2}i\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2.\left(\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b+\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)A_n e^{ik_n x_0}(e^{ik_w x_0}-e^{-ik_w x_0})-\frac{1}{2}i\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2.$$

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b+\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b\right)A_m e^{ik_m x_0}(e^{ik_w x_0}-e^{-ik_w x_0})+\frac{1}{2}ik_n k_w.A_n.$$

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b+\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)e^{ik_n x_0}(e^{ik_w x_0}+e^{-ik_w x_0})+\frac{1}{2}ik_m k_w.A_m.$$

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b+\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b\right)e^{ik_m x_0}(e^{ik_w x_0}+e^{-ik_w x_0})$$

$$\therefore\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\delta_{1n}A_n e^{i(k_n+k_w)x_0}+\delta_{2n}A_n e^{i(k_n-k_w)x_0}$$

$$+\delta_{1m}A_m e^{i(k_m+k_w)x_0}+\delta_{2m}A_m e^{i(k_m-k_w)x_0}$$ عندما $y=b$ ...(36)

حيث ان

$$\delta_{1n}=\frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b+\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\left(k_n k_w-(\frac{n\pi}{b-a})^2\right)$$

$$\delta_{2n}=\frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b+\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\left(k_n k_w+(\frac{n\pi}{b-a})^2\right)$$

$$\delta_{1m}=\frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b+\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b\right)\left(k_n k_w-(\frac{m\pi}{b-a})^2\right)$$

$$\delta_{2m}=\frac{1}{2}i\left(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b+\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b\right)\left(k_m k_w+(\frac{m\pi}{b-a})^2\right)$$

لايجاد شروط امكانية الحل للمسالة (36) و (32)

نعوض $k_w=k_n-k_m+\in\sigma$ في (36) فنحصل على :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\delta_{1n}A_n e^{i(2k_n-k_m+\in\sigma)x_0}+\delta_{2n}A_n e^{i(k_m-\in\sigma)x_0}$$

$$+\delta_{1m}A_m e^{i(k_n+\in\sigma)x_0}+\delta_{2m}A_m e^{i(2k_m-k_n-\in\sigma)x_0}$$ عندما $y=b$

أو

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \delta_{1n} A_n e^{i\sigma x_1} e^{i(2k_n - k_m)x_0} + \delta_{2n} A_n e^{-i\sigma x_1} e^{ik_m x_0}$$

$$+ \delta_{1m} A_m e^{i\sigma x_1} e^{ik_n x_0} + \delta_{2m} A_m e^{-i\sigma x_1} e^{i(2k_m - k_n)x_0}$$ $y = b$ عندما ...(37)

حيث $x_1 = \in x_0$

نلاحظ من المعادلتين (37) و (35) ان الحدود التي تحوي e^{iknx0} ، e^{ikmx0} قد تؤدي إلى تعقيدات لذا فان شروط إمكانية الحل يجب ان تفرض عليها وهذه الشروط يمكن الحصول عليها بالبحث عن حل خاص يناظر هذه الحدود وبالشكل الاتي :

$$\varphi_1 = \Phi_n(x_1, y) e^{ik_n x_0} + \Phi_m(x_1, y) e^{ik_m x_0} \qquad ...(38)$$

نعوض (38) في (35) ، (32) ، (37) ومساواة معاملات e^{iknx0} ، e^{ikmx0} في الطرفين نحصل على :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \Phi_n = -2ik_n A'_n \left(\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{b-a} y + \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{b-a} y\right) \\
&\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = 0 \quad \text{عندما} \quad y = a \\
&\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \delta_{1m} A_m e^{i\sigma x_1} \quad \text{عندما} \quad y = b
\end{aligned}\right] \qquad ...(39)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} + \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 \Phi_m = -2ik_m A'_m \left(\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{b-a} y + \mathrm{Sin}\frac{m\pi}{b-a} y\right) \\
&\frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = 0 \quad \text{عندما} \quad y = a \\
&\frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = \delta_{2n} A_n e^{-i\sigma x_1} \quad \text{عندما} \quad y = b
\end{aligned}\right] \qquad ...(40)$$

حيث

$$w^2 - k^2{}_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$$

$$w^2 - k^2{}_m = \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$$

وهكذا فان ايجاد شروط إمكانية الحل لـ φ_1 تحول الى ايجاد شروط امكانية الحل لـ Φ_m ، Φ_n .

نلاحظ أن المعادلة (39) متزاملة ذاتيا . وان الحل للمسالة المتزاملة يمكن ان يؤخذ

$$u=\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)$$

والان نضرب المعادلة (39) بـــ u ونكامل الطرفين بالتجزئة من a الى b فنحصل على

$$\int_a^b u\left(\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}+\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\Phi_n\right)dy=\int_a^b -2ik_nA'_n\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)u\,dy$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(u''+\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2u\right)\Phi_n\,dy+\left[\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}u-\Phi_n u'\right|_a^b$$

$$=\int_a^b -2ik_nA'_n u\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)dy \qquad ...(41)$$

ونعوض بـــ u في المعادلة (41) فيصبح الطرف الأيسر بالشكل :

$$\int_a^b -\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)+\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)=0$$

ويصبح الطرف الايمن كالاتي :

$$2ik_nA'_n\int_a^b\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)^2dy$$

$$=-2ik_nA'_n\int_a^b\left(\cos^2\frac{n\pi}{b-a}y+2\sin\frac{n\pi}{b-a}y\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin^2\frac{n\pi}{b-a}y\right)dy$$
$$=-2ik_nA'_n(b-a)$$

للحصول على الشروط الحدودية للمسالة المتزاملة (41) نضع الطرف الايمن صـــفر ونـــستخدم الشروط المتجانسة.

$$\frac{\partial\Phi_n(b)}{\partial y}u(b)-\Phi_n(b)u'(b)-\frac{\partial\Phi_n(a)}{\partial y}u(a)+\Phi_n(a)u'(a)=0$$

ونساوي معاملات $\Phi_n(a)$ و $\Phi_n(b)$ بالصفر نحصل على

$$u'(b)=0 \quad , \quad u'(a)=0$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)\Bigg|_a^b=-2ik_nA'_n\int_a^b\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}y+\sin\frac{n\pi}{b-a}y\right)^2dy$$

$$\delta_{1m}A_m e^{i\sigma\sigma_1}\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}b+\sin\frac{n\pi}{b-a}b\right)=-2ik_nA'_n(b-a)$$

$$\Rightarrow A'_n=\left[\delta_{1m}A_m e^{i\sigma x_1}\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}b+\sin\frac{n\pi}{b-a}b\right)\right]\frac{ik_n^{-1}}{2(b-a)} \qquad ...(42)$$

وبنفس الطريقة اذا كانت $m \neq 0$ فان شرط الحل للمعادلة (39) هو

$$A'_m=\left[\delta_{2n}A_n e^{i\sigma x_1}\left(\cos\frac{m\pi}{b-a}b+\sin\frac{m\pi}{b-a}b\right)\right]\frac{ik_m^{-1}}{2(b-a)} \qquad ...(43)$$

اذا فرضنا ان

$$A_m=a_m e^{i\gamma_2 x_1} \quad , \quad A_n=a_n e^{i\gamma_1 x_1} \qquad ...(44)$$

حيث أن a_n , a_m , γ_1 , γ_2 ثوابت

$\therefore$ نستنتج من (43) ، (42) ان

$$i\gamma_1 a_n=\left[\delta_{1m}a_m\left(\cos\frac{n\pi}{b-a}b+\sin\frac{n\pi}{b-a}b\right)\right]\frac{ik_n^{-1}}{2(b-a)} \qquad ...(45)$$

$$i\gamma_2 a_m=\left[\delta_{2n}a_n\left(\cos\frac{m\pi}{b-a}b+\sin\frac{m\pi}{b-a}b\right)\right]\frac{ik_m^{-1}}{2(b-a)} \qquad ...(46)$$

$$\gamma_2=\gamma_1-\sigma \qquad ...(47)$$

وبحذف γ_2 و a_m من (45) باستخدام (47) تؤدي الى :

$$\gamma_1(\gamma_1-\sigma)=\left[\delta_{1m}\delta_{2m}\cdot\left(\text{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\cdot\left(\text{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b\right)\right]$$
$$\cdot\left(\frac{k_n^{-1}}{2(b-a)}\right)\left(\frac{k_m^{-1}}{2(b-a)}\right)$$

$$\gamma_1^2-\sigma\gamma_1-\left[\delta_{1m}\delta_{2m}\cdot\left(\text{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\cdot\left(\text{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b\right)\right]$$
$$\cdot\left(\frac{k_n^{-1}k_m^{-1}}{4(b-a)^2}\right)=0$$

$$\gamma_1=\frac{1}{2}\sigma\pm\frac{1}{2}\left[\sigma^2+\delta_{1m}\delta_{2m}\cdot\left(\text{Cos}\frac{n\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{n\pi}{b-a}b\right)\cdot\left(\text{Cos}\frac{m\pi}{b-a}b+\text{Sin}\frac{m\pi}{b-a}b\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{k_n^{-1}k_m^{-1}}{b-a}\right)\right]^{1/2} \qquad \text{...(48)}$$

وعند تعويض قيمة (γ) في (44) نجد قيم A_n, A_m وبعد تعويضها في (43) ، (42) نجد شروط الحل للمعادلتين (40) ، (39) .

المصادر

1. رحمي ابراهيم ابراهيم عبد الكريم " نظرية المعادلات التفاضلية " عمادة شؤون المكتبات – جامعة الرياض – المملكة العربية السعودية (1981).

2. Kato T. "Perturbation Theory for Linear Operators" Springer–Verlag. New York. (1966)

3. Mahmood A.H "Solvability Conditions for Certain Eigenvalue Problem" Journal of Education and Science College of Education University of Mosul . Vol. (33), (1998).

4. Nayfeh A.H. "Perturbation Methods" Wiley-Interscience Publication. (1973)

5. Nayfeh A.H. "Introduction to Perturbation Methods" John Wiley and Sons. (1981).