بعض المبرهنات في الوجود والوحدانية لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية

رعد نوري بطرس
قسم الرياضيات – كلية التربية
جامعة الموصل

ميرنا عادل عزيز
قسم الرياضيات – كلية التربية
جامعة الموصل

تاريخ الاستلام 2005/11/27
تاريخ القبول 2006/3/7

ABSTRACT

In this paper we study the existence and uniqueness solution for system of nonlinear integro-differential equations by usingRiemann integral. For this purpose, the study depends upon(Picard approximation Method) and (Banach fixed point theorem).

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة وجود الحل ووحدانيته لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطيةعلى وفق مفهوم ريمان للتكامل .وذلك باستخدام طريقتي بيكارد للتقريب ومبرهنة النقطة الثابتة لـ (باناخ).

البند الاول: المقدمة

تُعد المعادلات التكاملية-التفاضلية مادة أساساً في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الايطالي فولتيرا(V . Volterra)[8] والعالم السويدي فريدهولم (I . Fredholm) [3] في وضع هذه المعادلات واستخدامها في دراساتهما ، فكان أثرهما كبيراً في تطوير المعادلات التكاملية-التفاضلية التي تؤدي دوراً بارزاً في بناء التحليل الرياضي والدالي،وهكذا توالت الدراسات والبحوث الحديثة وكما في عدد من المراجع [9,5,4] .

ندرس في هذا البحث نظام المعادلات التكامليـــة-التفاضلية اللاخطية من الشكل في أدناه:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A+B(t))x(t) + f(t,x(t),\int_{t}^{t+T} g(s,x(s))ds) \quad ....(1)$$

إذ إن $D, x \in D \subset R^n$ مجال مغلق ومقيد.

الدالتين المتجهتين

$$f(t,x,y) = (f_1(t,x,y), f_2(t,x,y), ..., f_n(t,x,y))$$
$$g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x), ..., g_n(t,x))$$

المعرفتين في المجال

$$(t,x,y) \in R^1 \times D \times D_1 = (-\infty,\infty) \times D \times D_1 \quad ....(2)$$

والمستمرتين في t,x,y إذ إن D_1 مجالاً محدداً جزئيا من الفراغ الاقليدي R^m .

نفترض أن كلاً من الدالتين $f(t,x,y)$, $g(t,x)$ تحقق المتباينات الآتية:

$$\|f(t,x,y)\| \le M \quad , \quad \|g(t,x)\| \le M_1 \quad ....(3)$$
$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \le K_1\|x_1 - x_2\| + K_2\|y_1 - y_2\| \quad ....(4)$$
$$\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad ....(5)$$

لكـــل $y, y_1, y_2 \in D_1, x, x_1, x_2 \in D, t \in R^1$ و أن K_2, K_1, M_1, M و L ثوابـــت موجبـــة ، بأفتراض أن $B(t) = (B_{ij}(t)), A = (A_{ij})$ هما مصفوفتان موجبتان من السعة (n×n) معرفة فـــي المجال (2) ومستمرة في t.

وتحققان المتباينتين الآتيتين

$$\|e^{A(t-s)}\| \le Q < \infty \quad ....(6)$$
$$\|B(t)\| \le H \quad ....(7)$$

إذ أن $-\infty < a \le t \le b < \infty$, $\delta_\circ, H, Q$ ثوابت موجبة , $\|x_\circ\| = \delta_\circ$

نعرف المجموعتين غير الخاليتين كما يأتي

$$\left.\begin{aligned} D_M &= D - M^* \\ D_{1M} &= D_1 - M^{**} \end{aligned}\right\} \quad ....(8)$$

إذ أن $M^* = bQ(H\delta_\circ + M)$ و $M^{**} = [T\,LM^* + M_1T]$ و $\|.\| = \max_{t\in[a,b]} |.|$

$$W = [bQ(H + K_1 + K_2LT)] < 1 \quad ....(9)$$

تعريف 1 :

نقول عن متتابعة الدوال الحقيقية $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة على الفترة E بأنها متقاربـــة تقاربـــاً منتظماً من الدالة f على الفترة E اذا كان لأي عدد $\varepsilon < 0$ يوجد عدد $N>0$, $N(\varepsilon)$ بحيث أنه لكل $t \in E$ و $n \geq N$ فأن :

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

مبرهنة 1 :

اذا كانت f مستمرة على [a,b] وكانت

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad ; a \leq x \leq b$$

فأن F(x) تكون مستمرة على الفترة نفسها.

مبرهنة 2:

اذا كانت المتتابعة من الدوال المستمرة $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ معرفة على الفترة المحددة I متقاربة بانتظام على I الى غاية الدالة f ، فعند ذلك تكون f مستمرة على I.

تعريف 2:

الفضاء الخطي النظيم E يسمى تاماً اذا كانت كل متتابعة كوشي في E تتقارب الى عنصر في E.

تعريف 3:

الفضاء الخطي النظيم التام يسمى فضاء باناخ.

تعريف 4:

لتكن $(E, \|.\|)$ فضاء نظيماً ، اذا كانت T تطبيقاً من E الى نفسها ،ونقـــول إن T هـــي تطبيـــق منكمش على E اذا وجدت α R مع 1> α <0 بحيث :

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\| \qquad ; (x, y \in E)$$

مبرهنة 3 (مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة)

لتكن E فضاء باناخ ، اذا كانت T تطبيقاً منكمشاً على E ، فأنه يوجد نقطة ثابتة واحدة و واحـــدة فقط x بحيث أن $Tx = x$

مأخوذة 1 :

لتكن $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة من دوال معرفة على المجموعة $E \in R$ حتى أن $|f_n(x)| \le M_n$ لكل $x \in E, n \in N$ و M_n ثابت موجب ، ذلك $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة بانتظام على E ، اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة.

مأخوذة 2 :

لتكن S مجموعة كل الدوال المستمرة على الفترة [a,b] لاجل $z \in S$ نعرف النظيم بانه $\|z\| = \max_{t\in[a,b]} |z(t)|$ ،عندئذ يكون $(S, \|.\|)$ هو فضاء باناخ.

ملاحظة : لأجل هذا البند راجع المصدرين [7,1].

البند الثاني: وجود الحل للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

يختص هذا البند بدراسة وجود الحل للمعادلة(1)بأستخدام طريقة بيكارد للتقريب [2]
وذلك في برهان المبرهنة الاتية:

مبرهنة 1:

لتكن الدالة$f(t,x,y)$في المعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1) معرفة في المجال (2) ومستمرة t ولتكن المتباينات (3)-(7) متحققة عندئذ تصبح الدالة $x=x(t,x_0)$ المعرفة في المعادلة التالية:

$$x(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\ x(s,x_\circ) + f(s,x(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ))dt]ds \quad ....(10)$$

حلاً للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

البرهان :

لتكن $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ متتابعة من الدوال المعرفة على الفترة $a \le t \le b$ وعلى النحو الآتي:

$$x_{m+1}(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s) x_m(s,x_\circ) + f(s,x_m(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,x_m(t,x_\circ))dt]ds \quad ....(11)$$

مع m=0,1,2,......... ، $x_\circ(t,x_\circ) = x_\circ$

ونظراً لطول البرهان نفضل تجزئته كما يأتي:

-i $x_m(t,x_\circ)\in D$ لكل [a,b] t , $x_\circ \in D_M$

-ii المتتابعة $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بأنتظام من الدالة $x(t,x_\circ)$ على الفترة [a,b] لكل $x_\circ \in D_M$

-iii $x(t,x_\circ)\in D$ لكل $t\in[a,b]$, $x_\circ \in D_M$

برهان i :

نفترض أن متتابعات الدوال $x_1(t,x_\circ),x_2(t,x_\circ),.....,\ x_m(t,x_\circ),......$ المعرفة في العلاقة المتكررة (11) معرفة ومستمرة في المجال (2) .

من العلاقة (11) عندما m=0 نجد أن

$$\|x_1(t,x_\circ)-x_\circ\|\le\int_0^t\left\|e^{A(t-s)}\right\|[\|B(s)\|\|x_\circ\|+\|f(s,x_\circ,\int_s^{s+T}g(t,x_\circ)dt)\|]ds$$

وبتعويض الشروط (3),(6),(7) في المعادلة في أعلاه نحصل على

$$\|x_1(t,x_\circ)-x_\circ\|\le bQ(H\delta_\circ+M)=M^*$$

نستنتج أن $x_1(t,x_\circ)\in D$ لكل $x_\circ \in D_M$, $t\in[a,b]$

وبافتراض أن $x_p(t,x_\circ)\in D$ لكل $x_\circ \in D_M$ ، $p\in Z^+$

عندما m=p+1 نجد أن

$$\|x_{p+1}(t,x_\circ)-x_\circ\|\le bQ(H\delta_\circ+M)=M^*$$

إذاً $x_{P+1}(t,x_\circ)\in D$ لكل $x_\circ \in D_M$ ، $p\in Z^+$ ، $t\in[a,b]$

وبذلك نستنتج من خلال الاستقراء الرياضي أن $x_m(t,x_\circ)\in D$ لكل $t\in[a,b]$, $x_\circ \in D_M$ بالإضافة إلى ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}\|y_1(t,x_\circ)\|&\le \|y_1(t,x_\circ)-y_\circ(t,x_\circ)\|+\|y_\circ(t,x_\circ)\|\le\\ &\le\int_t^{t+T}\|g(s,x_1(s,x_\circ))-g(s,x_\circ)\|ds+\int_t^{t+T}\|g(s,x_\circ)\|ds\\ &\le\int_t^{t+T}L\ \|x_1(s,x_\circ)-x_\circ\|ds+\int_t^{t+T}M_1ds\\ &\le[TLM^*+M_1T]=M^{**}\qquad ....(12)\end{aligned}$$

وهذا يعني $y_1(t,x_\circ)\in D_1$ لكل $x_\circ \in D_M$ ، $y_\circ(t,x_\circ)\in D_{1M}$ من الممكن باستخدام الاستقراء الرياضي اثبات صحة المتباينة الاتية

$$\|y_m(t,x_\circ)-y_\circ(t,x_\circ)\|\leq[TLM^* + M_1T] = M^{**} \qquad ....(13)$$

لكل $m\geq 1$ $x_\circ \in D_M$

هذا يعني أن $y_m(t,x_\circ)\in D_1$ لكل $x_\circ \in D_M$ $y_\circ(t,x_\circ)\in D_{1M}$ ،

$$y_m(t,x_\circ)=\int_t^{t+T} g(s,x_m(s,x_\circ))ds \qquad , \qquad m=0,1,2,.......$$

برهان ii :

لاثبات أن المتتابعة $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بأنتظام من الدالة $x(t,x_\circ)$ على الفترة $a\leq t\leq b$ نكون اولاً بحاجة الى اثبات صحة المتباينة الاتية بأستخدام الاستقراء الرياضي :

$$\|x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\|\leq[tQ(H+K_1+K_2LT)]^m M^* \qquad ....(14)$$

إذ أن كلاً من L,K_2,K_1,H,Q ثوابت موجبة $t\in[a,b]$ ، $m=0,1,2,.....$

من متتابعة الدوال (11) عندما $m=0$ وجدنا أن

$$\|x_1(t,x_\circ)-x_\circ\|\leq bQ(H\delta_\circ + M) = M^*$$

اذاً المتباينة (14) صحيحة عندما تكون $m=0$

وعندما $m=1$ فاننا نحصل على

$$\|x_2(t,x_\circ)-x_1(t,x_\circ)\|\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| (\|B(s)\| \, \|x_1(s,x_\circ)-x_\circ\| +$$
$$+\|f(s,x_1(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_1(t,x_\circ))dt)-$$
$$-f(s,x_\circ,\int_s^{s+T} g(t,x_\circ)dt)\|)ds$$

$$\|x_2(t,x_\circ)-x_1(t,x_\circ)\|\leq\int_0^t Q(H\,M^* + K_1M^* + K_2\int_s^{s+T} L\,M^*\,dt)ds$$
$$\leq[tQ(H+K_1+K_2LT)]M^*$$

وعليه فان المتباينة (14) كذلك صحيحة عندما تكون $m=1$

وبافتراض أن المتباينة (14) صحيحة عندما تكون $m=k$ ، $k=0,1,2,.......$

أي أن $\|x_{k+1}(t,x_\circ)-x_k(t,x_\circ)\| \le [tQ(H+K_1+K_2LT)]^k M^*$

ذلك نحصل من المتتابعة (11)

على :

$$\|x_{k+2}(t,x_\circ)-x_{k+1}(t,x_\circ)\| \le \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| (\|B(s)\| \|x_{k+1}(s,x_\circ)-x_k(s,x_\circ)\| +$$
$$+\|f(s,x_{k+1}(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,x_{k+1}(s,x_\circ))dt)-$$
$$-f(s,x_k(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,x_k(s,x_\circ))dt)\|)ds$$

بتعويض الشروط (4)-(7) في المعادلة فى اعلاه نحصل على :

$$\|x_{k+2}(t,x_\circ)-x_{k+1}(t,x_\circ)\| \le \int_0^t Q(H[tQ(H+K_1+K_2LT]^k M^* +$$
$$+K_1[tQ(H+K_1+K_2LT)]^k M^* +$$
$$+K_2 \int_s^{s+T} [tQ(H+K_1+K_2LT)]^k LM^* dt)ds$$

$$\|x_{k+2}(t,x_\circ)-x_{k+1}(t,x_\circ)\| \le [tQ(H+K_1+K_2LT)]^{k+1} M^*$$

لكل $t\in[a,b]$ ، K=0,1,2,.....

اذاً فالمتباينة (14) تكون صحيحة من خلال الاستقراء الرياضي لكل قيم m=0,1,2,.....

والآن بأخذ مجموع طرفي المتباينة (14) أي أن

$$\sum_{m=0}^{\infty}\| x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le \sum_{m=0}^{\infty}[t\,Q(H+K_1+K_2LT)]^m M^*$$
$$\le \sum_{m=0}^{\infty} [b\,Q(H+K_1+K_2LT)]^m M^* = \sum_{m=0}^{\infty} W^m M^*$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\| x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le \sum_{m=0}^{\infty} W^m M^* \qquad ....(15)$$

إذ أن $W=[b\,Q(H+K_1+K_2LT)]$

وباستخدام اختبار النسبة مع الشرط (9) نجد أن الطرف الأيمن من (15) تمثل متسلسلة متقاربة

على الفترة [a,b] وعليه فان المتسلسلة (15) من المأخوذة (1) متسلسلة متقاربة بانتظام على الفترة [a,b] لكل $x_{\circ} \in D_M$.

وعليه فان المتسلسلة الاتية:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \| x_{m+1}(t,x_{\circ}) - x_m(t,x_{\circ}) \|$$

هي متسلسلة متقاربة بانتظام وبصورة مطلقة على الفترة نفسها لكل $x_{\circ} \in D_M$

الآن

$$x_m(t,x_{\circ}) = x_{\circ} + \sum_{k=0}^{m-1} [x_{k+1}(t,x_{\circ}) - x_k(t,x_{\circ})] \qquad , t \in [a,b]$$

إذن فان $\{x_m(t,x_{\circ})\}_{m=0}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة بانتظام من الدالة $x(t,x_{\circ})$ على الفترة نفسها وهذا يعني أن

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_{\circ}) = x(t,x_{\circ}) \qquad ....(16)$$

ولما كانت متتابعة الدوال $\{x_m(t,x_{\circ})\}_{m=0}^{\infty}$ مستمرة ومعرفة في المجال (2) فان الدالة $x(t,x_{\circ})$بأستخدام المبرهنة (3) تكون مستمرة كذلك في نفس المجال لكل $x_{\circ} \in D_M$

برهان iii :

لاثبات أن $x(t,x_{\circ}) \in D$ لكل $x_{\circ} \in D_M$ ،$t \in [a,b]$ علينا أن نثبت بأن

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\, x_m(s,x_{\circ}) + f(s, x_m(s,x_{\circ}), \int_s^{s+T} g(t, x_m(t,x_{\circ}))dt] ds$$

$$= \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\, x(s,x_{\circ}) + f(s, x(s,x_{\circ}), \int_s^{s+T} g(t, x(t,x_{\circ}))dt] ds$$

لكل $t \in [a,b]$ ،$x_{\circ} \in D_M$

الآن نأخذ :

$$\| \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\, x_m(s,x_{\circ}) + f(s, x_m(s,x_{\circ}), \int_s^{s+T} g(t, x_m(t,x_{\circ}))dt] ds -$$

$$- \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\, x(s,x_{\circ}) + f(s, x(s,x_{\circ}), \int_s^{s+T} g(t, x(t,x_{\circ}))dt] ds \|$$

$$\leq\int_0^t \|e^{A(t-s)}\|[\|B(s)\|\|x_m(s,x_\circ)-x(s,x_\circ)\|+$$

$$+\|f(s,x_m(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_m(s,x_\circ))dt)-f(s,x(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x(s,x_\circ))dt)\|]ds$$

$$\leq\int_0^t Q(H\ \|x_m(s,x_\circ)-x(s,x_\circ)\|+K_1\ \|x_m(s,x_\circ)-x(s,x_\circ)\|+$$

$$+K_2\int_s^{s+T} L\ \|x_m(t,x_\circ)-x(t,x_\circ)\|dt)ds$$

$$\leq[bQ(H+K_1+K_2LT)]\ \ \|x_m(t,x_\circ)-x(t,x_\circ)\|$$

ولما كانت المتتابعة فان التكامل $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ تقترب بانتظام من الدالة $x(t,x_\circ)$ على الفترة[a,b]

$$\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x_m(s,x_\circ)+f(s,x_m(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_m(t,x_\circ))dt]ds$$

يقترب بانتظام من التكامل

$$\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ)+f(s,x(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ))dt]ds$$

وهكذا فان :

$$x(t,x_\circ)=x_\circ+\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ)+f(s,x(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ))dt]ds \qquad \ldots\ldots..(17)$$

أي أن $x(t,x_\circ)\in D$ لكل $x_\circ\in D_M$

البند الثالث: وحدانية الحل للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

يختص هذا البند بدراسة وحدانية الحل للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية **(1)** وذلك من خلال برهان المبرهنة الاتية :

مبرهنة (2) :

اذا كانت شروط المبرهنة **1** متحققة فان الدالة $x(t,x_\circ)$ تعد الحل الوحيد للمعادلة(1)

البرهان :

لنفرض بأن

$$u(t,x_\circ)=x_\circ+\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\,u(s,x_\circ)+f(s,u(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,u(t,x_\circ))dt]ds$$

.............(18)

هو حل آخر للمعادلة (18)

والآن

$$\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|\le\int_0^t \|e^{A(t-s)}\|(\|B(s)\|\,\|x(s,x_\circ)-u(s,x_\circ)\|+$$

$$+\|f(s,x(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x(s,x_\circ))dt)-$$

$$-f(s,u(s,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,u(s,x_\circ))dt)\|)ds$$

$$\le\int_0^t Q(H\,\|x(s,x_\circ)-u(s,x_\circ)\|+K_1\,\|x(s,x_\circ)-u(s,x_\circ)\|+$$

$$+K_2\int_s^{s+T} L\,\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|dt)ds$$

$$\le[bQ(H+K_1+K_2LT)]\,\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|$$

$$=W\,\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|$$

إذا

$$\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|\le W\,\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|$$

وبأ فتراض أن $\gamma=\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|$

فان $\gamma\le w\gamma$

ولما كانت $0<w<1$ فهذا يؤدي الى تناقض وهو غير ممكن الا اذا كانت $\gamma=0$

اذاً فان $\|x(t,x_\circ)-u(t,x_\circ)\|=0$ وهكذا نجد أن $x(t,x_\circ)=u(t,x_\circ)$

أي أن $x(t,x_\circ)$ هو الحل الوحيد للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

لكل $t\in[a,b]$ $x_\circ\in D_M$

البند الرابع

تؤكد المبرهنة الآتية استقرارية الحل للمعادلة التكاملية –التفاضلية اللاخطية (1) فعندما يحدث تغيير طفيف في النقطة $x_\circ$ فان تغيرآ طفيفآ سيقابله في الدالة $x = x(t,x_\circ)$

مبرهنة 3 :

لتكن

$$x(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ) + f(s,x(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ))dt]ds$$

حيث أن الدالة $x(t,x_\circ)$ تمثل حلاً للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

عندئذ تكون المتباينة الاتية

$$\left\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\right\| \leq (1-w)^{-1}\ \left\|x_\circ^1 - x_\circ^2\right\| < \varepsilon \qquad ....(19)$$

متحققة لأجل $t \in [a,b]$ و $x_\circ^1, x_\circ^2 \in D_M$

البرهان :

بما أن

$$x(t,x_\circ^k) = x_\circ^k + \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ^k) + f(s,x(s,x_\circ^k), \int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ^k))dt]ds$$

إذ أن k=1,2

.........(20)

$$\begin{aligned}
&\left\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\right\| = \\
&= \left\|x_\circ^1 + \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ^1) + f(s,x(s,x_\circ^1), \int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ^1))dt]ds - \right. \\
&\left. - x_\circ^2 + \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ x(s,x_\circ^2) + f(s,x(s,x_\circ^2), \int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ^2))dt]ds\right\| \\
&\leq \left\|x_\circ^1 - x_\circ^2\right\| + \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\| [\left\|B(s)\right\| \left\|x(s,x_\circ^1) - x(s,x_\circ^2)\right\| + \\
&+ \left\|f(s,x(s,x_\circ^1), \int_s^{s+T} g(t,x(s,x_\circ^1))dt) - f(s,x(s,x_\circ^2), \int_s^{s+T} g(t,x(s,x_\circ^2))dt)\right\|]ds
\end{aligned}$$

$$\leq \|x_\circ^1 - x_\circ^2\| + \int_0^t Q[H \; \|x(s,x_\circ^1) - x(s,x_\circ^2)\| + K_1 \; \|x(s,x_\circ^1) - x(s,x_\circ^2)\| +$$

$$+ K_2 \int_s^{s+T} L \; \|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\| dt] ds$$

$$\leq \|x_\circ^1 - x_\circ^2\| + [bQ(H + K_1 + K_2 LT)] \quad \|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\|$$

$$\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\| \leq \|x_\circ^1 - x_\circ^2\| + w\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\|$$

$$\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\| \leq (1-w)^{-1}\|x_\circ^1 - x_\circ^2\|$$

لكل $x_\circ^1, x_\circ^2 \in D_M$

وبما انه حسب تعريف الاستقرارية [6] $\|x_\circ^1 - x_\circ^2\| < \delta$ وبفرض أن $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(1-w)^{-1}}$

فنحصل على $\|x(t,x_\circ^1) - x(t,x_\circ^2)\| < \varepsilon$

لكل $x_\circ^1, x_\circ^2 \in D_M$

البند الخامس: وجود ووحدانية الحل للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية(1)

يختص هذا البند بدراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1) بأستخدام طريقة مبرهنة النقطة الثابتة لـــــــ (باناخ)[6]

مبرهنة 4 :

لتكن الدالة $f(t,x(t), \int_t^{t+T} g(s,x(s))ds)$ في المعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1)

دالة معرفة ومستمرة في المجال (2) وتحقق الفرضيات في المبرهنة 1 وشروطها عندئذ يكون للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1) حل وحيد معرف ومستمر على الفترة [a,b]

البرهان :

لنفرض أن الفضاء $(S, \|.\|)$ هو فضاء باناخ معطى حسب المأخوذة 2 لنعرف الان التطبيق T على S كالاتي :

$$Tz(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} [B(s)\; z(s,x_\circ) + f(s, z(s,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t, z(t,x_\circ))dt] ds$$

........(21)

بما ان الدالة $g(s,z(s,x_\circ))$ دالة مستمرة على الفترة [a,b] فأن $\int_t^{t+T} g(s,z(s,x_\circ))ds$ ايضاً

دالة مستمرة على الفترة [a,b] ومنها تكون الدالة $f(t,z(t,x_\circ),\ \int_t^{t+T} g(s,z(s,x_\circ))ds)$

مستمرة على الفترة نفسها وكذلك الدالة $z(t,x_\circ)$ مستمرة على الفترة [a,b]والمصفوفة

B(t) و $e^{A(t-s)}$ مستمرة عند t على الفترة نفسها فان من المبرهنة **1**يكون

$$\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ z(s,x_\circ)+f(s,z(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,z(t,x_\circ))dt]ds$$

مستمر على الفترة [a,b] فأن $Tz(t,x_\circ)\in S$ مما يعني أن التطبيق T هو من S الى S

والآن لنبرهن على أن T هو تطبيق انكماش على المجموعة S لتكن S ∋ z ,w عندئذ يكون

$$\|Tz\ \ (t,x_\circ)-Tw(t,x_\circ)\|\le \max_{t\in[a,b]}\{\ |Tz(t,x_\circ)-Tw(t,x_\circ)|\ \}$$

$$=\max_{t\in[a,b]}\{\ |x_\circ+\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)z(s,x_\circ)+f(s,z(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,z(s,x_\circ))dt]ds-$$

$$-x_\circ-\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)w(s,x_\circ)+f(s,w(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,w(t,x_\circ))dt]ds|\}$$

$$=\max_{t\in[a,b]}\{\ |\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)z(t,x_\circ)-w(t,x_\circ))+$$

$$+(f(s,z(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,z(s,x_\circ))dt-f(s,w(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,w(t,x_\circ))dt]ds|\}$$

وبتطبيق شرط ليبشتز في الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\|Tz(t,x_\circ)-Tw(t,x_\circ)\|\le[bQ(H+K_1+K_2LT)]\max_{t\in[a,b]}|z(t,x_\circ)-w(t,x_\circ)|$$ وحسب

المأخوذة 2 نحصل على

وبموجب (22)......... $$\|Tz(t,x_\circ)-Tw(t,x_\circ)\|\le w\|z(t,x_\circ)-w(t,x_\circ)\|$$

و بما أن 1> 0 < w نجد أن T هوتطبيق انكماش على المجموعة Sمبرهنة النقطة

الثابتة (4)تكون الدالة $z(t,x_\circ)$ في المعادلة الاتية

$$Tz(t,x_\circ)=z(t,x_\circ)=x_\circ+\int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)\ z(s,x_\circ)+f(s,z(s,x_\circ),\ \int_s^{s+T} g(t,z(t,x_\circ))dt]ds$$

حلاً وحيداً للمعادلة التكاملية- التفاضلية اللاخطية (1) على الفترة [a,b].

REFERENCES

1- Apostol, M. T. Mathematical Analysis , second edition , Institute of technology, Addison – Wesley , California , (1973).
2- Coddington , E . A.. and Levinson N. Theory of ordinary differential equations, Mc Graw – Hill , New York , (1955).
3- Kolmogorov,A..N.and Fomin G.B. Introduction in the Theory of functional and mathematical analysis, USSR, Moscow, (1989).
4- Liu, James H.Asingular perturbation problem in integro-Differential Equations, Electronic J .of Differential Equations, No.2,sept.16, 1-10 (1993).
5- Miller ,R.K. Volterra integral Equations in Banach space, Funkcialaj Ekvacioj, Vol.18, 163-194 (1995).
6 - Rama, M.Mohana Rao. Ordinary Differential Equations Theory and pplication, Britain , (1981).
7- Richard , R . G . Method of real analysis ,Toronto , (1963).
8- Volterra ,V. Theory of functional and of integral and integro-differential equations, Dover publications, Inc, New York, (1959).
9- Wu, Y. positive solutions of Volterra integro- Differential Equations ,Acta. Math. Univ . Comenianae,Vol. LXIV, No.1, 113-122 (1995).