مبرهنة جيول – سنكلير
غير التجميعية – دراسة تطبيقية على جبريات – H^* –

عمار عصام ادريس
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل – العراق (الموصل)

عامر عبد الإله محمد
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل – العراق (الموصل)

تاريخ الاستلام 2005/6/5 تاريخ القبول 2005/9/18

Abstract

In this paper, we generalized the Jewell-Sinclair theorem to include not only associative Banach algebra but also the nonassociative Banach algebra. Our methods in extend Jewell-Sinclair theorem is based on the theory of multiplication algebra of an arbitrary algebra and another techniques, which is the standard method in the nonassociative context in the Spanish school.

Furthermore, we give as an application example of our generalization for the Jewell-Sinclair theorem the well–known result proved by Rodriguez that assert the automatic continuity of a surjective homomorphisim on a nonassociative H^*- algebras, Our proof is based on essence the same lines of Rodriguez proof.

الخلاصة

في هذا البحث، عممت مبرهنة جيول – سنكلير لتشمل ليس جبريات سوية كاملة تجميعية فحسب بل جبريات سوية كاملة غير تجميعية كذلك، أن طريقتنا في توسيع مبرهنة جيول – سنكلير استندت إلى جبر المضروبات وأساليب أخرى، وهي طريقة قياسية شائعة الاستخدام في المدرسة الإسبانية .

فضلاً عن إننا قدمنا النتيجة المعروفة جيداً التي ثبتها العالم رودريكث والتي أثبتت استمرارية التشاكل الشامل على جبريات – H^* غير التجميعية كمثالاً تطبيقياً لتعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير ، علماً أن برهاننا لا يختلف كثيراً في خطوطه الرئيسة عن برهان رودريكث.

1- مقدمة وتمهيد Introduction & Preliminaries

قدم ريكارت [19] في منتصف القرن العشرين مبرهنته الشهيرة التي تنص على ان التشاكل بين جبريات باناخ يكون مستمراً بشرط ان يكون المستقر للتشاكل كثيفاً له الخاصية أن يكون تقاطع المثاليات العظمى الموديولية للمستقر صفراً ، أي ان المستقر يكون قويا شبه بسيط (Strong Semisimple) .

ان محاولة تضعيف شرط كون المستقر قوياً شبه بسيط إلى شبه بسيط (SemiSimple) أي ان تقاطع المثاليات العظمى للمستقر يكون صفراً ، لا تزال قيد الدراسة ونرى – حسب علمنا – انها لم تحل حتى الان . انظر [12] [22] ، أي ان المسألة تؤول الى الصيغة الاتية :

اذا كان كل من A, B جبر باناخ و Φ تطبيقاً متشاكلاً ذا مستقر كثيف من A الى B بحيث ان B شبه بسيطة . فهل ان Φ مستمرة ؟

استطاع جونسن سنة (1967) في بحثه [10] أن يعطي حلاً جزئياً للمسألة المفتوحة أعلاه كالاتي : اذا كان كل من B, A جبر باناخ ، واذا كان Φ تطبيقاً متشاكلاً شاملاً من A الى B بحيث ان B شبه بسيطة . وعندئذ يكون Φ مستمراً .

ومنذ ذلك التاريخ فأن اكثر البحوث في موضوعات الاستمرارية التلقائية تستنبط افكارها وحلولها من مبرهنتي ريكارت وجونسن انظر [12] [19] .

استطاع سنكلير سنة 1979 مع جيول تعميم مبرهنة جونسن في بحثهما [9] كالاتي :
لتكن B جبر باناخ بحيث أن :

1. B ليس لها مثاليات ذات أبعاد منتهية غير صفرية معدومة القوى .
2. لأية مثالية I مغلقة ذات بعد غير منته لـ B يوجد متتابعة $\{b_n\}_{n\in N} \subseteq B$ بحيث أن المتتابعة $\{(b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \bar{I})\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة لـ B تكون متناقصة بثبات . عندئذ ، أي تشاكل شامل من أي جبر باناخ إلى B يكون مستمراً .

ومن الجدير بالتنويه ان البحوث بشأن مبرهنة جيول – سنكلير وجونسن وريكارت اعلاه اختصت بجبريات سوية كاملة تجميعية ونحن نرى انه بالمكان دراسة تلك المبرهنات في حقل كبير وغني جداً وهو جبريات سوية كاملة غير تجميعية ، وفعلاً تم في كثير من البحوث تناول دراسة تلك المبرهنات في الحقول غير التجميعية . انظر [15] [16] [20][21] .

لقد تناولنا في هذا البحث هذا الحقل (الجبريات غير التجميعية) في موضوع الاستمرارية التلقائية للتطبيقات الخطية ودرسنا هذا الحقل في مبرهنة جيول – سنكلير المعممة واستطعنا تطبيق النتائج التي حصلنا عليها على جبريات غير تجميعية مهمة غير تافهة مثل جبريات H^*-.

نذكّر القارئ بان هناك بحوثاً أحدثت قفزات عظيمة في هذه الاتجاهات ، نذكر منها [14] [15] ، علماً ان طريقة الحصول على الاستمرارية التلقائية لتطبيقات خطية معينة (مثل تشاكل او اشتقاق) في جبريات سوية كاملة ليست بالضرورة تجميعية تختلف عن ما هو مألوف في الطرائق التجميعية وسنتناول في الفقرة الثانية من هذا البحث تلك الطريقة بالتفصيل، ولمزيد من التفصيلات يمكن الرجوع الى [4] [14] عن الطرائق التجميعية وغير التجميعية في هذا المجال ، وقد خصصت الفقرة الثانية لتقديم مثال تطبيقي يبرهن صحة تعميم مبرهنة جيول – سنكلير .

ونذكر القارئ بالمصطلحات والتعاريف والمبرهنات الضرورية لأثبات مبرهنتنا الاساسية (مبرهنة جيول – سنكلير غير التجميعية).

اذا كان $\|.\|$ معياراً على الجبر A فيقال ان الزوج $(A,\|.\|)$ هو جبر سوي إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\|a.b\| \le \|a\|.\|b\| \qquad \text{لكل} \qquad a,b \in A$$

واذا كان كل من Y,X فضاء باناخ ، و $T:X \to Y$ تطبيقاً خطياً . عندئذ يعّرف انفصال T والذي يرمز له بالرمز $\delta(T)$ أو δ بالشكل الاتي :

$$\delta(T)=\{y\in Y:\exists\{x_n\}\subseteq X\,,\{x_n\}\to 0\,,\{T(x_n)\}\to y\ ,\forall\, n\in N\}$$

1.1 مبرهنة البيان المغلق: Closed Graph Theorem

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن $T:X \to Y$ هو تطبيقاً خطياً . عندئذ يكون البيان $G(T)$ مغلقاً إذا وفقط إذا كان T مستمراً .

1.2 قضية : [19]

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً من X إلى Y فإن :

1. التطبيق Φ مستمر إذا وفقط إذا كان $\delta(\Phi)=\{0\}$.
2. إذا كان كل من T و R تطبيقين خطيين مستمرين على Y,X على الترتيب وكان :

$$\Phi T = R\Phi$$

فإن

$$R\delta(\Phi)\subseteq\delta(\Phi)$$

1.3 مساعده : [21]

ليكن A و B جبريات سوية . إذا كانت $\Phi:A\to B$ تشاكل شامل فإن $\delta(\Phi)$ تكون مثالية مغلقة لـ B .

1.4 مبرهنة سنكلير : Sinclair Theorem

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً من X الى Y ، اذا كانت المتتابعتان

$$\{T_n\}_{n\in N} \subseteq BL(X)$$
$$\{R_n\}_{n\in N} \subseteq BL(Y)$$

تحققان الشرط الاتي :

$$\forall\ n\in N \qquad \Phi\{T_n\}=\{R_n\}\Phi$$

فعندئذ يوجد عدد صحيح k بحيث ان :

$$\forall \qquad n\geq k \quad \left(R_1\ldots R_n\delta(\Phi)\right)^{-}=\left(R_1\ldots R_k\delta(\Phi)\right)^{-}$$

البرهان: أنظر [12 , مبرهنة 6.1.17]

1.5 مساعدة : [16]

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً شاملاً من X إلى Y ولتكن $\{F_n\}_{n\in N}$ متتابعة من مؤثرات خطية مقيدة على X تقترب تحت المعيار على $BL(X)$ إلى الصفر . إذا كانت $\{G_n\}_{n\in N}$ متتابعة من مؤثرات خطية مقيدة ومتراصة على Y تقترب إلى مؤثر خطي متراص G على Y بحيث أن المساواة $\Phi\{F_n\}_{n\in N}=\{G_n\}_{n\in N}\Phi$ صحيحة لكل $n\in N$. عندئذ

$$Sp(G)=\{0\}$$

البرهان : أنظر [16 , صفحة 110]

1.6 مبرهنة نكاتا – هيكمن : Nagata-Higman Theorem [8]

ليكن A جبراً ولتكن I مثالية لـ A بحيث ان لكل $x\in I$ يوجد عدد صحيح موجب p يحقق $x^p=0$. عندئذ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $I^k=\{0\}$.

ليكن A جبراً. نرمز لجبر المضروبات بالرمز $M(A)$ ويعرف بأنه الجبر الجزئي من $L(A)$ (الجبر التجميعي لجميع المؤثرات الخطية من A الى A) والمولد بالمؤثرات الخطية الاتية :

$$L_a\ ,\ R_a\ ,\ Id_A$$

إذ

$$L_a : A\to A$$
$$x\mapsto L_a(x)=ax$$

$$R_a : A \to A$$
$$x \mapsto R_a(x) = xa$$

$$Id_A : A \to A$$
$$x \mapsto Id_A(x) = x$$

لكل $x, a \in A$

هي مؤثرات ضرب يسارية ويمينية وذاتية على التوالي.

وليكن A جبرا ولتكن I مثالية لـ A . نرمز لمثالية جبر المضروبات $M(A)$ لـ A المولّدة بالمؤثرات الخطية R_x, L_x لكل $x \in I$ بالرمز M_I . كما تكتب M_I بالشكل

$$M_I = \sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i} \qquad (x_i, y_i \in I)$$

إذ

$$M_{x_i,y_i} : A \to A$$
$$a \mapsto M_{x_i,y_i}(a) = x_i\, a\, y_i$$

1.7 مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية : Jewell-Sinclair Theorem

لتكن B جبر باناخ بحيث ان :

(1) B ليس لها مثاليات ذات ابعاد منتهية غير صفرية معدومة القوى .

(2) لأية مثالية I مغلقة ذات بُعد غير منتهٍ لـ B يوجد متتابعة $\{b_n\}_{n\in N} \subseteq B$ بحيث ان المتتابعة $\{(b_1.b_2\ldots b_n I)^-\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة لـ B تكون متناقصة بثبات. عندئذ أي تشاكل شامل من أي جبر باناخ إلى B يكون مستمراً .

البرهان : انظر [12, مبرهنة 6.1.18]

1.8 قضية : [16]

ليكن كل من B, A جبريات سوية ، وليكن التطبيق $\Phi : A \to B$ تشاكلاً شاملاً.

عندئذ يكون التطبيق $\hat{\Phi} : M(A) \to M(B)$ تشاكلاً شاملاً . على وفق العلاقة :

$$\Phi \circ F = \hat{\Phi}(F) \circ \Phi$$

إذ $F \in M(A)$

1.9 قضية : [5]

إذا كان Φ تشاكلاً شاملاً من جبر سوي A إلى جبر سوي B ، فأن

.1 $\delta(\hat{\Phi}) \subseteq \delta(\Phi)$

$L_{\delta(\Phi)} \cup R_{\delta(\Phi)} \subseteq \delta(\hat{\Phi})$ .2

اذ $\hat{\Phi} : M(A) \to M(B)$ هو تشاكل شامل وأن

$$L_{\delta(\Phi)} = \{L_x : x \in \delta(\Phi)\}$$
$$R_{\delta(\Phi)} = \{R_x : x \in \delta(\Phi)\}$$

2- النتائج الأساسية : The Main Results

سنقدم في هذا الفقرة تعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير ، ومحورها هو هل تصح هذه المبرهنة في صيغتها غير التجميعية بفرض ان B هي جبر سوي كامل ؟ وليس هدفنا من هذا السؤال دراسة جبريات باناخ تجميعية فحسب بل جبريات باناخ غير التجميعية ايضاً .

ان المشكلة الاساسية في توسيع مبرهنة جيول – سنكلير لتشمل الجبريات غير التجميعية هو فقرها الى هيكلية تحليلية وجبرية تمكننا من إثبات هدفنا وهو استمرارية التشاكل بين تلك الجبريات ، فمثلا ليس للطيف في الجبريات غير التجميعية معنى بسبب كون العناصر في الجبريات غير التجميعية قد يكون له معكوسان وعليه لا يمكن استخدام جميع المبرهنات والقضايا المتعلقة بالطيف في الجبريات غير التجميعية ، ومن الجدير بالذكر ان مبرهنات الطيف تعد العصب في موضوع الاستمرارية التلقائية (انظر برهان مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية) ، لم يتمكن الباحثون – على حد علمنا – من ايجاد طريقة بديلة تعوض استخدام مبرهنات الطيف ، لذا حاول الباحثون جميعاً نقل تلك الجبريات داخل جبريات تجميعية ليتمكنوا من الاستفادة من مبرهنات الطيف فضلاً عن المساعدات والقضايا الاخرى ، وفي الامكان ان نشبه هذه الطريقة ببناء جسر بين الجبريات غير التجميعية و الجبريات التجميعية.

2.1 مبرهنة جيول – سنكلير المعممة :

ليكن B جبراً سوياً كاملاً بحيث أن:

1. لأية مثالية I لـ B منتهية البعد بحيث انه يوجد عدد طبيعي $n \in N$ يحقق $M_I^n = 0$ فان $I = 0$.
2. لأية مثالية مغلقة I لـ B غير منتهية البعد ، يوجد متتابعة $\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(B)$ من مؤثرات خطيه على B بحيث أن المتتابعة $\{(T_1T_2\cdots T_n\bar{I})\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة لـ B تكون متناقصة بثبات . عندئذ ، يكون أي تشاكل شامل من أي جبر سوي كامل إلى B مستمراً.

3. البرهان:

الحالة الأولى : نفرض ان كلاً من B, A جبريات سوية كاملة تجميعية و $\Phi : A \to B$ تشاكل شامل.

لاحظ انه أذا كانت B تجميعية و I مثالية لــB منتهية البعد بحيث أن

$$M_I^n = 0$$

نحصل على

$$\begin{aligned} M_I &= \sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i} \qquad , \qquad x_i, y_i \in I \\ &= M_{x_1,y_1} + M_{x_2,y_2} + \ldots + M_{x_n,y_n} \\ &= M_{x_1+\ldots+x_n,\, y_1+\ldots+y_n} \\ &\cong M_{x,y} \qquad , \qquad x, y \in I \end{aligned}$$

اذا كانت

$$M_I^n = 0$$

نحصل على

$$M_{x_1,y_1} \ldots M_{x_n,y_n} = 0$$

وعليه لكل $b \in B$ نحصل على

$$\left(M_{x_1,y_1} \ldots M_{x_n,y_n}\right)(b) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n\, b\, y_n\, y_{n-1} \ldots y_1 = 0$$

بوضع

$$z = by_n \in I$$
$$x_1 \ldots x_n z y_{n-1} \ldots y_1 = 0$$

ومنه نجد ان

$$I^n = 0 \Rightarrow I = 0$$

والان ,بتطبيق مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية (1.7) نحصل على أن Φ مستمراً

اما اذا كانت I مثالية لــ B غير منتهية البعد وبوضع

$$\{T_n\}_{n\in N} = \{L_{b_n}\}_{n\in N} \subseteq M(B)$$

نحصل على

$$\{(b_1 \ldots b_2 \bar{I})\}_{n\in N}$$

متناقصة بثبات ، ومرة أخرى حسب مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية (1.7) نحصل على أن Φ مستمراً .

الحالة الثانية : نفرض ان كــلاً مــن B, A جبريــات ســوية كاملــة ليــست تجميعيــة . و $\Phi : A \to B$ هو تشاكل شامل .

حسب القضية (1.8) نحصل على

$$\hat{\Phi}: M(A) \to M(B)$$

هو تشاكل شامل ايضاً .

حسب المساعدة (1.3) فان كلاً من $\delta(\hat{\Phi}), \delta(\Phi)$ هي مثالية مغلقة لـ B ولـ $M(B)$ على التوالي .

الان ، نفرض ان $\delta(\Phi)$ غير منتهية البعد .

بحسب الفرضية ، يوجد متتابعة

$$\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(B)$$

بحيث ان

$$\{(T_1 \ldots T_n \delta(\Phi))^-\}$$

متناقصة بثبات .

وبما ان $\hat{\Phi}$ شامل نحصل على ان لكل $n \in N$ ولكل $T_n \in M(B)$ يوجد $F_n \in M(A)$ بحيث ان

$$\hat{\Phi}(F_n) = T_n$$

ويحقق العلاقة

$$\Phi \circ F_n = T_n \circ \Phi$$

وبتطبيق مبرهنة سنكلير (1.4) نحصل على تناقض وذلك بوضع $X = A$, $Y = B$, $\Phi = \Phi$, $F_n = T_n$, $T_n = R_n$, اذن يجب ان تكون $\delta(\Phi)$ منتهية البعد .

وبحسب القضية (1.9) نحصل على

$$\delta(\hat{\Phi})(B) \subseteq \delta(\Phi) \qquad \ldots(1)$$

$$M_{\delta(\Phi)} = R_{\delta(\Phi)} \cup L_{\delta(\Phi)} \subseteq \delta(\hat{\Phi}) \qquad \ldots(2)$$

نُثبّت T في $M_{\delta(\Phi)}$. حسب (2)

$$T \in \delta(\hat{\Phi}) \subseteq M(B) = \hat{\Phi}(M(A))$$

حيث ان $\hat{\Phi}$ شامل.

ومنها نستنتج وجود $S \in M(A)$ بحيث ان

$$T = \hat{\Phi}(S)$$

لاحظ ان $T \in \delta(\Phi)$ يؤدي الى وجود $\{F_n\} \subseteq M(A)$ بحيث ان

$$\{F_n\} \to 0$$

وكذلك

$$\{\hat{\Phi}(F_n)\} \to T$$

وهذا يؤدي الى

$$\{F_n S\} \to 0$$

وكذلك

$$\{\hat{\Phi}(F_n)\hat{\Phi}(S)\} \to T\hat{\Phi}(S)$$

وهذا يكافئ

$$\{F_n S\} \to 0$$

وكذلك

$$\{\hat{\Phi}(F_n S)\} \to T^2$$

من (1) نحصل على ان T لها مستقر ذو بعد منته .

والان وبتطبيق المساعدة (1.5) بوضع

$$X = A \quad , \quad Y = B \quad , \quad \Phi = \Phi$$

$\{F_n\} = \{F_n S\}$ متتابعة من مؤثرات خطية مقيدة على A وتقترب من الصفر.

$\{G_n\} = \{\hat{\Phi}(F_n S)\}$ متتابعة من مؤثرات خطية مقيدة ومتراصة على B (السبب لكل $n \in N$ $\hat{\Phi}(F_n S) = \hat{\Phi}(F_n)T$ ولكل $x \in B$ نحصل على $\hat{\Phi}(F_n S)(x) = \hat{\Phi}(F_n)T(x)$ وهذا يعني ان التطبيق $\hat{\Phi}(F_n S)$ له مستقر ذو بعد منته وعليه يكون متراصاً) تقترب الى مـؤثر خطـي متراص $G = T^2$ ، نحصل على

$$Sp(T^2) = \{0\}$$

نفرض ان بُعد فضاء الانفصال $\delta(\Phi)$ هو p ، أي ان

$$\dim \delta(\Phi) = p$$

وعليه نجد ان

$$\dim(\delta(\hat{\Phi})) \le p$$

وعليه T^2 تحقق متعددة حدود من الرتبة $p+1$

$$Sp(T^2) = \{0\}$$

نستطيع ان نحصل على

$$(T^2)^{p+1} = 0$$

أي ان

$$T^{2p+2} = 0$$

وبما ان p لا تعتمد على T ، وبتطبيق مبرهنة نكاتا – هيكمن (1.6) نحصل على :

$$\exists \quad n \in N \ : \ M^n_{\delta(\Phi)} = 0$$

وبحسب الفرضية (1) من المبرهنة نحصل على

$$\delta(\Phi) = \{0\}$$

وبحسب القضية (1.2) فرع (1) تكون Φ مستمرة . □

3. دراسة تطبيقية على جبريات H^* –

سنقدم من خلال هذه الفقرة الإجابة عن عدد مما قد يتبادر إلى ذهن القارئ من أسئلة وشكوك عن جدوى توسيع مبرهنة جيول – سنكلير وذلك من خلال تقديم مثال تطبيقي لتعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير نستخدم فيه حقل مهم غير تافه وهو جبريات H^*– . منذ أن قدم امبروس (A. Ambrose) بحثه [1] سنة 1945 عن جبريات H^*– التجميعية (على حقل الأعداد المعقدة) وتمهيده للنظريات الهيكلية التابعة لها ، بدأ حقل جبريات H^*– يتطور في اتجاهات عدة أهمها:

I. في المحتوى التجميعي

أوجد كابلانسكي (I. Kaplansky) هيكلية جبريات H^*– الحقيقية التجميعية [11] .

وعرف ساورو تنو (P. Saworotnow) موديلات هلبرت على جبريات H^* – التجميعية وبدأ بدراستها [17] .

II. في المحتوى غير التجميعي

كان لأفكار امبروس (A. Ambrose) اثر كبير في الدخول إلى المحتوى غير التجميعي لأصناف مشهورة ومهمة مثل جبريات جوردن (Jordan) [23] والبديلة [13] فضلا عن لـ مالسيف (Mal'cev) [2] .

ووضع كوينكا و رودريكث (Cuenca and Rodriguez) الجانب النظري لجبريات H^*– غير التجميعية العامة (انظر [7]) .

ويجدر بالذكر هنا ، أن دراسة جبريات H^*– غير التجميعية يمكن أن تتحول على نحوٍ سهل جداً إلى دراسة جبريات H^* – المعدومة صفرياً ويبقى التحول إلى دراسة جبريات H^*– التي تكون تبولوجياً بسيطة هي الحالة المرغوب فيها أنظر [3 ، 4 ، 6 ،16].

والان نذكر القاري بأهم التعاريف والقضايا التي نحتاج اليها في مثالنا التطبيقي.

يعرّف جبر H^* – (على الحقل K) بأنه جبر A غير التجميعي (على الحقل K) مع التشابك * الذي يسمى تشابك جبر H^*– لـ A . كما يمكن ان يعرّف على انه فضاء هلبرت (على الحقل K) بحيث أن الجداء الداخلي $\langle \, , \, \rangle$ يحقق الاتي :

$$\langle xy, z\rangle = \langle x, zy^*\rangle = \langle y, x^* z\rangle \qquad \forall x, y, z \in A$$

ونعرف التشابك على الجبر A بأنه التطبيق # من A إلى A وهو يحقق الشروط آلاتية :

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^{\#}=a^{\#}+b^{\#}\\(\lambda a)^{\#}=\bar{\lambda}\, a^{\#}\\(ab)^{\#}=b^{\#}\, a^{\#}\\(a^{\#})^{\#}=a\end{array}\right\}\quad \forall\, a,b\in A,\lambda\in K$$

ويسمى التطبيق # التشابك الجبري .

لتوضيح المثال التطبيقي سنحتاج الى عدد من المصطلحات والقـضايا والمبرهنـات ونبدأ بالآتي :

يقال أن الجبر A هو أولي إذا كان لأي مثاليتين I,J لـــ A بحيـث أن $I.J=0$ يؤدي إلى $I=0$ أو $J=0$. ويقال أن A تبولوجياً بسيطة إذا لم تحتوِ على مثاليات مغلقه فعلية وكذلك $A^2\neq 0$.

فإذا كان A جبراً (على الحقل K) ونعرف مركز A (ACenter of) الذي يرمز له بالرمز $Cent(A)$ بالصيغة :

$$Cent(A)=\{x\in A:xa=ax\ \ \forall\ a\in A,(bc)a=b(ca)\forall\, a,b,c\in A\}$$

وإذا كـــان A جبـــراً أوليـــاً (علـــى الحقـــل K) ونعـــرف المركـــز الموســـع (Extended Centeroid) الذي يرمز له بالرمز $C(A)$ بالصيغة آلاتية :

$$C(A)=\{f:I\to A:f(xa)=f(x)a,\ f(ax)=af(x)\quad ,I\neq 0\}$$

لاحظ أن الاحتواءات آلاتية $K\subseteq Cent(A)\subseteq C(A)$ معطاة حـسب التطبيقـات المعرفة كآلاتي :

$$\begin{array}{ll}Cent(A)\to C(A), & K\to Cent(A)\\ x\mapsto L_x & ,\lambda\mapsto L_\lambda\end{array}$$

وهذه التطبيقات هي تطبيقات متشاكلة ومتباينة .

ويقال أن A مغلق مركزياً (على الحقل K) إذا كان لكل مثاليه I غير صفرية لـــA ولكل تطبيق خطي $f:I\to A$ يحقق

$$f(xa)=f(x)a,f(ax)=af(x)\qquad \forall\quad x\in I,a\in A$$

يوجد $\lambda\in K$ بحيث أن $f(x)=\lambda x$ لكل $x\in I$

وبعبارة أخرى $C(A)\cong K$

بقي أن نذّكر بأن A تكون معدومة صفرياً إذا وفقط إذا كان

$$Ann(A)=\{x\in A:L_x=R_x=0\}=\{0\}$$

3.1 مساعدة : [16]

ليكن A جبراً سوياً كاملاً ولتكن B جبراً H^*- معدومة صفرياً وتبولوجيا بسيطة ، وليكن التطبيق Φ شاملاً من A إلى B ، يوجد عنصر غير صفري في جبر المضروبات $M(B)$ ذو مستقر منتهي البعد عندئذ يكون التطبيق Φ مستمراً.

3.2 مساعدة : [21]

ليكن A جبراً أولياً مغلقاً مركزياً بحيث أن $\dim(T(A))\rangle 1$ لجميع المؤثرات $T \neq 0$ تنتمي لجبر المضروبات $M(A)$. عندئذ توجد متتابعة $\{C_n\}_{n\in N} \subseteq A$ و $\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(A)$ بحيث أن :

$$T_n.T_{n-1}\ldots T_1 C_n \neq 0$$

$$T_{n+1}.T_n\ldots T_1 C_n = 0 \qquad \text{لكل } n\in N$$

3.3 مساعدة : [16]

ليكن D جبراً ولنفرض وجود ثنائي خطي غير مولّد متنـاظر تجميعـي بالـصيغة $\langle .,. \rangle$ في D . عندئذ :

1) يوجد تشابك جبري خطي وحيد # في جبر المضروبات $M(D)$ يحقق ما يأتي :

$$L_d^{\#} = R_d \quad , \quad R_d^{\#} = L_d \qquad \forall\ d\in D$$

2) لكل x,y في D ولكل T في $M(D)$ تكون المساواة الآتية صحيحة

$$\langle Tx\ ,y\rangle = \langle x, T^{\#}(y)\rangle$$

3.4 مبرهنة : [21]

كل جبر H^*- معدوم صفرياً يكون عبارة عن انغلاق تعامـد مجمـوع المثاليـات المغلقة الصغرى للجبرH^*- وهذه المثاليات هي جبريات H^*- تبولوجياً بسيطة .

3.5 مبرهنة : [16]

جبريات H^*- التي تكون تبولوجياً بسيطة والمعرفة على فضاء الأعداد المعقدة تكون جبريات أوليه مغلقه مركزياً .

سنقدم الان مثالاً تطبيقياً يثبت صحة تعميم مبرهنة جيول – سنكلير وهـي مبرهنـة عائدة الى لعالم رودريكث [16, theorem 5] أثبتت استمرارية التشاكل الشامل بين الجبريات السوية الكاملة غير التجميعية.

ان برهاننا في المثال التطبيقي لمبرهنة جيول – سنكلير المعممة لا يختلف كثيراً فـي خطوطه الرئيسة عن برهان رودريكث .

3.6 مبرهنة : [16] (المثال التطبيقي)

ليكن كل من B, A جبريات -H^* (على حقل الأعداد المعقدة) ، وليكن التطبيق Φ متشاكلاً وشاملاً من A إلى B . فإذا كانت B معدومة صفرياً فأن Φ مستمرة.

البرهان :

نفرض أولا إن B تبولوجياً بسيطة. وبتطبيق المبرهنة (3.5) نجد أن B هو جبر أولي مغلق مركزياً. والآن $M(B)$ تحقق أحد الاحتماليين الآتيين :

(i) يوجد عنصر في $M(B)$ له مستقر ذو بعد منته .

(ii) جميع عناصر $M(B)$ لها مستقرات ذات أبعاد غير منتهية .

برهان (i) Φ تكون مستمرة حسب المساعدة (3.1) .

أما إذا كانت جميع عناصر $M(B)$ لها مستقرات ذات أبعاد غير منتهيه وباستخدام المساعدة (3.2) يوجد متتابعة $\{C_n\}_{n\in N} \subseteq B$ و $\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(B)$

بحيث أن

$$T_{n+1}.T_n \ldots T_1\, C_n = 0 \qquad \ldots(3)$$
$$T_n.T_{n-1} \ldots T_1\, C_n \neq 0 \qquad \ldots(4)$$

وباستخدام حقيقة كون إن كل جبر-H^* معدوم صفرياً يحتوي على ثنائي خطي غير مولد متناظر تجميعي مستمر بالصيغة $\langle .,. \rangle$ عندئذ ، وبحسب المساعدة (3.3 (1)) يوجد تطبيق خطي وحيد # (تشابك جبري) على جبر المضروبات $M(B)$ ويحقق الخاصية الآتية:

$$L_b^{\#} = R_b \quad , \quad R_b^{\#} = L_b \qquad \forall\, b \in B \qquad \ldots(5)$$

الآن ، إذا وجد عدد صحيح موجب $n \in N$

بحيث إن

$$\overline{T_1^{\#} \ldots T_n^{\#}(B)} = \overline{T_1^{\#} \ldots T_{n+1}^{\#}\,(B)} \qquad \ldots(6)$$

بمعنى إن المتتابعة $\{T_n^{\#}\}_{n\in N} \subseteq M(B)$ تكون مستقرة .

وبما أن $T_{n+1}.T_n \ldots T_1\, C_n = 0$ حسب (3)

والتطبيق $\langle .,. \rangle$ غير مولد نحصل على

$$0 = \langle B, T_{n+1} \ldots T_1(C_n) \rangle$$

$$= \left\langle B, \left((T_{n+1} \ldots T_1)^{\#}\right)^{\#}(C_n) \right\rangle \qquad \text{[بحسب تعريف التطبيق التشابكي]}$$

$$= \left\langle (T_{n+1} \ldots T_1)^{\#}(B), C_n \right\rangle \qquad \text{[بحسب المساعدة (3.3(2))]}$$

$$= \left\langle (T_1^{\#} \ldots T_{n+1}^{\#}(B), C_n \right\rangle \qquad \text{[حسب تعريف التطبيق التشابكي]}$$

$$=\left\langle \overline{(T_1^{\#}\ldots T^{\#}{}_{n+1}(B)}, C_n \right\rangle$$ [لأن التطبيق <.,.> مستمر]

$$=\left\langle \overline{(T_1^{\#}\ldots T^{\#}{}_{n}(B)}, C_n \right\rangle$$ [بحسب (6)]

$$=\left\langle T^{\#}{}_1\ldots T^{\#}{}_{n}(B), C_n \right\rangle$$ [بحسب تعريف الانغلاق]

وبحسب المساعدة (3.3 (2)) نحصل على :

$$=\left\langle B, (T_1^{\#}\ldots T_n^{\#})^{\#} C_n \right\rangle$$

$$=\left\langle B, T_n\ldots T_1(C_n) \right\rangle$$ [بحسب تعريف التطبيق التشابكي]

وهذا تناقض لأن

$$T_n.T_{n-1}\ldots T_1 C_n \neq 0$$

عندئذ نجد ان لكل $n \in N$ توجد متتابعة $\left\{\overline{T_1^{\#}\ldots T_n^{\#}(B)}\right\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة متناقصة بثبات ، وبتطبيق مبرهنة جيول – سنكلير المعممة نجد أن Φ مستمرة .

اخيرا في الإمكان الحصول على برهان الحالة العامة وهي ان تكون B معدومة صفرياً من خلال تطبيق المبرهنة (3.4) .

- المصادر

[1]. W. Ambrose, "Structure theorems for a classic of Banach algebras" Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386

[2]. M. Cabrera, J. Martinez and A. Rodriguez, "Mal'cev H*-algebra", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 2905-2945.

[3]. M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "Hilbert modules over H*–algebra in relation with Hilbert ternary", in workshop on non-associative algebraic modules, Nova Science Publisher, New York (1992), pp. 33 – 44.

[4]. M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "Non-associative real H*–algebra", J. Algebra, 147 (1992), 19 – 62.

[5]. M. Cabrera, Lectures notes in analysis, University of Granada,(2000)

[6]. J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez "Isomorphisims of H*-algebra", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 93-99.

[7]. J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez, "Structure theory for non-communicative Jordan H*–algebra", J. Algebra 106 (1987). 22-34

[8]. N. Jacobson, "Structure of rings", Amer. Math. Soc. Colloquium publications 38, providence R. I. (1968).

[9]. N. P. Jewell and A. M. Sinclair, "Epimorphisms and derivations on $L^1(0,1)$ are continuos", Bull. London Math. Soc., 3 (1979), 135 – 139.

[10]. B. E. Johnson, "The uniqueness of the complete norm topology", Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 537 – 539.

[11]. I. Kaplansky, "Dual rings" Ann. Math.49 (1948), 689-701.

[12]. T. W. Palmer, "Banach algebra and the general theory of *–algebra", Cambridge Uni. Press, (1994).

[13]. D. G. Perez, "Structure theorems for alternative H*-algebra", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 437-446.

[14]. A. P. Rodriguez, "Jordan structure in analysis", in Jordan algebras Proc. Conf. Oberwolfach August 9-15, 1992, W. Kaup. McCrimmon and H. Peterson (cds), du Guryter, Berlin, 1994, 97 – 186.

[15]. A. P. Rodriguez, "The uniqueness of the complete norm topology in complete non-associative algebra", J. Functional Analysis, 60(1985), 1-15.

[16]. A. P. Rodriguez, "Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

[17]. P. P. Saworotnow, "A generalized Hilbert space", Duke Math. J. 35 (1968), 191-197.

[18]. J. R. Schue, "Hilbert space methods in the theory of Lie algebra", Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 69-80.

[19]. A. M. Sinclair, "Automatic continuity of linear operator", Cambridge Uni. Press, (1975),.

[20]. A. M. Sinclair, "Continuous derivations on Banach algebra", Proc. American Math. Soc. 20 (1969), 166 – 170.

[21]. R. Villena, "Continuity of derivation of H*–algebra", Proc. Amer. Soc. Vol. 122, No. 3 (1994), 821 – 826.

[22]. R. Villena, "Automatic continuity in associative and non-associative **context", Irish Math. Soc. Bulletm, 46(2001), 43-76.**

[23]. C. Viola Devapakkiam, "Hilbert space method in the theory of Jordan algebra", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 307-319.