وجود و تقارب الحل لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من الرتبة الاولى ذات شروط تخومية التكامل

مقدم من قبل الباحثين

د .رعد نوري بطرس
استاذ مساعد
كلية التربية/قسم الرياضيات

عزام صلاح الدين يونس
دراسات عليا
(ماجستير رياضيات)

تاريخ الاستلام 2005/6/5

تاريخ القبول 2005/10/24

Abstract:

In this paper we investigate the existence and approximation for nonlinear system of integro-differential equation with boundary integral conditions by using the numerical-analytic method for investigating of a periodic solutions which is given by Samoilenko A.M. and .Also these investigations lend us to the improving and extending the above method.

الخلاصة:

يتضمن البحث دراسة وجود وتقارب الحل لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية ذات شروط تخومية التكامل و ذلك باستخدام الطريقة التحليلية-العددية لبناء الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية لــSamoilenko A.M . كما تم من خلال هذا البحث تحسين الطريقة في اعلاه و توسيعها.

1. مقدمة:

استخدم كل [1] و [3] و [4] و [5] و[6] الطريقة التحليلية-العددية للبحث عن الحلول الدورية لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية كذلك استخدمها[2] ومن الشكل ادناه:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\int_0^{h(t)} g(s,x(s))ds, \int_{-\infty}^{t} G(t,s)g(s,x(s))ds) \qquad (1.1)$$

إذ أن $x \in D \subset R^n$ و D مجال مغلق ومقيد.

الدالتين $g(t,x)$, $f(t,x,y,z)$ معرفتان في المجال

$$(t,x,y,z) \in [0,T] \times D \times D_1 \times D_2 \qquad (1.2)$$

ومستمرتان في t, x, y, z و دورية في t ذات دور يساوي T حيث D_2 , D_1 مجالان محددان جزئيا من الفراغ الاقليدي R^n . الدالة الباقية $h(t)$ دورية في t بدورة T معرفة و مستمرة في R^1 .

واستخدمنا في هذا البحث الطريقة التحليلية-العددية في اعلاه لبحث الحل الدوري لنظام من المعادلات التكاملية التفاضلية اللاخطية .فقد تم تحسين و توسيع الطريقة في اعلاه.

ندرس نظام المعادلات التكاملية –التفاضلية اللاخطية

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\int_{-\infty}^{t} G(t,s)g(s,x(s))ds, \int_{a(t)}^{b(t)} g(s,x(s))ds) \qquad (1.3)$$

مع شروط تخومية التكامل

$$Ax(0)+C\left[x(T)+\int_0^T x(t)dt\right]=d \qquad (1.4)$$

حيث : $x \in D \subset R^n$ D مجال مغلق ومقيد.

الدالتين المتجهتين

$$f(t,x,y,z)=(f_1(t,x,y,z),\cdots\cdots,f_n(t,x,y,z))$$
$$g(t,x)=(g_1(t,x),\cdots\cdots\cdots,g_n(t,x))$$

معرفتان في المجال

$$(t,x,y,z) \in [0,T] \times D \times D_1 \times D_2 \qquad (1.5)$$

ومستمرتان في t, x, y, z, إذ أن D_2 , D_1 مجالان محددان جزئيا من الفراغ الاقليدي R^m إذ أن $A=(A_{ij})$, $C=(C_{ij})$ مصفوفتان موجبتان من السعة $(n \times n)$.

نفرض أن كلا من الدالتين f(t, x, y, z), g(t, x) تحققان المتباينات الاتية:

$$\|f(t,x,y,z)\| \le M\ , \quad \|g(t,x)\| \le N\ ; \tag{1.6}$$

$$\|f(t,x_1,y_1,z_1)-f(t,x_2,y_2,z_2)\| \le K\|x_1-x_2\|+W\|y_1-y_2\|+Q\|z_1-z_2\|\ ; \tag{1.7}$$

$$\|g(t,x_1)-g(t,x_2)\| \le H\|x_1-x_2\| \tag{1.8}$$

لكل $t\in[0,T]$ و$x,x_1,x_2\in D$ و $y,y_1,y_2\in D_1$ و $z,z_1,z_2\in D_2$

إذ أن W, Q, H, K, N, M ثوابت موجبة و G(t, s) مصفوفة معرفة و مستمرة فـــي t, s وتحقق الشرط الاتي:

$$\|G(t,s)\| \le \gamma e^{-\lambda(t-s)}$$

حيث : $o\le s\le t\le T$ و λ,γ ثوابت موجبة كذلك

$$h=\max_{t\in[o,T]}|b(t)-a(t)|\ ,\ \|\cdot\|=\max_{t\in[0,T]}|\cdot|$$

حيث b(t), a(t) دالتان مستمرتان و معرفتان في الفترة $[0,T]$.

نعرف المجموعات غير الخالية

$$D_\beta = D-(M\frac{T}{2}+P(x_0))\ ;$$

$$D_{1\beta} = D_1-\frac{\gamma}{\lambda}H(M\frac{T}{2}+P(x_0))\ ;$$

$$D_{2\beta} = D_2-hH(M\frac{T}{2}+P(x_0),$$

حيث

$$p(x_0)=\frac{2}{(2+T)}\|C^{-1}d-(C^{-1}A+E)x_0\|+\frac{2MT^2}{3(2+T)}+\frac{2T\|x_0\|}{(2+T)},$$

فضلا عن ذلك نفرض أن

$$\Lambda=(\frac{T}{2}+\frac{2T^2}{3(2+T)})\left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]<1 \tag{1.9}$$

مأخوذة 1.1

إذا كانت f(t) دالة متجهة مستمرة في الفترة $0 \le t \le T$

فان

$$\left\| \int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \right) ds \right\| \le M\alpha(t)$$

حيث :

$$\alpha(t) = 2t(1-\frac{t}{T}) \qquad , \qquad M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$$

البرهان:

مباشرة من المتباينة الاتية نحصل علىالمطلوب اثباته

$$\left\| \int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \right) ds \right\| \le (1-\frac{t}{T})\int_0^t \|f(s)\|ds + \frac{t}{T}\int_t^T \|f(s)\|ds$$
$$\le M\alpha(t)$$

نفرض أن المؤثر L معرف بالشكل الاتي

$$Lf(t) = \int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \right) ds$$

من الواضح ان الدالة f(t) اذا كانت مستمرة على الفترة $[0,T]$ فان المؤثر L f(t) مستمر كذلك على الفترة نفسها .

2. الحل التقريبي للنظام (1.3) مع شروط تخومية التكامل (1.4)

في هذا البند ندرس ألحل التقريبي للنظام (1.3) وذلك من خلال المبرهنة الاتية :

مبرهنة 1.1

إذا كان النظام (1.3) يحقق المتباينات (1.5),(1.7),(1.6) وله حـل $x = x(t, x_0)$ مارا بالنقطة (t, x_0) عندئذ فان متتابعة الدوال هي

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \Big(f(s, x_{m-1}(s,x_0), \int_{-\infty}^s G(t,s)g(s,x_{m-1}(s,x_0))ds, \int_{a(s)}^{b(s)} g(s,x_{m-1}(s,x_0))ds) -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,x_0), \int_{-\infty}^s G(t,\tau)g(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0))d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0))d\tau)ds\Big)ds + \alpha t$$

$$x_0(t,x_0) = x_0, \qquad m=1,2\ldots \qquad (1.10)$$

حيث

$$\alpha = \frac{2}{T(2+T)}\Big[C^{-1}d - \int_0^T Lf(t, x_{m-1}(t,x_0), \int_{-\infty}^{t} G(t,s)g(s,x_{m-1}(s,x_0))ds$$

$$, \int_{a(t)}^{b(t)} g(s, x_{m-1}(s,x_0))ds)dt - (C^{-1}A+E)x_0 - x_0T\Big]$$

متقاربة بانتظام عندما $m \to \infty$ في المجال

$$(t,x_0) \in [0,T]\times D_\beta \qquad (1.11)$$

من الدالة $x_\infty(t,x_0)$ المعرفة و المستمرة في المجال (1.11) و تحقق نظام المعادلة التكاملية

$$x(t,x_0) = x_0 + \int_0^t (f(s,x(s,x_0)), \int_{-\infty}^{s} G(t,\tau)g(\tau,x(\tau,x_0))d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x(\tau,x_0))d\tau) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,x_0)), \int_{-\infty}^{s} G(t,\tau)g(\tau,x(\tau,x_0))d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x(\tau,x_0))d\tau)ds)ds + \alpha t$$

(1.12)

وهو حل وحيد للنظام (1.3) و يحقق المتباينتين الاتيتين

$$\|x_\infty(t,x_0) - x_0\| \le M\alpha(t) + p(x_0) \le \frac{MT}{2} + p(x_0) \qquad (1.13)$$

$$\|x_\infty(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \le \Lambda^m (1-\Lambda)^{-1}(M\frac{T}{2} + P(x_0)) \qquad (1.14)$$

البرهان:

نضع m=1 في المعادلة (1.10) فنحصل على

$$\|x_1(t,x_0)-x_0\| \le (1-\frac{t}{T})\int_0^t \left\| f(\tau,x_0, \int_{-\infty}^{s} G(t,\tau)g(\tau,x_0)d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x_0)d\tau \right\| ds +$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T \left\| f(s,x_0, \int_{-\infty}^{s} G(t,\tau)g(\tau,x_0)d\tau, \int_{a(t)}^{b(s)} g(\tau,x_0)d\tau \right\| ds +$$

$$+\left\| \frac{2}{(2+T)}\left[C^{-1}d - \int_0^T Lf(t,x_0, \int_{-\infty}^{t} G(t,s)g(s,x_0)ds, \int_{a(t)}^{b(t)} g(s,x_0)ds)dt - (C^{-1}A+E)x_0 - x_0\mathrm{T} \right] \right\|$$

وبواسطة المأخوذة (1.1) و متتابعة الدوال (1.10) عندما m=1 نجد أن

$$\|x_1(t,x_0) - x_0\| \le M\alpha(t) + p(x_0) \le \frac{MT}{2} + p(x_0) \qquad (1.15)$$

كذلك نجد من (1.15)

$$\|y_1(t,x_0)-y_0(t)\| \le \int_{-\infty}^{t}\|G(t,s)\|\|g(s,x_1(s,x_0)-g(s,x_0)\|\,\mathrm{ds}$$
$$\le H\frac{\gamma}{\lambda}(M\frac{T}{2}+p(x_0)) \qquad (1.16)$$

لكل $,\mathrm{x}_0 \in D_\beta$ $\qquad y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t,s)g(s,x_0)ds \in D_{1\beta}$

وان

$$\|z_1(t,x_0)-z_0(t)\| \le \int_{a(t)}^{b(t)}\|g(s,x_1(s,x_0)-g(s,x_0)\|ds$$
$$\le hH(M\frac{\mathrm{T}}{2}+p(x_0))$$

(1.17)

لكل $,\mathrm{x}_0 \in D_\beta$ $\qquad z_0(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}g(s,x_0)ds \in D_{2\beta}$

نستنتج أن $x_1(t,x_0)\in D$ عندما $x_0\in D_\beta$ و $t\in[0,T]$ و هكذا وبواسطة الاستقراء الرياضي نجد أن

$$\|x_m(t,x_0)-x_0\| \le M\alpha(t)+p(x_0) \le M\frac{T}{2}+p(x_0) \qquad (1.18)$$

لكل $x_0 \in D_\beta$

ومن (1.18) ينتج أن

$$\|y_m(t,x_0)-y_0(t)\| \le H\frac{\gamma}{\lambda}(M\frac{T}{2}+p(x_0)) \qquad (1.19)$$

$$\|z_m(t,x_0)-z_0(t)\| \le \le hH(M\frac{T}{2}+p(x_0)) \qquad (1.20)$$

لكل $\mathrm{t}\in[0,T]$, $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{D}_\beta$, $\mathrm{y}_0(\mathrm{t}) \in \mathrm{D}_{1\beta}$, $z_0(t)\in D_{2\beta}$

بمعنى ان

$$x_m(t,x_0)\in D \quad , \quad \mathrm{y_m}(t,x_0)\in D_1 \quad , \quad \mathrm{z_m}(t,x_0)\in D_2$$

لكل $\mathrm{t}\in[0,T]$, $\mathrm{x}_0 \in D_\beta$, $\mathrm{y}_0(t)\in D_{1\beta}$, $z_0(t)\in D_{2\beta}$

إذ أن

$$y_m(t,x_0)=\int_{-\infty}^{t}G(t,s)g(s,x_m(t,x_0))ds \qquad ,\mathrm{m}=0,1,2,...$$

$$z_m(t,x_0)=\int_{a(t)}^{b(t)}g(s,x_m(t,x_0))ds \qquad ,\mathrm{m}=0,1,2,....$$

نبرهن ألان ان متتابعة الدوال $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بانتظـــام فـــي المجـــال (1.11) و هكذا فان نهاية المتتابعة دالة مستمرة في ذلك المجال من اجل ذلـــك نلاحـــظ ان تقارب المتتابعة (1.10) كاف لتقارب السلسلة

$$x_0+[x_1(t,x_0)-x_0]+[x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)]+.....+[x_m(t,x_0)-x_{m-1}] \qquad (1.21)$$

وذلك لان متتابعة المجاميع الجزئية للسلسلة (1.21) هي المتتابعة $x_m(t,x_0)$ كما أن

$$\begin{aligned}\|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)\| &\le (1-\frac{t}{T})\int_0^t[K\|x_1(s,x_0)-x_0\|+W\|y_1(s,x_0)-y_0\|+Q\|z_1(s,x_0)-z_0\|]ds+\\ &+\frac{t}{T}\int_t^T[K\|x_1(s,x_0)-x_0\|+W\|y_1(s,x_0)-y_0\|+Q\|z_1(s,x_0)-z_0\|]ds+\\ &+\frac{2}{(2+T)}\int_0^T[\ (1-\frac{t}{T})\int_0^t[K\|x_1(s,x_0)-x_0\|+W\|y_1(s,x_0)-y_0\|+Q\|z_1(s,x_0)-z_0\|]ds\\ &+\frac{t}{T}\int_t^T[K\|x_1(s,x_0)-x_0\|+W\|y_1(s,x_0)-y_0\|+Q\|z_1(s,x_0)-z_0\|]ds\ ]dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)\| &\le \left[\frac{T}{2}+\frac{2T^2}{3(2+T)}\right][\ K\|x_1(t,x_0)-x_0\|+WH\frac{\gamma}{\lambda}\|x_1(t,x_0)-x_0\|+\\ &\qquad + QhH\|x_1(t,x_0)-x_0\|\ ]\\ &\le \left[\frac{T}{2}+\frac{2T^2}{3(2+T)}\right]\left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]\left(M\frac{T}{2}+p(x_0)\right) \qquad (1.22)\end{aligned}$$

وبالمثل نجد أن

$$\|x_3(t,x_0)-x_2(t,x_0)\|\le\left[\frac{T}{2}+\frac{2T^2}{3(2+T)}\right]^2\left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]^2\left(M\frac{T}{2}+p(x_0)\right)$$

$$\|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)\| \le (1-\frac{t}{T})\int_0^t \left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]\|x_m(s,x_0)-x_{m-1}(s,x_0)\|ds+$$
$$+\frac{t}{T}\int_t^T \left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]\|x_m(s,x_0)-x_{m-1}(s,x_0)\|ds+$$
$$+\frac{2}{(2+T)}\int_0^T [\ (1-\frac{t}{T})\int_0^t \left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]\|x_m(s,x_0)-x_{m-1}(s,x_0)\|ds+$$
$$+\frac{t}{T}\int_t^T \left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]\|x_m(s,x_0)-x_{m-1}(s,x_0)\|ds\ ]dt$$

$$\|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)\| \le \Lambda^m(\alpha(t)+p(x_0)) \qquad (1.23)$$

ومن اجل m=0,1,2,3 يكون لدينا

$$\|x_m(t,x_0)-x_{m-1}(t,x_0)\| \le \Lambda^{m-1}(\alpha(t)+p(x_0))$$

من المتباينة (1.23) ولاجل $k \ge 1$ نحصل على

$$\|x_{m+k}(t,x_0)-x_m(t,x_0)\| \le \Lambda^m(\alpha(t)+p(x_0))\sum_{i=0}^{k-1}\Lambda^i \qquad (1.24)$$

من العلاقة (1.24) نجد أن

$$\|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)\| \le \Lambda^m(1-\Lambda)^{-1}(\alpha(t)+p(x_0)) \qquad (1.25)$$

لكل $k \ge 1$ و بالاستفادة من العلاقة (1.25) والشرط (1.9) فان متتابعة الدوال (1.10) متقاربة بانتظام في المجال (1.11) عندما $m \to \infty$

نضع

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x_\infty(t,x_0) \qquad (1.26)$$

بما أن متتابعة الدوال $x_m(t,x_0)$ مستمرة في المجال المذكور فان نهاية المتتابعة $x_m(t,x_0)$ مستمرة في المجال نفسه ثم

$$x(t,x_0) = x_\infty(t,x_0)$$

فضلا عن ذلك وباستخدام المأخوذة (1.1) والعلاقة (1.26) فان المتباينتين (1.14),(1.13) صحيحتان عندما $m \ge 1$.

و أخيرا نبرهن وحدانية الحل $x(t,x_0)$ الذي حصلنا عليه للنظام (1.3).

لنفرض وجود حل آخر $\hat{x}(t,x_0)$ للنظام (1.3) معرف ومستمر في المجال نفسه .

البرهان :

وبواسطة (1.31) , (1.32) يكون لدينا

$$\|\Delta(0,x_0)-\Delta_m(0,x_0)\| \le \frac{1}{T}\int_0^T (K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH)\|x_\infty(t,x_0)-x_m(t,x_0)\|dt +$$
$$+\frac{2}{T(2+T)}\int_0^T \Big[(1-\frac{t}{T})\int_0^t \Big[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\Big]\|x_\infty(s,x_0)-x_m(s,x_0)\|ds +$$
$$+\frac{t}{T}\int_t^T \Big[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\Big]\|x_\infty(s,x_0)-x_m(s,x_0)\|ds \Big]dt$$

(1.34)

$$\le \frac{T}{2}\left[\frac{(K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH)}{T}\right]\Lambda^m(1-\Lambda)^{-1}(\frac{MT}{2}+p(x_0))+$$
$$+\frac{\Lambda}{T}\Lambda^m(1-\Lambda)^{-1}(\frac{MT}{2}+p(x_0))$$

$$\|\Delta(0,x_0)-\Delta_m(0,x_0)\| \le \Lambda^m(1-\Lambda)^{-1}\left[\frac{\Big[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\Big]}{2}+\frac{\Lambda}{T}\right](\frac{MT}{2}+p(x_0))$$

لكل $m \ge 0$.

وألان نقدم المبرهنة الاتية اخذين بعين الاعتبار أن المتباينة (1.33)محققة من اجل $m \ge 0$

مبرهنة 1.3

لتكن كل من الدوال g(t,x), f(t,x,y,z) في النظام (1.3) معرفة على الفترة $[a,b]$

ونفرض أن متتابعة الدوال (1.32) تحقق المتباينتين الاتيتين

$$\begin{aligned}&\min \Delta_m(0,x_0) \le -\sigma_m\\&a+h^* \le x_0 \le b-h^*\\&\max \Delta_m(0,x_0) \ge \sigma_m\\&a+h^* \le x_0 \le b-h^*\end{aligned} \qquad (1.35)$$

لكل $m \ge 0$

حيث

$$h^{*}=\left(\frac{MT}{2}+p(x_0)\right)\ ,\ \sigma_m=\left\|\Lambda^{m}(1-\Lambda)^{-1}\left[\frac{\left[K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH\right]}{2}+\frac{\Lambda}{T}\right](\frac{MT}{2}+p(x_0))\right\|$$

عندئـــذ يوجـــد للنظـــام (1.3) حـــل $x=x(t,x_0)$ لاجـــل النقطـــة x_0 إذ أن $x_0\in\left[a+h^{*},b-h^{*}\right]$

البرهان :

لتكن x_1,x_2 آية نقطتين في الفترة $\left[a+h^{*},b-h^{*}\right]$ إذ أن

$$\begin{aligned}&\Delta(0,x_1)=\min\Delta(0,x_0)\\&\quad a+h^{*}\le x_0\le b-h^{*}\\&\Delta(0,x_2)=\max\Delta(0,x_0)\\&\quad a+h^{*}\le x_0\le b-h^{*}\end{aligned}\tag{1.36}$$

بواسطة (1.33), (1.35) يكون لدينا

$$\begin{aligned}\Delta(0,x_1)&=\Delta_m(0,x_1)+\left[\Delta(0,x_1)-\Delta_m(0,x_1)\right]\le 0\\\Delta(0,x_2)&=\Delta_m(0,x_2)+\left[\Delta(0,x_2)-\Delta_m(0,x_2)\right]\ge 0\end{aligned}\tag{1.37}$$

و من ثم من استمرارية الدالة $\Delta(0,x_0)$ و المتباينتين (1.37) توجد نقطـــة منعزلـــة شـــاذة $x_\infty=x_0$, $x_\infty\in\left[x_1,\ x_2\right]$ إذ أن $\Delta(0,x_\infty)=0$ هذا يعني أن للنظام حل $x=x(t,x_0)$ لاجل $x_0\in\left[a+h^{*},b-h^{*}\right]$.

ملاحظة 1.1

تمت صياغة منطوق المبرهنة 1.3 مع البرهان عندما $R^n=R^1$ اي عندما تكـــون x_0 كمية غير متجهة .

مبرهنة 1.4

لتكن $\Delta:D_\beta\to R^n$,

$$\Delta(0,x_0)=\frac{2}{T(2+T)}\Big[(C^{1}A+E)x_0+x_0T-C^{-1}d+\int_0^T Lf(t,x(t,x_0)),\int_{-\infty}^{t}G(t,s)g(s,x(s,x_0))ds,$$
$$,\int_{a(t)}^{b(t)}g(s,x(s,x_0))ds)dt\Big]+\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t,x_0)),\int_{-\infty}^{t}G(t,s)g(s,x(s,x_0))ds,\int_{a(t)}^{b(t)}g(s,x(s,x_0))ds)dt\tag{1.38}$$

إذ أن الدالة $x_\infty(t,x_0)$ نهاية متتابعة الدوال (1.10) عندئذ المتباينتين

$$\|\Delta(0,x_0)\| \le M + \frac{p(x_0)}{T} \tag{1.39}$$

$$\|\Delta(0,x_0^1)-\Delta(0,x_0^2)\| \le \left[(1-\Lambda)^{-1}\left[\frac{K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH}{2}+\frac{\Lambda}{T}\right](1+B_2T)+B_2\right]\|x_0^1-x_0^2\|$$

(1.40)

تتحقق لأجل النقاط $x_0, x_0^1, x_0^2 \in D_B$ اذ أن $B_2 = \dfrac{2}{(2+T)}\left[\dfrac{\|C^{-1}A+E\|}{T}+1\right]$

البرهان :

من صفات الدالة $x_\infty(t,x_0)$ المثبتة بواسطة المبرهنة 1.1 فان الدالة $\Delta = \Delta(0,x_0)$ مستمرة ومقيدة بالثابت الموجب $\left(M+\dfrac{p(x_0)}{T}\right)$ لكل $x_0 \in D_\beta$.

وبواسطة (1.38) فان المتباينة الاتية تتحقق

$$\|\Delta(0,x_0^1)-\Delta(0,x_0^2)\| \le B_2\|x_0^1-x_0^2\| + \left[\frac{K+WH\frac{\gamma}{\lambda}+QhH}{2}+\frac{\Lambda}{T}\right]\|x_\infty(t,x_0^1)-x_\infty(t,x_0^2)\|$$

(1.41)

إذ أن الدالتين $x_\infty(t,x_0^2), x_\infty(t,x_0^1)$ هما حل للمعادلة التكاملية

$$x(t,x_0^k) = x_0^k + \int_0^t (f(s,x(s,x_0^k)), \int_{-\infty}^s G(t,\tau)g(\tau,x(\tau,x_0^k))d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x(\tau,x_0^k))d\tau) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,x_0^k)), \int_{-\infty}^s G(t,\tau)g(\tau,x(\tau,x_0^k))d\tau, \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau,x(\tau,x_0^k))d\tau)ds)ds +$$

$$+\frac{2t}{T(2+T)}\Big[C^{-1}d - \int_0^T Lf(t,x(t,x_0^k)), \int_{-\infty}^t G(t,s)g(s,x(s,x_0^k))ds$$

$$, \int_{a(t)}^{b(t)} g(s,x(s,x_0^k))ds)dt - (C^{-1}A+E)x_0^k - x_0^k T\Big]$$

(1.42)

حيث .k=1,2 .

من (1.41) نجد أن

$$(1.43)\left\|x_{\infty}(t,x_0^1)-x_{\infty}(t,x_0^2)\right\|\le(1-\Lambda)^{-1}\left\|x_0^1-x_0^2\right\|(1+B_2T)$$

وبتعويض (1.43) في (1.41) نحصل على (1.40).

ملاحظة 1.2

المبرهنة 1.4 تؤكد استقرارية الحل للنظام (1.3) و ذلك عندما يحدث تغيير طفيف في النقطة x_0 يقابله تغيير طفيف في الدالة $\Delta=(0,x_0)$.

المراجع

1. Butris, R. N. Existens of a periodic solutions for nonlinear systems of integro-differential equation, Iraq. Mosul. J. Educ and sci. vol (25) (1994).

2. Butris, R. N. and saied, EL. M.On periodic solution for certain systems of integro-differential equation, Iraq, Mosul, J. Educ and Sci. vol (31) (1998).

3. Martynuk, O. M. The numerical-analytic method for odd periodic system for second-order differential equations, Ukrain, Kiev, nonlinear problems in theory of differential equations No 2 (1991).
4. Samoilenko A.M. ,Ronto N.I. "Numerical-analytic methods of investigating solutions of boundary problems" Kiev.1986.(Russian).

5. Samoilenko A.M. "periodic solution for nonlinear system of a second-order of differential equations" Minsk. II, Diff. Eqs. J. Tom 3,No 11, (1967), 1903-1912 (Russian).

6. Vakhobov G. O. Anumerical-analytic method of investigation of periodic system of integro-differential equation, Ukrain, Math. J. No 3 (1969).