وجود وتقارب الحل الدوري لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من الرتبة الثانية من نوع فولتيرا

د. رعد نوري بطرس
أستاذ مساعد
كلية التربية / قسم الرياضيات

غادة شكر جميل
طالبة دراسات عليا
ماجستير رياضيات

تاريخ الاستلام 2005/5/11 تاريخ القبول 2005/10/24

ABSTRACT

In this paper we study the existence and approximation of the periodic solutions for system of nonlinear integro-differential equations of Volterra type by Lebesque integrable function, By using weaker conditions of the function $F(t,s,x,\dot{x})$ to be measurable in t and bounded by Lebesque integrable function.

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة وجود وتقارب الحل الدوري لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من الرتبة الثانية من نوع فولتيرا وفق مفهوم ليبيك للتكامل، وذلك باستخدام شروط اضعف على الدالة $F(t,s,x,\dot{x})$ لتكون قابلة للقياس عند t ومقيدة بدالة قابلة للتكامل الليبيكي.

المقدمة

لقد كانت المعادلات التكاملية-التفاضلية مادةً أساساً في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الإيطالي فولتيرا (V. Volterra) والعالم السويدي فريدهولم (I. Fredholm) في وضع هذه المعادلات أي المعادلات التكاملية-التفاضلية واستخدامها في دراستهما، فكان أثرهما كبيراً في تطوير المعادلات التكاملية-التفاضلية التي لعبت دوراً بارزاً في بناء التحليل الرياضي والدالي[2].

وبعد ذلك اقترح Samoilenko [4] الطريقة التحليلية-العددية للبحث عن الحلول الدورية لمرتبة معلومة من أنظمة المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية والتي تضمنت متتابعات منتظمة للدوال الدورية، إن ما نتج من تلك الدراسة هو استخدام الحلول الدورية وبشكل واسع النطاق في مختلف المعالجات العلمية والعملية.

ندرس في هذا البحث نظام المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من الشكل أدناه:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = A(t)\big(x(t)+\dot{x}(t)\big)+\int_0^t K(t,s)F(t,s,x,\dot{x})ds + f(t) \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث أن $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ ، $x\in D\subseteq R^n$ ، D يمثل مجالاً مغلقاً ومقيداً، والدالتين:

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots\ldots,f_n(t)) \quad ,$$
$$F(t,s,x,\dot{x})=\big(F_1(t,s,x,\dot{x}),F_2(t,s,x,\dot{x}),\ldots\ldots,F_n(t,s,x,\dot{x})\big)$$

هما دالتان متجهتان معرفتان ومستمرتان في المجال:

$$(t,s,x,\dot{x})\in[0,T]\times[0,T]\times D\times D_1 \quad , \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ودوريتان في t ذات دور يساوي T.

حيث أن $\dot{x}\in D_1\subseteq R^m$ ، D_1 يمثل مجالاً مغلقاً ومحدوداً وجزئياً من الفضاء الأقليدي R^m . بافتراض أن $F(t,s,x,\dot{x})$ و $f(t)$ تحققان المتباينات الآتية:

$$\|f(t)\|\le N \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\|F(t,s,x,\dot{x})\|\le\|m(t)\| \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\|F(t,s,x_1,\dot{x}_1)-F(t,s,x_2,\dot{x}_2)\|\le\|L(t)\|\big(\|x_1-x_2\|+\|\dot{x}_1-\dot{x}_2\|\big) \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

لكل $t\in[0,T]$ ، $s\in[0,T]$ و $x,x_1,x_2\in D$ ، $\dot{x},\dot{x}_1,\dot{x}_2\in D_1$ ، N ثابت موجب وأن كلاً من $m(t)$ و $L(t)$ هي دالة قابلة للتكامل الليبيكي على الفترة $0\le t\le T$.

لتكن $0\le b\le s$ ، حيث b نقطة مختارة بحيث تكون

$$\int_0^b \|m(t)\|dt\le C \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\int_0^b \|L(t)\| dt = \delta < 1 \qquad \text{.........} (7)$$

حيث c ، δ ثوابت موجبة.

تعريف 1 [4] :

يطلق على نظام المعادلات التكاملية–التفاضلية اللاخطية (1) (إذ إن الطرف الأيمن معرف ومستمر ودوري في t ذات دور يساوي T في المجال (2)) بالنظام -T إذا كانت:

1- كل من D_f ، D_{1f} مجموعة غير خالية أي إن

$$\left.\begin{aligned} D_f &= D - \frac{T^2}{4} M \\ D_{1f} &= D_1 - \frac{T}{2} M \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........} (8)$$

2- الشرط $\Omega = \left[\Lambda(1+\frac{T}{2})\right]$ ، اقل من الواحد أي إن

$$\Omega < 1 \qquad \text{.........} (9)$$

حيث ان $\Lambda = \left[(QH\delta)\frac{T}{2}\right]$ ، $M = Q[HC + N]$ و $\|\cdot\| = \max\limits_{t \in [0,T]} |\cdot|$ وان

$$\|K(t,s)\| \le H \quad , \qquad \text{.........} (10)$$

$$\left\| e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \right\| \le Q \qquad \text{.........} (11)$$

حيث أن $A(t)$ ، $K(t,s)$ هما مصفوفتان موجبتان لكل منهما سعة $n \times n$ ومعرفتان فـــي المجال $0 \le s \le t \le T$ وان كل من H, Q ثوابت موجبة.

تعريف 2 [4] :

إن قيمة الوسيط μ في النقطة (t,x) التي يكون عندها حل النظام

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = A(t)\big(x(t) + \dot{x}(t)\big) + \int_0^t K(t,s)F(t,s,x,\dot{x})ds + f(t) - \mu$$

$$\text{.........} (12)$$

دوري في t ذات دور يساوي T يسمى بالثابت Δ - للنظام (1) خلال النقطـــة $t=0$ و $x = x_0$ إذا كان الوسيط وحيداً في تلك النقطة.

البند الأول: الحل التقريبي الدوري للنظام (1)

مأخوذة 1 :

لتكن كل من $f(t)$ و $F(t,s,x,\dot{x})$ دالة متجه مستمرة ومعرفة في الفترة $[0,T]$ عندئذ المتباينة:-

$$\left\| \int_0^t \left(e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{T}\int_0^T e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] ds \right) ds \right\| \le \alpha(t)M$$

متحققة لكل $0 \le t \le T$ ، $\alpha(t) \le \dfrac{T}{2}$ حيث أن $\alpha(t) = 2t(1-\dfrac{t}{T})$ و $M = Q[HC+N]$.

البرهان : مباشرة من المتباينة التالية نحصل على المطلوب إثباته حيث

$$\left\| \int_0^t \left(e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{T}\int_0^T e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] ds \right) ds \right\|$$

$$\le (1-\frac{t}{T})\int_0^t \left\| e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] \right\| ds +$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T \left\| e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau + f(s) \right] \right\| ds$$

$$\le (1-\frac{t}{T})\int_0^t Q\left[\int_0^s H\|m(t)\|d\tau + N \right] ds + \frac{t}{T}\int_t^T Q\left[\int_0^s H\|m(t)\|d\tau + N \right] ds$$

$$\le 2t(1-\frac{t}{T})Q[HC+N] = \alpha(t)M$$

الآن من النظام (1) ومتتابعة الدوال الناتجة منها نحصل على

$$\dot{x}(t,x_0)=LG(t,x_0)$$

و

$$\dot{x}_{m+1}(t,x_0)=LG(t,x_0) \qquad \text{.........} (13)$$

$$x(t,x_0)=x_0 e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}+L^2G(t,x_0) \qquad \text{.........} (14)$$

حيث ان كلاً من المؤثر L و L^2 معرفاً بالشكل التالي:

$$LG(t,x_0)=\int_0^t [G(s,x_0)-\Delta]ds \qquad \text{.........} (15)$$

$$L^2G(t,x_0)=\int_0^t \left[LG(s,x_0)-\frac{1}{T}\int_0^T LG(s,x_0)dt\right]ds \qquad \text{.........} (16)$$

وبفرض ان

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}\int_0^T e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}\left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau+f(t)\right]dt$$

وكذلك

$$G(t,x_0)=e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}\left[\int_0^s K(s,\tau)F(s,\tau,x(\tau,x_0),\dot{x}(\tau,x_0))d\tau+f(t)\right]$$

$$\text{.........} (17)$$

من الواضح أنه إذا كانت الدالة $G(t,x_0)$ معرفة ومستمرة ودورية في t على الفترة $[0,T]$ فإن كلاً من المؤثر $LG(t,x_0)$ ، $L^2G(t,x_0)$ معرف ومستمر ودوري في t على الفترة نفسها.

بوساطة المأخوذة 1 نجد أن

$$\|LG(t,x_0)\|\le \alpha(t)M\le M\frac{T}{2}$$

$$\|L^2G(t,x_0)\|\le [\alpha(t)]^2M\le M\left[\frac{T}{2}\right]^2$$

لكل $t\in[0,T]$ ، $\alpha(t)\le\dfrac{T}{2}$.

مبرهنة 1 :

إذا كان النظام (1) يحقق المتباينات (3) ، (4) و (5) والشرطين (10) و (11)

فإن متتابعة الدوال:

$$x_{m+1}(t,x_0)=x_0e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}+L^2\left[e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}\left(\int_0^t K(t,s)F(t,s,x_m(s,x_0),\dot{x}_m(s,x_0))ds+f(t)\right)\right]$$

مع

$$x_0(t,x_0)=x_0e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \quad , \quad \frac{dx_m(t,x_0)}{dt}=\dot{x}_m(t,x_0) \quad , \quad m=0,1,2,\ldots$$

.... (18)

دورية في t ذات دورة تساوي T ومتقاربة بانتظام عندما $m\to\infty$ في المجال:

$(t,x_0)\in[0,T]\times D_f$ .... (19)

من الدالة $x_\infty(t,x_0)$ المعرفة في المجال (19) مستمرة ودورية في t ذات دورة تساوي T وتحقق نظام المعادلات التكاملية:

$$x(t,x_0)=x_0e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}+L^2\left[e^{\int_0^t A(\eta)d\eta}\left(\int_0^t K(t,s)F(t,s,x(s,x_0),\dot{x}(s,x_0))ds+f(t)\right)\right]$$

.... (20)

الذي هو حل وحيد للنظام (1) بشرط أن يحقق المتباينات التالية:

$$\|x_\infty(t,x_0)-x_0\|\le M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{......... (21)}$$

$$\|x_\infty(t,x_0)-x_m(t,x_0)\|\le \Omega^m M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{......... (22)}$$

$$\|\dot{x}_\infty(t,x_0)\|\le M\frac{T}{2} \qquad \text{......... (23)}$$

$$\|\dot{x}_\infty(t,x_0)-\dot{x}_m(t,x_0)\|\le \Omega^m M\frac{T}{2} \qquad \text{......... (24)}$$

لكل $t\in[0,T]$ ، $x_0\in D_f$.

البرهان :

بواسطة الاستقراء الرياضي يمكن أن نثبت صحة المتباينتين التاليتين لكل $m\ge1$:

$$\|x_m(t,x_0)-x_0\|\le M\left[\frac{T}{2}\right]^2$$

$$\|\dot{x}_m(t,x_0)\| \le M\frac{T}{2}$$

حيث $x_m(t,x_0) \in D$ ، $\dot{x}_m(t,x_0) \in D_1$ لكل $t \in [0,T]$ ، $x_0 \in D_f$.

الآن سوف نبرهن ان متتابعة الدوال $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بانتظام في المجال (19) .

باستخدام (6) ، (7) ، (8) نجد ان

$$\|x_2(t,x_0) - x_1(t,x_0)\| = \|L^2[G_1(t,x_0) - G_0(t,x_0)]\| \le \Omega M\left[\frac{T}{2}\right]^2$$

و

$$\|\dot{x}_2(t,x_0) - \dot{x}_1(t,x_0)\| = \|LG_1(t,x_0) - LG_0(t,x_0)\| \le \Omega M\frac{T}{2}$$

الآن سوف نفرض صحة المتباينتين:

$$\|x_m(t,x_0) - x_{m-1}(t,x_0)\| \le \Omega^{m-1} M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........} (25)$$

$$\|\dot{x}_m(t,x_0) - \dot{x}_{m-1}(t,x_0)\| \le \Omega^{m-1} M\frac{T}{2} \qquad \text{.........} (26)$$

ثم نحاول إثبات المتباينتين التاليتين

$$\|x_{m+1}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \le \Omega^{m} M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........} (27)$$

و

$$\|\dot{x}_{m+1}(t,x_0) - \dot{x}_m(t,x_0)\| \le \Omega^{m} M\frac{T}{2} \qquad \text{.........} (28)$$

لكل m=0,1,2,... .

الآن من المتباينتين (27) و (28) ولكل $P \ge 1$ نحصل على

$$\|x_{m+p}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \le \Omega^{m} M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \sum_{i=0}^{p-1}\Omega^i \qquad \text{.........} (29)$$

$$\|\dot{x}_{m+p}(t,x_0) - \dot{x}_m(t,x_0)\| \le \Omega^{m} M\frac{T}{2} \sum_{i=0}^{p-1}\Omega^i \qquad \text{.........} (30)$$

ومن كل من المتباينتين (29) و (30) نستنتج ان

$$\|x_{m+p}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \le \Omega^{m}(1-\Omega)^{-1} M\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........} (31)$$

$$\left\| \dot{x}_{m+p}(t,x_0) - \dot{x}_m(t,x_0) \right\| \le \Omega^m (1-\Omega)^{-1} M \frac{T}{2} \qquad \text{.........} \ (32)$$

لكل $\Omega < 1$ ، $P \ge 1$.

بواسطة (31) و (32) والشرط (9) فان متتابعة الدوال (18) متقاربة بانتظام في المجال (19) عندما $m \to \infty$. نضع

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x_\infty(t,x_0) \qquad \text{.........} \ (33)$$

$$\lim_{m\to\infty} \dot{x}_m(t,x_0) = \dot{x}_\infty(t,x_0) \qquad \text{.........} \ (34)$$

بما أن متتابعة الدوال (18) مستمرة ودورية في t ذات دور يساوي T فإن نهاية كل من متتابعة الدوال $x_m(t,x_0)$ و $\dot{x}_m(t,x_0)$ مستمرة ودورية في t ذات دور يساوي T وبالتالي

$$x_\infty(t,x_0) = x(t,x_0)$$

$$\dot{x}_\infty(t,x_0) = \dot{x}(t,x_0)$$

وهكذا فإن الدالة $x_\infty(t,x_0)$ هي حل للمعادلة التكاملية (20).

مبرهنة 2 :

إذا كانت فرضيات وشروط المبرهنة 1 متحققة فإن الدالة $x = x(t,x_0)$ هي الحل الوحيد للنظام (1).

البرهان:

نفرض أنه يوجد على الأقل حلان مختلفان $r(t,x_0)$ ، $\dot{r}(t,x_0)$ للنظام (1) معرفان ومستمران ودوريان في t ذات دور يساوي T ومن الشكل أدناه:

$$r(t,x_0) = x_0 e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} + L^2 G_r(t,x_0) \qquad \text{.........} \ (35)$$

$$\dot{r}(t,x_0) = L G_r(t,x_0) \qquad \text{.........} \ (36)$$

حيث

$$G_r(t,x_0) = e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \left[\int_0^s K(s,\tau) F(s,\tau,r(\tau,x_0),\dot{r}(\tau,x_0)) d\tau + f(t) \right]$$

الآن سوف نبرهن على أن $r(t,x_0) = x(t,x_0)$ و $\dot{r}(t,x_0) = \dot{x}(t,x_0)$ لكل $x_0 \in D_f$ ولأجل ذلك سوف نثبت صحة المتباينتين التاليتين بواسطة الاستقراء الرياضي

$$\|r(t,x_0)-x_m(t,x_0)\| \le \Omega^m(1-\Omega)^{-1}M^*\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........} (37)$$

$$\|\dot{r}(t,x_0)-\dot{x}_m(t,x_0)\| \le \Omega^m(1-\Omega)^{-1}M^*\frac{T}{2} \qquad \text{.........} (38)$$

إذ أن $M^*=Q[HC_1+N]$ ، $\|R(t)\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|F(s,\tau,r(\tau,x_0),\dot{r}(\tau,x_0))|$ ،

$\int\limits_0^b\|R(t)\|dt \le C_1$.

عندما m=0 في (37) ومن (18) نحصل على

$$\|r(t,x_0)-x_0\|=\|L^2G_r(t,x_0)\| \le M^*\left[\frac{T}{2}\right]^2$$

إذن $r(t,x_0)\in D$ لكل $t\in[0,T]$ ، $x_0\in D_f$.

كذلك عندما m=0 في (38) ومن (13) نجد أن

$$\|\dot{r}(t,x_0)-0\|=\|LG_r(t,x_0)\| \le M^*\frac{T}{2}$$

إذن $\dot{r}(t,x_0)\in D_1$ لكل $t\in[0,T]$ ، $x_0\in D_f$.

لنفرض صحة المتباينتين (37) و (38) لكل m=p أي أن

$$\|r(t,x_0)-x_p(t,x_0)\| \le \Omega^p(1-\Omega)^{-1}M^*\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........} (39)$$

$$\|\dot{r}(t,x_0)-\dot{x}_p(t,x_0)\| \le \Omega^p(1-\Omega)^{-1}M^*\frac{T}{2} \qquad \text{.........} (40)$$

ولنحاول إثبات صحة المتباينتين التاليتين:

$$\|r(t,x_0)-x_{p+1}(t,x_0)\| \le \Omega^{p+1}(1-\Omega)^{-1}M^*\left[\frac{T}{2}\right]^2 \qquad \text{.........}(41)$$

$$\|\dot{r}(t,x_0)-\dot{x}_{P+1}(t,x_0)\| \le \Omega^{p+1}(1-\Omega)^{-1}M^*\frac{T}{2} \qquad \text{.........}(42)$$

في الواقع

$$\|r(t,x_0)-x_{p+1}(t,x_0)\| \le \left[\frac{T}{2}\right]^2\|G_r(t,x_0)-G_p(t,x_0)\|$$

$$\le \left[\frac{T}{2}\right]^2\Omega^p(1-\Omega)^{-1}M^*\Lambda\left(1+\frac{T}{2}\right)$$

إذن

$$\left\|r(t,x_0)-x_{p+1}(t,x_0)\right\| \le \Omega^{p+1}(1-\Omega)^{-1}M^*\left[\frac{T}{2}\right]^2$$

كذلك

$$\left\|\dot r(t,x_0)-\dot x_{p+1}(t,x_0)\right\| = \left\|LG_r(t,x_0)-LG_p(t,x_0)\right\|$$
$$\le \frac{T}{2}\Omega^{p}(1-\Omega)^{-1}M^*\Lambda\left(1+\frac{T}{2}\right)$$

إذن

$$\left\|\dot r(t,x_0)-\dot x_{p+1}(t,x_0)\right\| \le \Omega^{p+1}(1-\Omega)^{-1}M^*\frac{T}{2}$$

وعليه فلكل $m=0,1,2,\ldots$ نؤكد صحة المتباينتين (37) و(38) .

إذن بواسطة الشرط (9) حيث $\Omega^m \to 0$ عندما $m\to\infty$ والعلاقتين (33) ، (34) نحصل على

$$r(t,x_0) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x(t,x_0)$$
$$\dot r(t,x_0) = \lim_{m\to\infty} \dot x_m(t,x_0) = \dot x(t,x_0)$$

وهذا يبرهن أن الحل $x(t,x_0)$ وحيد للنظام (1) .

البند الثاني: وجود الحل الدوري للنظام (1)

إن مسألة وجود الحل الدوري للنظام (1) مرتبطة بشكل وحيد مع وجود صفرية الدالة $\Delta^* = \Delta^*(x_0)$ والتي تمتلك الشكل أدناه:

$$\Delta^* : D_f \to R^n \ ,$$

$$\Delta^*(t,x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T LG_\infty(t,x_0)\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots (43)$$

حيث أن $x_\infty(t,x_0)$ نهاية المتتابعة $x_m(t,x_0)$ وهذه الدالة $\Delta^*(x_0)$ لا يمكن إثبات وجودها إلا بطريقة التقريبات المتعاقبة وبخاصة من متتابعة الدوال الآتية:

$$\Delta_m^* : D_f \to R^n \ ,$$

$$\Delta_m^*(t,x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T LG_m(t,x_0)\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots (44)$$

حيث $m=0,1,2,\ldots$.

مبرهنة 3 :

إذا كانت فرضيات وشروط المبرهنة 1 معطاة فإن المتباينة التالية:

$$\left\|\Delta^*(t,x_0)-\Delta_m^*(t,x_0)\right\|\le\Omega^{m+1}(1-\Omega)^{-1}M\frac{T}{2} \qquad \text{.........} (45)$$

تتحقق لكل $m\ge 0$ و $x_0\in D_f$.

البرهان :

بواسطة المعادلات (43) ، (44) يكون لدينا

$$\left\|\Delta^*(t,x_0)-\Delta_m^*(t,x_0)\right\|=\left\|L\left[G_\infty(t,x_0)-G_m(t,x_0)\right]\right\|$$
$$\le\Omega^m(1-\Omega)^{-1}M\frac{T}{2}\Lambda\left(1+\frac{T}{2}\right)$$

إذن

$$\left\|\Delta^*(t,x_0)-\Delta_m^*(t,x_0)\right\|\le\Omega^{m+1}(1-\Omega)^{-1}M\frac{T}{2}$$

بمساعدة المبرهنة 3 نقدم المبرهنة التالية آخذين بنظر الاعتبار صحة المتباينة (45) لكل $m\ge 0$.

مبرهنة 4 :

ليكن الطرف الأيمن من النظام (1) معرفاً في المجال $0\le s\le t\le T$ ، $c\le x,\dot{x}\le d$ على R^1 بفرض أن متتابعة الدوال (44) تحقق المتباينتين التاليتين:

$$\left.\begin{aligned}&\min_{c+M\left(\frac{T}{2}\right)^2\le x_0\le d-M\left(\frac{T}{2}\right)^2}\Delta_m^*(x_0)\le-\frac{\Omega^{m+1}}{1-\Omega}M\frac{T}{2}\ .\\&\max_{c+M\left(\frac{T}{2}\right)^2\le x_0\le d-M\left(\frac{T}{2}\right)^2}\Delta_m^*(x_0)\ge\frac{\Omega^{m+1}}{1-\Omega}M\frac{T}{2},\Omega\ne1\end{aligned}\right\} \qquad \text{.........} (46)$$

لكل $m>0$ ، عندئذ النظام (1) له حل دوري $x=x(t)$ لكل $x(0)\in\left[c+M\left(\frac{T}{2}\right)^2,d-M\left(\frac{T}{2}\right)^2\right]$ ، إذ أن $\Omega=\left[\Lambda\left(1+\frac{T}{2}\right)\right]$ ، $\Lambda=(QH\delta)\frac{T}{2}$ و Q,H,δ,M ثوابت موجبة.

البرهان :

لتكن x_1 ، x_2 أية نقطتين في الفترة $\left[c+M\dfrac{T}{2}, d-M\dfrac{T}{2}\right]$ إذ أن

$$\left.\begin{aligned} \Delta_m^*(x_1) &= \min_{c+M\left(\frac{T}{2}\right)^2 \le x_0 \le d-M\left(\frac{T}{2}\right)^2} \Delta_m^*(x_0) \\ \Delta_m^*(x_2) &= \max_{c+M\left(\frac{T}{2}\right)^2 \le x_0 \le d-M\left(\frac{T}{2}\right)^2} \Delta_m^*(x_0) \end{aligned}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots (47)$$

باستعمال المتباينتين (45) ، (46) يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned} \Delta^*(x_1) &= \Delta_m^*(x_1) + \left(\Delta^*(x_1) - \Delta_m^*(x_1)\right) < 0 \\ \Delta^*(x_2) &= \Delta_m^*(x_2) + \left(\Delta^*(x_2) - \Delta_m^*(x_2)\right) > 0 \end{aligned}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots (48)$$

من استمرارية الدالة $\Delta^* = \Delta^*(x_0)$ والمتباينتين (48) فإنه توجد نقطة منعزلة منفـــردة x_∞ بحيث أن $x_\infty \in [x_1, x_2]$ وبالتالي يكون لدينا $\Delta^*(x_\infty) \equiv 0$. بمعنى آخر إن للنظـــام (1) حلاً دورياً $x = x(t, x_0)$ لكل $x_0 \in \left[c+M\left(\dfrac{T}{2}\right)^2, d-M\left(\dfrac{T}{2}\right)^2\right]$.

ملاحظة 1 :

تم صياغة منطوق المبرهنة 4 مع البرهان عندما $R^n = R^1$ بمعنى آخر عنـــدما تكون x_0 كمية غير متجهة.

مبرهنة 5 :

لتكن نفس الفرضيات والشروط في المبرهنة 1 معطاة عندئذ المتباينتان الآتيتين:

$$\left\|\Delta^*(x_0)\right\| \le M\frac{T}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (49)$$

حيث أن $M = Q[HC+N]$ ، $w_1(1-\Lambda) = \left(1-\Lambda\dfrac{T}{2}\right)^{-1}$ ، $w_2 = \left(1-\Lambda^2\dfrac{T}{2}w_1\right)^{-1}$.

و

$$\left\|\Delta^*(x_0^1) - \Delta^*(x_0^2)\right\| \le \left(1-\Lambda(1-\Lambda)^{-1}\right)\left(1+\Lambda^2\frac{T}{2}w_1w_2\right)\left\|\dot{x}_0^1 - \dot{x}_0^2\right\|Q + \Lambda w_1 w_2\left\|x_0^1 - x_0^2\right\|Q$$

$$\ldots\ldots\ldots (50)$$

متحققتين لكل النقاط $x_0, x_0^1, x_0^2 \in D_f$ ، وأن الدالة $\Delta^*(x_0)$ معطاة بالعلاقة التالية:

$$\Delta^*(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T LG(t, x_0)dt$$

البرهان : بما ان

$$\left\|\Delta^*(x_0)\right\| = \left\|\frac{1}{T}\int_0^T LG(t,x_0)dt\right\| \le \frac{1}{T}\int_0^T \left\|LG(t,x_0)\right\|dt \le \frac{T}{2}M$$

إذن

$$\left\|\Delta^*(x_0)\right\| \le M\frac{T}{2}$$

ومن العلاقة (43) فإن المتباينة التالية تتحقق

$$\left\|\Delta^*(x_0^1) - \Delta^*(x_0^2)\right\| \le \left\|\dot{x}_0^1 - \dot{x}_0^2\right\| \left\| e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} \right\| + \left\|LG^1(t,x_0) - LG^2(t,x_0)\right\|$$

إذن

$$\left\|\Delta^*(x_0^1) - \Delta^*(x_0^2)\right\| \le \left\|\dot{x}_0^1 - \dot{x}_0^2\right\| Q + \Lambda \left\|x(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - x(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| + \Lambda \left\|\dot{x}(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - \dot{x}(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\|$$

.... (51)

إذ أن

$$x(t,x_0^K,\dot{x}_0^K) = x_0^K e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} + L^2G^K(t,x_0)$$

.... (52)

حيث أن K=1,2. .

بما أن $x_\infty(t,x_0)$ تحقق المعادلة (20) فإن

$$\left\|x(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - x(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| \le \left(1-\Lambda\frac{T}{2}\right)^{-1} \left\|x_0^1 - x_0^2\right\| Q + \Lambda\frac{T}{2}\left(1-\Lambda\frac{T}{2}\right)^{-1} \left\|\dot{x}(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - \dot{x}(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\|$$

.... (53)

كذلك وجدنا المتباينة التالية:

$$\left\|\dot{x}(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - \dot{x}(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| \le (1-\Lambda)^{-1}\left\|\dot{x}_0^1 - \dot{x}_0^2\right\| Q + (1-\Lambda)^{-1}\Lambda\left\|x(t,x_0^1,\dot{x}_0^1) - x(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\|$$

.... (54)

بتعويض المتباينة (54) في (53) ينتج لنا

$$\left\|x(t,x_0^1,\dot{x}_0^1)-x(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| \le (1-\Lambda)w_1w_2\left\|x_0^1-x_0^2\right\|Q+\Lambda\frac{T}{2}w_1w_2\left\|\dot{x}_0^1-\dot{x}_0^2\right\|Q \qquad \text{.........} (55)$$

بتعويض العلاقة (55) في العلاقة (54) ينتج لنا

$$\left\|\dot{x}(t,x_0^1,\dot{x}_0^1)-\dot{x}(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| \le \left[1+\Lambda^2\frac{T}{2}w_1w_2\right](1-\Lambda)^{-1}\left\|\dot{x}_0^1-\dot{x}_0^2\right\|Q+\Lambda w_1w_2\left\|x_0^1-x_0^2\right\|Q \qquad \text{.........} (56)$$

بتعويض العلاقة (55) و (56) في العلاقة (51) نحصل على

$$\left\|\Delta^*(t,x_0^1,\dot{x}_0^1)-\Delta^*(t,x_0^2,\dot{x}_0^2)\right\| \le \left[(1+\Lambda(1-\Lambda)^{-1})\left(1+\Lambda^2\frac{T}{2}w_1w_2\right)\right]\left\|\dot{x}_0^1-\dot{x}_0^2\right\|Q+\Lambda w_1w_2\left\|x_0^1-x_0^2\right\|Q$$

ملاحظة 2 :

تؤكد المبرهنة 5 استقرارية الحل لنظام المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من نوع فولتيرا (1) وذلك أنه عندما يحدث تغيير طفيف في النقطة x_0 فإن تغييراً طفيفاً سيقابله في الدالة $\Delta=\Delta(t,x_0)$.

REFERENCES

1- Butris, R. N. and Al-Ameen, M. S. The existence of periodic solutions for nonlinear systems of integro-differential equations, Iraq, Mosul, J. of Educ. And sci, Vol. 34, (1999), 37-48.

2- Kolmokorov, A. N. and Fomin, G. B. Introduction in the theory of functional and mathematical analysis, USSR, Moscow, (1989).

3- Martynyuk, D. I. Periodic solutions of second-order nonlinear differential equations, Ukraine, Kiev, Math. J. No. 4, (1967), 125-132.

4- Samoilenko, A. M. and Ronto, N. I. A numerical-analytic method for investigation of periodic solutions, Ukraine, Kiev, (1976).