حلول عدد من معادلات فولتيرا التكاملية ذات النواة المنفردة

محمد شامي حسو و خير الدين حسين مصطفى

قسم الرياضيات – كلية التربية المديرية العامة لتربية نينوى

جامعة الموصل

تاريخ الاستلام 2006/4/27

تاريخ القبول 2006/7/17

ABSTRACT

In this paper we study some different methods for solving Volterra integral equation with singular kernel of the first kind and expanded by using a method for finding the solution using Gamma function when f(x) is an algebraic function and α known. Also we expand the result in case of f(x) is an algebraic function as a polonomial.

الملخص

في هذا البحث تم دراسة بعض الطرائق المختلفة لحل معادلة فولتيرا التكاملية ذات النواة المنفردة من النوع الأول إذ وسعت الطريقة المستخدمة لإيجاد الحل بطريقة أخرى تكون فيها دالة كاما معرفة بالدالة f(x) عندما تكون جبرية وقيمة α معروفة كذلك وسعت النتائج في حالة كون f(x) دالة جبرية متعددة الحدود.

الطريقة الأولى:

بأخذ المعادلة التكاملية ذات النواة المنفردة

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(x) \quad , \qquad 0<\alpha<1 \quad \ldots\ldots(1)$$

وبفرض أن الدالة f(x) مستمرة وقابلة للاشتقاق لكل قيم $x \geq 0$.

لإيجاد حل المعادلة التكاملية $\phi(x)$ نضرب طرفي المعادلة (1) بـــ $(x-s)^{\alpha-1}$ ثـم نكاملها نسبة إلى s من 0 إلى x ، فنحصل على

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^\alpha}dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$$

$$\int_0^x \phi(t)dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds \quad \ldots\ldots(2)$$

وبتبديل المتغير $s = t + (x - t)\, z$ داخل التكامل في الطرف الأيسر من المعادلـــة (2) ينتج جدول التكاملات المعروفة.

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\alpha\pi} \quad \ldots\ldots(3)$$

وباستخدام التعويض $s=xz$ في الطرف الأيمن من المعادلة (2) فنحصل على

$$\int_0^1 \frac{f(xz)x}{(x-xz)^{-\alpha}}dz = \int_0^1 \frac{f(xz)x}{x^{1-\alpha}(1-z)^{-\alpha}}dz = \int_0^1 \frac{f(xz)x^\alpha}{(1-z)^{1-\alpha}}dz \quad \ldots\ldots(4)$$

وبتعويض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (2) ينتج لدينا

$$\int_0^x \phi(t)dt = \frac{\mathrm{Sin}\alpha\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{f(xz)x^\alpha}{(1-z)^{1-\alpha}}dz \quad \ldots\ldots(5)$$

باشتقاق المعادلة (5) نسبة إلى x ، نجد أن

$$\phi(x)=\frac{\text{Sin}\alpha\pi}{\pi}\int_0^1\frac{x^{\alpha}}{(1-z)^{1-\alpha}}dz\left[zf'(xz)+\frac{\alpha f(xz)}{x}\right]$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\phi(x)=\frac{\text{Sin}\alpha\pi}{\pi x}\int_0^x\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\left[sf'(s)+\alpha f(s)\right]\text{.......................................}(6)$$

ان المعادلة (6) هي حل للمعادلة (1).

نلاحظ هنا ان من الممكن إيجاد حل أية معادلة تكاملية ذات نواة منفردة إذا عرفت الدالة f(x) وقيمة α. وكمثال توضيحي ندرس المعادلة التكاملية الآتية ذات النواة المنفردة:

$$\int_0^x\frac{\phi(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt=x$$

في هذه المعادلة $f(x)=x$ و $\alpha = 1/2$

إذن $f(s)=s\rightarrow f'(s)=1$

ثم نعوض هذه القيم في المعادلة (6) نحصل على

$$\phi(x)=\frac{\text{Sin}\pi/2}{\pi.x}\int_0^x\frac{ds}{(x-s)^{1/2}}\left[S+\frac{1}{2}S\right]$$

إذن

$$\phi(x)=\frac{3}{2\pi.x}\int_0^x\frac{S}{(x-s)^{1/2}}ds$$

باستخدام التكامل بطريقة التجزئة نحصل على

$$\phi(x)=\frac{1}{\pi.x}.2x^{3/2}=\frac{2}{\pi}x^{1/2}\text{ ....}(7)$$

أما إذا أخذنا المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt = x^2$$

فان حلها باستخدام المعادلة (6) هو

$$\phi(x) = \frac{8}{3\pi}x^{3/2} \quad \ldots\ldots (8)$$

بعد التبسيط وإجراء التكاملات.

وهكذا نستطيع أن نجد الحل لأية معادلة تكاملية ذات نواة منفردة إذا كانت الدالة f(x) دالة جبرية من حد واحد ومن آية درجة وهذه الطريقة تكون طويلة جدا ونحتاج بموجبها إلى التكامل بالتجزئة لعدد كبير من المرات.

الطريقة الثانية:

نأخذ المعادلة التكاملية ذات النواة المنفردة (1) ونستخدم أسلوب الطريقة الأولى بتبديل المتغير $s = t + (x-t)\,z$ داخل التكامل في الطرف الأيسر من المعادلة (2) فنحصل على

$$\int_s^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\alpha\pi} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \quad \ldots\ldots (9)$$

بتعويض المعادلة (9) في المعادلة (2) نحصل على

$$\int_0^x \phi(t)dt = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$$

وباشتقاق المتطابقة الأخيرة نسبة الى x ، ينتج لدينا

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(0)}{X^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right] \quad \ldots\ldots (10)$$

إن المعادلة (10) هي كذلك حل للمعادلة التكاملية ذات النواة المنفردة (1)، في هذه الطريقة نحتاج إلى الدالة f(x) ثم نجد f(0) وكذلك قيمة α.

فإذا أخذنا $f(x) = x$ و $\alpha = 1/2$ فان حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt = x$$

هو

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left[\frac{0}{x^{1/2}} + \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{\pi}.2x^{1/2} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}x^{1+\frac{1}{2}-1}$$

إذ ان

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Gamma(1+\frac{1}{2}) \quad , \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad , \quad \alpha = 1/2$$

وإذا أخذنا $f(x)=x^2$, $\alpha=1/2$ فان حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt = x^2$$

هو

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}.\frac{8}{3}x^{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3/4\pi}$$

بما أن

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad ,\Gamma(2+1) = 2! = 2$$

إذن سيصبح الحل بالشكل

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\alpha)}x^{2+\frac{1}{2}-1}$$

وإذا كانت $f(x)=x^3$ ، $\alpha=1/2$ في المثال التوضيحي

فان حل المعادلة التكاملية (1) من الشكل التالي

$$\phi(x) = \frac{6x^{5/2}}{\frac{15}{8}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

وذلك بعد التعويض في المعادلة (10) واستخدام طريقة التكامل بالتجزئة عدة مرات يكون لـــدينا الحل بالشكل:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(3+\alpha)} x^{3+\frac{1}{2}-1}$$

وهكذا فإذا أخذنا $f(x)$ دالة جبرية لحد واحد وقيمة α معروفة نستنتج أن حل المعادلـــة التكاملية التالية:

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = x^n$$

من الشكل أدناه

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha-1} \quad \text{...} (11)$$

ملاحظة:

نلاحظ هنا إننا إذا علمنا الحد الجبري وقيمة α نستطيع أن نجد الحل بطريقة سريعة من دون استخدام طرائق التكامل.

كما لاحظنا أن حل المعادلات التكاملية عندما $f(x)=x$ و $f(x)=x^2$ وعندما $\alpha = \frac{1}{2}$ مطابقاً في الطريقتين الأولى والثانية وهكذا يكون الحل مطابقاً لأية دالة $f(x)$ جبريـــة ذات حـــد واحـــد ومرفوع لأس عدد صحيح موجب.

الآن من الممكن استخدام هذه الطريقة عندما تكون الدالة $f(x)$ جبرية متعددة الحدود.

فإذا أخذنا على سبيل المثـال الدالـة $f(x) = a_1 x + a_2 x^2$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ إذ a_1 ، a_2 ثابتـان اختياريان، فان حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1/2}} dt = a_1 x + a_2 x^2$$

وبعد التعويض في المعادلة (10) واستخدام طرائق التكامل تصبح كالآتي:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} a_1 x^{1+\frac{1}{2}-1} + \frac{\Gamma(2+1) a_2 x^{2+\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\alpha)}$$

نستمر بأخذ الدالة f(x) متعددة الحدود من الدرجتين الثالثة والرابعة إلـى الدرجـة k ، $\alpha = \frac{1}{2}$ حتى نستنتج أن حل المعادلة التكاملية يكون من الشكل الآتي:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(1+1) a_1 x^{1+\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\Gamma(2+1).a_2 x^{2+\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} + \ldots + \frac{\Gamma(k+1) a_k}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+\alpha)} x^{k+\alpha-1}$$

إذ أن

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k$$

ومنها نحصل على القانون الآتي:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+\alpha)} a_k x^{k+\alpha-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

إذن وباستخدام هذا القانون نجد أن حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)} \frac{1}{2} dt = x + x^2 + x^3$$

هو

$$\phi(x) = \frac{2x^{1/2}}{\pi} + \frac{8}{3\pi} x^{3/2} + \frac{48}{15\pi} x^{5/2}$$

وهذه طريقة سريعة جدا لإيجاد الحل من دون استخدام طرائق التكامل حسب وبمعرفة درجة المعادلة الجبرية وقيمة α وباستخدام دالة كاما نحصل على حل معادلة فولتيرا التكاملية ذات النواة المنفردة من النوع الأول.

3. حل معادلة فولتيرا التكاملية ذات النواة المنفردة من النوع الثاني

في هذا البند قمنا بدراسة المعادلة التكاملية ذات النواة المنفردة من النوع الثاني

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \quad , \qquad 0 < \alpha < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

والّتي تحقق الشرط الابتدائي

$$\phi(0) = f(0)$$

إذ $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند $x \geq 0$.

نضرب المعادلة (13) في $(x-s)^{-\frac{1}{2}}$ ونكامل نسبة الى s من 0 إلى x فنحصل على

$$\int_0^x \frac{\phi(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} \int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$\int_0^x \frac{\phi(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^x \phi(t) dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{\frac{1}{2}} (s-t)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

وبتبديل المتغير $s=t+(x-t)z$ داخل التكامل في الطرف الأيمن من المعادلة (14) ينتج جدول التكاملات المعروفة

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{\frac{1}{2}} (s-t)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{ds}{z^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

وبتعويض المعادلة (15) في المعادلة (14) ، نحصل على

$$\int_0^x \frac{\phi(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds - \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds = \pi \int_0^x \phi(t) dt$$

باستخدام المعادلة (13) نستبدل الحد الأول في الطرف الأيسر لهذه المتطابقة بـ ϕ -f ثم نشتق النسبة التي حصلنا عليها، فنجد أن

$$\phi'(x) - \pi\phi(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x) + \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds\right] \quad \text{...} (16)$$

من المعادلة (13) يمكن كتابة المعادلة (16) بالشكل الآتي:

$$\phi'(x) = \pi\phi(x) + G(x)$$

إذ

$$G(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x) + \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} ds\right]$$

نفرض ان

$$\phi = ue^{\pi x}$$

إذن

$$\frac{d\phi}{dx} = \pi ue^{\pi x} + e^{\pi x}\frac{du}{dx}$$

وهكذا

$$\frac{du}{dx} = e^{-\pi x}G(x)$$

وبالتكامل نحصل على

$$\int_0^x du = \int_0^x e^{-\pi r}G(r)dr$$

إذن

$$u(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\pi r}G(r)dr$$

و

$$\phi(x) = \phi(0)e^{\pi x} + \int_0^x e^{\pi(x-r)}G(r)dr$$

$$\phi(x) = f(0)e^{\pi x} + \int_0^x e^{\pi(x-r)}\frac{d}{dr}[f(r) + \int_0^r \frac{f(s)}{(r-s)^{1/2}} ds]dr$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1/2}} + \pi \int_0^x e^{\pi(x-r)} \left[f(r) + \int_0^r \frac{f(s)ds}{(r-s)^{1/2}} \right] dr$$

هذا هو حل المعادلة التكاملية (13).

المصادر:

REFERENCES

1- Annamaria Palamara Orsi, "Product integration for volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels" Mathematics of computation vol. 65, No. 215 (1996).

2- Chambers, Li. G, A short courses Integral Equations, London, (1976).

3- Delves, L.M ; Mohammed, J.L ; "Computational Methods for Integral Equations", Cambridge University Press, Cambridge (1985).

4- Golbery, M.A., Solution methods for integral equations, New York, (1978).

5- Gripenberg, G. and Lonelen, S., "Volterra integral and functional equations", Gambridge University Press, (1990).

6- Jerri, A.J. : "Introduction to Integral Equations with Applications", Marcel Dekker, Inc., New York, (1985).

7- Kherdeen H. Musstafa Al-Anzi "Solutions For Some Voltterra Integral Equations With Singular Kernels", Athesis of M.Sc. University of Mosul, 2005.