استخدام مبرهنة الغاية المركزية لوصف سلوك اللطخة العشوائية للزمن المستمر

Using Central Limit Theorem to Describe the Behavior of Random stain with Continuous Time

د.حسن حسين إبراهيم

جامعة تكريت /قسم الرياضيات /كلية علوم الرياضيات والحاسبات

شادية مجيد نوري

جامعة تكريت قسم الرياضيات /كلية التربية

Abstract

In this paper we use Central Limit Theorem to Describe the Behavior of Random Stain with Continuous Time where $\psi(t)=t^r$.

المستخلص

تناولنا في هذه الورقة اللطخة العشوائية [3] [4] للزمن المستمر وقد استخدمنا مبرهنة الغاية المركزية في وصف سلوك انتشار اللطخة العشوائية عندما $\psi(t)=t^r$.

1- المقدمة Introduction

نقوم في هذا البحث بدراسة مبرهنة الغاية المركزية للزمن المستمر ونستخدم التعاريف المستخدمة في [3] و [4] ، الدائرة الوحدوية $S_1=\{\exp(i\alpha):\alpha\in I\}$ ، حيث إن $I=[0,2\pi)$ ، على المستوي .

نفرض أن f دالة بورل غير سالبة معرفة على S_1 و ψ دالة مستمرة غير سالبة معرفة على $[0,\infty)$ و $(\pi_t, t\geq 0)$ عملية بواسون Poisson process بالمعلمة $\lambda>0$ ونفرض ان $\tilde{t}_j$ يكون زمن الحدوث للحدث j للعملية فضلا عن ذلك ، نفرض أن $(\alpha_j)_{j=1,2,\dots}$ هي متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة تتبع توزيع منتظم على S_1 ومستقلة عن العملية $(\pi_t, t\geq 0)$.

نعرف العمليات العشوائية ذو معلمتين two-parameter stochastic process للطخة كالآتي:

$$V(t,\alpha)=\sum_{\tilde{t}_i<t}\psi(\tilde{t}_i)\, f(\alpha-\alpha_i),\quad t\geq 0,\ \alpha\in I,\quad t\geq 0,\alpha\in I \qquad \dots.(1.1)$$

و

$$\xi(T,\alpha)=\int_o^T V(t,\alpha)dt,\qquad T\geq 0,\alpha\in I \qquad \dots.(1.2)$$

نسمي العملية $\left(\xi(T,\alpha), T \geq 0, \alpha \in I\right)$ اللطخة العشوائية للزمن المستمر.

2- مساعدة

لكل $r \geq 0$ فان :

1- $\sum_{v=0}^{N-1}(N-v)\left[(v+1)^r - v^r\right] \leq O(N^{r+1})$

2- $\sum_{v=0}^{N-1}(N-v)^2\left[(v+1)^r - v^r\right]^2 \leq O(N^{2r+1})$

البرهان -1

$$\sum_{v=0}^{N-1}(N-v)[(v+1)^r - v^r] = \sum_{v=0}^{N-1}\int_{v}^{v+1}(N-v)[(v+1)^r - v^r]dv$$

$$\leq r\int_{0}^{N}((N+1)-x)(x+1)^{r-1}dx$$

نفرض أن $y = x+1$

إذن:

$$= r\int_{1}^{N+1}(N+2-y)y^{r-1}dy$$

$$= r\left(N\left(\frac{(N+1)^r}{r} - \frac{1^r}{r}\right) + 2\left(\frac{(N+1)^r}{r} - \frac{1^r}{r}\right) - \left(\frac{(N+1)^{r+1}}{r+1} - \frac{1^{r+1}}{r+1}\right)\right)$$
$$\approx O(N^{r+1})$$

البرهان -2

وبنفس الطريقة من البرهان -1- نحصل:

$$\sum_{v=0}^{N-1}(N-v)^2[(v+1)^r-v^r]^2=\sum_{0}^{N-1}\int_{0}^{v+1}(N-v)^2[(v+1)^r-v^r]dv$$

$$\leq\sum_{0}^{N-1}\int_{v}^{v+1}(N-v)^2(r(v+\theta_r)^{r-1})^2dv$$

$$=r^2\int_{0}^{N}((N+1)-x)^2(x+1)^{2r-2}dx$$

نفرض أن $y=x+1$

$$=r^2\int_{1}^{N+1}(N+2-y)^2y^{2r-2}dy$$

$$=r^2[\left(N+2\right)^2\tfrac{(N+1)^{2r-1}}{2r-1}-2\left(N+2\right)\tfrac{(N+1)^{2r}}{2r}+\tfrac{(N+1)^{2r+1}}{2r+1}$$
$$-\left(N+2\right)^2\tfrac{1^{2r-1}}{2r-1}+2\left(N+2\right)\tfrac{1^{2r}}{2r}-\tfrac{1^{2r+1}}{2r+1}]$$
$$\approx O(N^{2r+1})$$

3- مساعدة [2]

أذا كان V_n،Z_n،Z حيث $n=1,2,...$ متغيرات عشوائية معرفة على فضاء احتمالى (Ω,F,P) وإذا كان:

$Z_n\xrightarrow{d}Z$ عندما $n\to\infty$ ....(3.1)

و

$V_n\xrightarrow{L^1}0$ عندما $n\to\infty$ ....(3.2)

فان $Z_n+V_n\xrightarrow{d}Z$ عندما $n\to\infty$

4- مبرهنة

نفرض أن $\xi=\xi(T,\alpha)$ ، $T=0,1,2,...,$ يرمز للطخة العشوائية للزمن المستمر كما في المعادلتين (1.1) و (1.2) ونفرض أن $\psi(t)=t^r$ حيث أن $r\geq 0$ فأن اللطخة $\xi=\xi(T,\alpha)$ تحقق مبرهنة الغاية المركزية لأي اتجاه ثابت α ، أي أن :

$$\bar{\xi}_T=\frac{\xi(T,\alpha)-\mathrm{E}\left[\xi(T,\alpha)\right]}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}}\xrightarrow{d} N(0,1) \quad ....(3.4.1)$$

عندما $T\to\infty$.

البرهان

استخدام مبرهنة الغاية المركزية لوصف سلوك اللطخة العشوائية للزمن المستمر ، يستنتج من استخدام مبرهنة الغاية المركزية للزمن المتقطع بما إن :

$$\xi(T,\alpha)=\int_0^T V(t,\alpha)dt,\quad T\geq 0$$

و

$$V(t,\alpha)=\sum_{\tilde{t}_i<t}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i),\ t\geq 0$$

حيث أن $\tilde{t}_i$ زمن حدوث الحادثة i لعملية بواسون Poisson Process $(N_t,t\geq 0)$

$$\xi(T,\alpha)=\int_{[0,N)} V(t,\alpha)dt+\int_{[N,T)} V(t,\alpha)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{[k,k+1)}(\sum\nolimits_{0\le\tilde{t}_i<[t]+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)-$$

$$\sum\nolimits_{t\le\tilde{t}_i<[t]+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i))dt+\int_{[N,T]} V(t,\alpha)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{[k,k+1)}(\sum_{v=0}^{[t]}\sum\nolimits_{v\le\tilde{t}_i<v+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)dt-\int_{[0,N)}\sum\nolimits_{t\le\tilde{t}_i<[t]+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)dt+$$

$$\int_{[N,T]} V(t,\alpha)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}\sum\nolimits_{v\le\tilde{t}_i<v+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)-$$

$$\int_{[0,N)}\sum\nolimits_{t\le\tilde{t}_i<[t]+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)+\int_{[N,T]} V(t,\alpha)dt$$

وألان نكتب الصيغة آلاتية:

$$\bar{\xi}(N,\alpha)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}\psi(v)X_v=\sum_{k=0}^{N-1}(N-v)\psi(v)X_v$$

حيث $X_v=\sum\limits_{v\le\tilde{t}_i<v+1} f(\alpha-\alpha_i)$

أذن $\bar{\xi}(N,\alpha)$ يمثل اللطخة العشوائية للزمن المتقطع في مبرهنة (4-2) و (X_v) هي متتابعة من متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع نفس التوزيع ،ونفرض أن $EX_v=1$.

الآن نستطيع أن نكتب الصيغة الآتية:

$$\xi(T,\alpha)=\bar{\xi}(N,\alpha)+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}\sum\nolimits_{v\le\tilde{t}_i<v+1}(\psi(\tilde{t}_i)-\psi(v))f(\alpha-\alpha_i)-$$

$$\int_{[0,N)}\sum\nolimits_{t\le\tilde{t}_i<[t]+1}\psi(\tilde{t}_i)f(\alpha-\alpha_i)dt+\int_{[N,T)} V(t,\alpha)dt$$

$$=\bar{\xi}(N,\alpha)+\zeta^{(1)}_{(N,\alpha)}-\zeta^{(2)}_{(N,\alpha)}+\zeta^{(3)}_{(T,\alpha)}$$

نفرض: $\xi(T,\alpha)=\bar{\xi}(N,\alpha)+A(T)$

حيث $A(T)=\xi^{(1)}_{(N,\alpha)}-\xi^{(2)}_{(N,\alpha)}+\xi^{(3)}_{(T,\alpha)}$:

نريد أن نبرهن أن:

$$\frac{\xi(T,\alpha)-\mathrm{E}\xi(T,\alpha)}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}}\xrightarrow{d}N(0,1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.2)$$

عندما $T\to\infty$

من مبرهنة (4) في البحث الثاني لدينا :

$$\frac{\overline{\xi}(N,\alpha)-\mathrm{E}\overline{\xi}(N,\alpha)}{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}\xrightarrow{d}N(0,1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

عندما $N\to 0$

نلاحظ أن:

$$\frac{\xi(T,\alpha)-\mathrm{E}\xi(T,\alpha)}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}}=\frac{\overline{\xi}(T,\alpha)-\mathrm{E}\overline{\xi}(N,\alpha)+A(T)-\mathrm{E}A(T)}{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}\cdot\frac{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}}\ldots\ldots(4.4)$$

الآن نريد أن نبرهن :

$T\to\infty$ عندما L^1 في $\quad \mathrm{Z}_T=\dfrac{A(T)-\mathrm{E}A(T)}{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}\to 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.5)$

و

$T\to\infty$ عندما $\quad \dfrac{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}}\to 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.6)$

في البداية نبرهن (4.5) أي نريد أن نبرهن :

$T\to\infty$ عندما $\quad \displaystyle\int_\Omega |Z_T|\,dP(\omega)\to 0$

لتكن f دالة غير سالبة و ψ هي دالة غير متناقصة من ذلك نستنتج أن:

$$\begin{aligned}0\le\zeta^{(1)}_{(N,\alpha)}&=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}\sum\nolimits_{v\le\tilde{t}_i<v+1}(\psi(\tilde{t}_i)-\psi(v))f(\alpha-\alpha_i)\\&\le\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}(\psi(\tilde{t}_i)-\psi(v))\sum_{v\le\tilde{t}_i<v+1}f(\alpha-\alpha_i)\\&=\sum_{v=0}^{N-1}\sum_{k=v}^{N-1}[\psi(v+1)-\psi(v)]X_v\end{aligned}$$

إذن:

$$0\le\zeta^{(1)}_{(N,\alpha)}\le\sum_{v=0}^{N-1}(N-v)\left((v+1)^r-v^r\right)X_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.7)$$

بواسطة المساعدة (2)   نحصل على:

$$0 \le \mathrm{E}\zeta^{(1)}_{(N,\alpha)} \le \sum_{v=0}^{N-1}\left(N-v\right)\left(\left(v+1\right)^r - v^r\right) \le O(N^{r+1}) \quad ....(4.8)$$

وبنفس الطريقة بواسطة المساعدة (2)   نحصل على:

$$0 \le \zeta^{(2)}_{(N,\alpha)} \le \int_{[0,N)} \sum\nolimits_{v \le \tilde{t}_i < v+1} \psi([t]+1) f(\alpha - \alpha_i) dt$$

$$= \sum_{v=0}^{N-1}\left(v+1\right)^r X_v$$

نفرض $\mathrm{E}X_v = 1$ وبالتالي نحصل على:

$$0 \le \mathrm{E}\zeta^{(2)}_{(N,\alpha)} \le O(N^{r+1}) \quad ....(4.9)$$

وبنفس الطريقة بواسطة المساعدة (2)   نحصل على:

$$0 \le \zeta^{(3)}_{(T,\alpha)} \le \sum\nolimits_{0 \le \tilde{t}_i < N+1} \psi(\tilde{t}_i) f(\alpha - \alpha_i)$$

$$= \sum_{v=0}^{N-1} \sum\nolimits_{v \le \tilde{t}_i < v+1} \psi(\tilde{t}_i) f(\alpha - \alpha_i)$$

$$\le \sum_{v=0}^{N-1} (v+1)^r X_v \le O(N^{r+1})$$

إذن:

$$0 \le \mathrm{E}\zeta^{(3)}_{(T,\alpha)} \le O(N^{r+1}) \quad ....(4.10)$$

من المعادلات (4.8) و (4.9) و(4.10) نحصل على :

$$\mathrm{E}\left|A(T)\right| \le O(N^{r+1}) \quad ....(4.11)$$

بما أن $\overline{\xi}(N,\alpha) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{k}\psi(v)X_v$ هي اللطخة العشوائية للزمن المتقطع و من برهان مبرهنة (4) في البحث الثاني نحصل على:

$$D^2\overline{\xi}(N,\alpha) = O(N^{2r+3}) \quad ....(4.12)$$

من معادلة (4.11) و (4.12) نحصل على :

$$\frac{\mathrm{E}|A(T)|}{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)} \to 0$$

عندما $T \to \infty$

وهذا يؤدي إلى $\quad \mathrm{Z}_T = \dfrac{A(T)-\mathrm{E}A(T)}{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}} \to 0 \quad$ عندما $T \to \infty$

الآن نريد أن نبرهن معادلة (4.6) أي أن:

$$\frac{\sqrt{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}}{\sqrt{D^2\xi(T,\alpha)}} \to 1 \qquad \text{عندما } T \to \infty$$

نبحث في سلوك التقارب لتباين $\mathrm{D}^2\mathrm{A(T)}$ عندما $T \to \infty$.

من معادلة (4.7) نحصل على :

$$0 \le \zeta^{(1)}_{(N,\alpha)} \le \sum_{k=0}^{N-1}(N-k)[(k+1)^r - k^r]X_k \qquad \text{.....................(4.13)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k X_k$$

، حيث $a_k = (N-k)[(k+1)^r - k^r]$ ، $k = 0,1,2,...,N-1$ ، أعداد موجبة

و $\mathrm{X_k}$ ، $k = 0,1,2,...,N-1$،متغيرات عشوائية مستقلة وغير سالبة كل منها لها نفس التوزيع ونفرض أن $\mathrm{E}X_k = 1$ وباستخدام القانون المأخوذ من [1]:

$$b = \mathrm{E}(X_k^2) = D^2X_k + 1 = \sigma^2 + 1$$

لذلك

$$\mathrm{E}((\sum_{k=0}^{N-1} a_k X_v)^2) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \mathrm{E}X_k^2 + \sum_{k,j=0,k\ne j}^{N-1} a_k a_j \mathrm{E}X_k \mathrm{E}X_j$$

$$= J_1 + J_2$$

بواسطة المعادلة (4.8) نحصل على :

$$J_2 = \sum_{k,j=0,k\ne j}^{N-1} a_k a_j \mathrm{E}X_k \mathrm{E}X_j \le \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{j=0}^{N-1} a_j$$

$$\le [0(N^{r+1})]^2 = O(N^{2r+2})$$

وكذلك

$$J_1 = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \mathrm{E} X_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^2 [(k+1)^r - k^r]^2 . b$$

$$\le O(N^{2r+1})$$

ومن المعادلة (4.13) نحصل على:

$$\mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(1)})^2] \le O(N^{2r+2}) \quad ....(4.14)$$

وبنفس الطريقة نحصل على:

$$\mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(2)})^2] \le O(N^{2r+2}) \quad ....(4.15)$$

و

$$\mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(3)})^2] \le O(N^{2r+2}) \quad ....(4.16)$$

المعادلات (4.14) و (4.15) و (4.16) تؤدي إلى:

$$\mathrm{E}[A^2(T)] = \mathrm{E}\left[\left(\zeta_{(T,\alpha)}^{(1)} + \zeta_{(T,\alpha)}^{(2)} + \zeta_{(N,\alpha)}^{(3)}\right)^2\right]$$

$$\le 3\{\mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(1)})^2] + \mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(2)})^2] + \mathrm{E}[(\zeta_{(N,\alpha)}^{(3)})^2]\}$$

$$\le O(N^{2r+2})$$

، وكذلك

$$D^2[A(T)] = \mathrm{E}[A^2(T)] - \mathrm{E}^2[A(T)]$$

$$\le \mathrm{E}[A^2(T)] \le O(N^{2r+2}) \quad ....(4.17)$$

لذلك

$$D^2\xi(T,\alpha) = D^2[\overline{\xi}(N,\alpha)] + D^2[A(T)] + 2D[\overline{\xi}(N,\alpha), A(T)]$$

، و

$$-DXDY \le \mathrm{cov}(X,Y) \le DXDY$$

ومن المعادلتين (4.12) و (4.17) نحصل على:

$$\frac{D^2\xi(T,\alpha)}{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)} \le \frac{D^2[\overline{\xi}(N,\alpha)] + D^2[A(T)]}{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)} + \frac{2D[\overline{\xi}(N,\alpha)]D[A(T)]}{D^2\overline{\xi}(N,\alpha)}$$

$$=1+\frac{O(N^{2r+2})}{O(N^{2r+3})}+\frac{O(N^{r+3/2})O(N^{r+1})}{O(N^{2r+3})}$$

$$\leq 1+\frac{1}{O(N)}+\frac{1}{O(N^{1/2})}\to 1 \quad \text{..........................(4.18)}$$

عندما $T\to\infty$ و N=[T]

$$\frac{D^2\xi(T,\alpha)}{D^2\bar{\xi}(N,\alpha)}\geq\frac{D^2[\bar{\xi}(N,\alpha)]+D^2[A(T)]}{D^2\bar{\xi}(N,\alpha)}-\frac{2D[\bar{\xi}(N,\alpha)]D[A(T)]}{D^2\bar{\xi}(N,\alpha)}$$

$$\geq 1+\frac{O(N^{2r+2})}{O(N^{2r+3})}-\frac{O(N^{r+3/2})O(N^{r+1})}{O(N^{2r+3})}$$

$$\leq 1+\frac{1}{O(N)}-\frac{1}{O(N^{1/2})}\to 1 \quad \text{...........................(4.19)}$$

عندما $T\to\infty$ و N=[T]

من معادلتين (4.18) و (4.19) نحصل على :

$$\frac{D^2\xi(T,\alpha)}{D^2\bar{\xi}(N,\alpha)}\to 1$$

عندما $T\to\infty$ و N=[T]

ومن هذا برهنا معادلة (4.6) واكتمل البرهان .

المصادر

[1] Ash. A ," probability space and reel analysis", Academic press. Inc., New York, 1972.

[2] Dudley R.M, " probabilities and Metrics Convergence of Law on metric space with a view to statistical testing"

Lecture Notes series, Vol. II, Wiley , New York , 1966.

[3] Hensz-chadzynska, R. Jajte, and A.paszkiewicz .E, " Random Stain", probab. Math. Statist. 18(1) (1998), PP.199-218.

[4] Hensz-Chadzynska, R.Jajte, and A. paszkiewicz. E ," Random Stain, " Preprint 1996/7, Wydzial Matematyji, Uniwersytetlodzki, Lodz 1996.