وجود ووحدانية الحل لمعادلة تكاملية خاصة من نوع فولتيرا

أكرم حسان محمود و رائد صبيح قرياقوس
قسم الحاسبات/ كلية التربية/ جامعة الموصل ماجستير رياضيات

تاريخ الاستلام 2005/12/4 تاريخ القبول 2006/3/7

Abstract

In this paper, we investigate the existence and uniquence solution for homogeneous Volterra integral equation of the second kind by using the method which is given by Atkinson, A.F. These investigation lead us to the extending of some results of Manafov, M.D.

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية المتجاسة من النوع الثاني وذلك باستخدام الطريقة المعطاة من قبل (Atkinson, A.F.)، كذلك من خلال هذه الدراسة تم توسيع بعض نتائج (Monafov, M.D.).

أولاً: المقدمة

إن بناء النظرية العامة للمعادلات التكاملية الخطية بدأ في نهاية القرن التاسع عشر إذ كانت تلعب دوراً أساساً ومهماً في مجالات عدّة في علوم الرياضيات والفيزياء التي لها ارتباط وثيق مع المعادلات التفاضلية، وإن المؤسسين الرئيسيين لهذه النظرية هم كل من العالم فولتيرا وفريدهولم، بعد ذلك استمرت الدراسات والبحوث على يد العديد من الباحثين لعل أشهرهم [1 ، 4] التي أعطت نتائج مثمرة وجيدة استفاد منها الباحثين في دراساتهم لجميع الظواهر والنماذج الرياضية ومن أبرزهم [8]. أما عملنا فهو دراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية المتجانسة من النوع الثاني ومن الشكل أدناه:

$$y(x,\rho)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}e^{iw_j\rho(x-a)}-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{iw_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{iw_j\rho(x-t)}Y(t)\,dF(t) \qquad \dots(V)$$

الناتجة من المعادلة التفاضلية من الرتبة (2n)

$$(-1)^n Y^{(2n)}-\rho^{2n}Y=-q(x)Y$$

مع الشروط الابتدائية

$$Y^{(k)}(a,\rho)=c_k \quad ; \quad k=\overline{0,2n-1}$$

إذ $q(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a\ ,\ b]$ و ρ^{2n} وسيط معقد، كذلك $F(x)=-\int_a^x q(t)\,dt$.

تعريف 1 [3] :

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المعرفة على الفترة المحددة I ، يقال أن $\{f_n\}$ متساوية الاستمرارية بانتظام على $[a\ ,\ b]$، إذا كان لأي عدد موجب $\in$ يمكن إيجاد عدد موجب $\delta_\in$ (يعتمد على $\in$ فقط) بحيث أن $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\in$ ، $n\geq 1$ عندما $|x_1-x_2|<\delta_\in$ لكل $x_1\ ,\ x_2$ في $[a\ ,\ b]$.

مأخوذة 1 [5] :

إذا كانت g دالة قفز فان التكامل $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ يؤدي إلى المجموع $\sum_i f(x_i)\,h_i$ إذ x_i نقاط انقطاع الدالة g أما h_i فهي قفزات g في النقاط x_i .

مأخوذة 2 [5] :

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة معرفة على الفترة $[a\ ,\ b]$ ولتكن $\{g_n\}$ متتابعة من الدوال والتي تقترب من دالة مقيدة g في الفترة $[a\ ,\ b]$ إذا كانت $V_a^b(g_n)\leq k$ لكل n ، عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

مأخوذة 3 [7] :

لتكن w_j ، $(j=\overline{0,2n-1})$ هي الجذور المختلفة للجذر $(2n)$ للواحد أي أن $w_j=\sqrt[2n]{1}$ ، ولتكن $\rho \neq 0$ إذ $\lambda=\rho^{2n}$ ، $x>t$ ، $R=0,1,2,\ldots$ ، فان المتتابعة الآتية تتحقق:

$$\left|\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(i\,w_j)^{R+1}}{2n\,\rho^{2n-R-1}}\,e^{[i\,w_j\,\rho-\mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](x-t)}\right|\leq\frac{(x-t)^{2n-R-1}}{(2n-R-1)!}$$

ثانياً: وجود الحل للمعادلة التكاملية (V)

في هذا البند ندرس وجود الحل للمعادلة (V) وذلك باستخدام الطريقة المعطاة في المرجع [2] وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة 1 :

لتكن $F(x)$ دالة مستمرة من اليمين وذات تغيير محدود على الفترة $a\leq x\leq b$ عندئذ يوجد حل مستمر للمعادلة التكاملية المتجانسة.

$$\begin{aligned}y(x,\rho)=&\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\,e^{iw_j\rho(x-a)}\\&-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{iw_j}{2n\,\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{iw_j\rho(x-t)}\,Y(t)\,dF(t)\end{aligned}\qquad(1)$$

في الفترة $[a,b]$.

البرهان:

في البداية نجزء المستوي المعقد ρ إلى $2n$ من القطاعات المتساوية S_m ، $(m=1,2,\ldots,2n)$ بحيث أن :

$$\frac{m-1}{n}\pi\leq\arg\rho<\frac{\pi m}{n}$$

وأن

$$\mathrm{Re}(i\,w_0\,\rho)\leq\cdots\leq\mathrm{Re}(i\,w_{n-1}\,\rho)\leq 0\leq\mathrm{Re}(i\,w_n\,\rho)\leq\cdots\leq\mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)$$

ليكن

$$y(x,\rho) = A(x)\exp(\mathrm{Re}(i\, w_{2n-1}\, \rho(x-a))) \tag{2}$$

يمكن إعادة صيغة المعادلة (1) كي تكون بالشكل الآتي:

$$A(x) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](x-a)$$

$$-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}}\int_a^x \exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](x-t)\,A(t)\,dF(t) \quad \dots (3)$$

لكي نبرهن وجود الحل للمعادلة التكاملية (1) ، ندعي أولاً أنه $F(x)$ هي دالة قفز لها عدد محدود n من القفزات عند النقاط a_r إذ $r=\overline{1,n}$ وان :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

عندئذ يمكن حل $A(x)$ بطريقة التكرار، الآن نعيد كتابة المعادلة (3) بعد تغيير تكامل ستيلتجس إلى مجموع يكون لدينا:

$$A(x) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](x-a)$$

$$-\sum_{a_r<x}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}}\Big[\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](x-a_r)\,[F(a_r)-F(a_r-0)]\,A(a_r)\Big] \quad \dots (4)$$

وبصورة خاصة نجد أن:

$$A(a_{s+1}) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](a_{s+1}-a)$$

$$-\sum_{r\le s}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}}\Big[\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](a_{s+1}-a_r)$$

$$[F(a_r)-F(a_r-0)]\,A(a_r)\Big] \qquad \dots (5)$$

$$A(a) = A(a_0) = c_0 \qquad (6)$$

وهكذا ..

$$A(a_1) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\,\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\exp[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}(i\,w_{2n-1}\,\rho)](a_1-a) \qquad \dots (7)$$

من المعادلات (5) ، (6) ، (7) يمكن إيجاد $A(a_r)$ لأي r ومن ثم $A(x)$ لجميع قيم x إذ $a_r < x$.

الآن نستخدم المأخوذة (3) على المعادلة (5) نستنتج أن:

$$|A(a_{s+1})| \le \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{|c_k|}{k!}(b-a)^k + \sum_{r=1}^{s}\frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!}|A(a_r)|\,|F(a_r)-F(a_r-0)| \qquad \dots (8)$$

نفرض أن

$$h = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{|c_k|}{k!}(b-a)^k$$

وبوضع

$$w(x) = \sum_{a_r\le x}|F(a_r)-F(a_r-0)| \qquad (9)$$

نثبت أن المتباينة الآتية صحيحة

$$|A(a_s)| \le h\exp\left(\frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!}w(a_{s-1})\right) \qquad (10)$$

لكل $s = 2, 3, \ldots$

بما أن

$$A(a_1) \le h$$

وبموجب المعادلة (8) عندما $s = 1$ يكون لدينا:

$$|A(a_2)| \le h + \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} A(a_1) |F(a_1) - F(a_1 - 0)|$$

$$\le h + h \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} |F(a_1) - F(a_1 - 0)|$$

$$= h \left[1 + \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} w(a_1) \right]$$

$$= h \left[1 + \alpha \int_0^{w(a_1)} du \right]$$

إذ أنّ

$$\alpha = \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\le h \left[1 + \int_0^{w(a_1)} \exp(\alpha u)\, d(\alpha u) \right]$$

$$= h \exp(\alpha w(a_1))$$

إذن المتباينة (10) تحققت عندما $s=2$.

لإكمال برهان (10) نستخدم الاستقراء الرياضي، نفرض أن (10) صحيحة لأي $A(a_r)$ ، أي أن:

$$|A(a_r)| \le h \exp(\alpha w(a_{r-1}))$$

وبتعويض قيمة $A(a_r)$ في الطرف الأيمن لـ (8) نستنتج أن:

$$|A(a_{s+1})| \le h\left[1+\alpha\sum_{r=1}^{s}\exp(\alpha\, w(a_{r-1}))\right]|F(a_r)-F(a_r-0)|$$

في حالة كون $a_0 = a$ و $w(a) = 0$ لهذا السبب:

$$|A(a_{s+1})| \le h\left[1+\alpha\sum_{r=1}^{s}\exp(\alpha\, w(a_{r-1}))\left[w(a_r)-w(a_{r-1})\right]\right]$$

$$\le h\left[1+\sum_{r=1}^{s}\int_{w(a_{r-1})}^{w(a_r)}\exp(\alpha\, u)\, d(\alpha\, u)\right]$$

$$= h\exp(\alpha\, w(a_s))$$

وهذا ما يثبت صحة (10) . باستخدام (10) في (4) نجد أن:

$$|A(a_s)| \le h\exp(\alpha\, w(b))\ ,$$

$$|A(x)| \le h + h\exp(\alpha\, w(b))\sum_{a_r<x}\alpha\,|F(a_r)-F(a_r-0)|\ ,$$

$$|A(x)| \le h\left[\exp(\alpha\, w(b)) + \alpha\, w(b)\exp(\alpha\, w(b))\right]$$

$$\le h\exp(\alpha\, w(b))\left[1+\int_0^{\alpha\, w(b)}\exp(u)\, du\right]$$

$$= h\exp(2\,\alpha\, w(b)) \qquad (11)$$

في حالة وجود الأعداد c_k و a و b مع $(b - a)$ المنتهية فإن الحل $A(x)$ هو مقيد بانتظام في حدود $w(b)$. وبموجب المعادلة (2) نجد أن:

$$|\, y(x,\rho)\,| \le h\exp\left[\mathrm{Re}\,(i\, w_{2n-1}\,\rho(x-a)) + 2\,\alpha\, w(b)\right]$$

$$\le h\exp\left[\mathrm{Re}\,(i\, w_{2n-1}\,\rho(b-a)) + 2\,\alpha\, w(b)\right]$$

لأجل إكمال البرهان نقرب $F(x)$ بواسطة متتابعة من دوال القفز $F_n(x)$ ، $n = 1, 2, \ldots$ ، إذ $F(x)$ دالة ذات تغيير محدود ومستمرة من اليمين والحلول التي تناظر $F_n(x)$ هي $y_n(x)$ والتي هي بالصيغة الآتية:

$$y_n(x,\rho)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}e^{i w_j \rho(x-a)}$$

(12)

$$-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{i w_j \rho(x-t)}y_n(t)\,dF_n(t)$$

لكي نثبت أن المتتابعة $y_n(x,\rho)$ متقاربة نثبت أن المتتابعة $y_n(x,\rho)$ مقيدة ومتساوية الاستمرارية. نختار دوال القفز $F_n(x)$ بحيث أنها تمتلك على الأغلب n من القفزات وتتطابق مع $F(x)$ عند النقاط التي نحصل عليها بتقسيم $[a , b]$ على n من الأجزاء المتساوية وتساوي ثابت بين هذه النقاط وهكذا نجد أن:

$$F_n(x)=F(a+\frac{j(b-a)}{n}) \quad , \quad a+\frac{j(b-a)}{n}\le x<a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}$$

$j=0,1,2,3,\dots,n-1$ لكل $n\neq 0$

بموجب (2) تصبح (12) بالشكل الآتي:

$$A_n(x)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\exp\left[i w_j\rho-\mathrm{Re}(i w_{2n-1}\rho)\right](x-a)$$

$$-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x\exp\left[i w_j\rho-\mathrm{Re}(i w_{2n-1}\rho)\right](x-t)\,A_n(t)\,dF_n(t)$$

...(13)

عندئذ نجد أن:

$$|A_n(x)|\le h+h\exp(\alpha\, w_n(b))\,\alpha\, w_n(b)$$

بفرض أن

$$w_n(b)=\int_a^b|dF_n(x)|\le\int_a^b|dF(x)|=w(b)$$

عندئذ وبواسطة (12) وبموجب (11) نجد أن:

$$|A_n(x)|\le h+h\exp(\alpha\, w(b))\,\alpha\, w(b)$$

بمعنى آخر

$$|y_n(x,\rho)| \le [h + h\exp(\alpha\, w(b))\,\alpha\, w(b)]\ \exp(\mathrm{Re}(i\, w_{2n-1}\,\rho(b-a)))$$

أي أن متتابعة الدوال $y_n(x,\rho)$ ، $n = 1, 2, \dots$ مقيدة بانتظام.

الآن سوف نثبت أن المتتابعة $y_n(x,\rho)$ متساوية الاستمرارية بانتظام ، من المعادلة (12) نحصل على:

$$|y_n(x_2,\rho) - y_n(x_1,\rho)| \le |x_2 - x_1|\, e^{\mathrm{Re}(i\, w_{2n-1}\,\rho(b-a))} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{|\rho|^{k-1}} |c_k| \sum_{j=0}^{2n-1} |w_j^{1-k}| \right.$$

$$\left. + 2 \max_t |y_n(t)|\, (b-a)^{2n-2} \int_a^b |dF_n(t)| \right\}$$

حسب التعريف (1) نحصل على أن المتتابعة $y_n(x,\rho)$ متساوية الاستمرارية بانتظام وبذلك نحصل على تقارب المتتابعة $y_n(x,\rho)$ أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x,\rho) = y(x,\rho)$$

وأخيراً علينا أن نبين أن الدالة $y(x,\rho)$ تحقق (V) ومن أجل هذا نأخذ الغاية عندما $n \to \infty$ في (12).

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x,\rho) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(i\rho)^k} c_k \sum_{j=0}^{2n-1} w_j^{-k}\, e^{i\, w_j\, \rho(x-a)} -$$

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\, w_j}{2n\, \rho^{2n-1}} \lim_{n\to\infty} \int_a^x e^{i\, w_j\, \rho(x-t)}\, y_n(t)\, dF_n(t)$$

بما أن الطرف الأيسر لـ (1) و (12) يصبحان متطابقين عندما $n \to \infty$ يجب أن نثبت أن:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\, w_j}{2n\, \rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\, w_j\, \rho(x-t)}\, y_n(t)\, dF_n(t) \to$$

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\, w_j}{2n\, \rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\, w_j\, \rho(x-t)}\, y(t)\, dF(t)$$

وحسب المأخوذة (2) نجد أن:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\,w_j\,\rho(x-t)}\, y(t)\, dF_n(t) \to \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\,w_j\,\rho(x-t)}\, y(t)\, dF(t)$$

وعليه فإن

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\,w_j\,\rho(x-t)} \left[y(t) - y_n(t)\right] dF_n(t) \to 0$$

لأن

$$y(t) - y_n(t) \to 0\,,$$

عندما $n \to \infty$.

ثالثاً: وحدانية الحل للمعادلة التكاملية (V)

في هذا البند ندرس وحدانية الحل للمعادلة التكاملية (V) وذلك في المبرهنة الآتية.

<u>مبرهنة 2 :</u>

إذا كانت شروط وفرضيات المبرهنة (1) متحققة فان للمعادلة التكاملية (V) لها حـــل وحيد في الفترة $[a\,,\,b]$.

<u>البرهان:</u>

نفترض وجود حلين مستمرين للمعادلة (V) هما $y_1(x,\rho)$ و $y_2(x,\rho)$ ، أي أن:

$$y_1(x,\rho) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(i\rho)^k}\, c_k \sum_{j=0}^{2n-1} w_j^{-k}\, e^{i\,w_j\,\rho(x-a)} - \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}} \int_a^x e^{i\,w_j\,\rho(x-t)}\, y_1(t)\, dF(t)$$

$$y_2(x,\rho)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(i\rho)^k}\,c_k\sum_{j=0}^{2n-1}w_j^{-k}\,e^{i w_j \rho(x-a)}$$
$$-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{i w_j \rho(x-t)}\,y_2(t)\,dF(t)$$

ولتكن الدالة $z(x,\rho)$ الفرق بينهما أي أن

$$z(x,\rho)=y_2(x,\rho)-y_1(x,\rho)$$

وتحقق

$$z(x,\rho)=-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{i w_j \rho(x-t)}\,z(t)\,dF(t) \qquad (14)$$

إذا كانت

$$z(x,\rho)=B(x)\exp\big(\mathrm{Re}\big(i\,w_{2n-1}\,\rho(x-a)\big)\big)$$

فإن

$$B(x)=z(x,\rho)\exp\big(-\mathrm{Re}\big(i\,w_{2n-1}\,\rho(x-a)\big)\big) \qquad (15)$$

$$B(x)=-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x e^{i w_j \rho(x-t)}\,B(t)\exp\big(\mathrm{Re}\big(i\,w_{2n-1}\,\rho(t-a)\big)\big).$$

$$\exp\big(-\mathrm{Re}\big(i\,w_{2n-1}\,\rho(x-a)\big)\big)\,dF(t)$$

$$B(x)=-\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{i w_j}{2n\rho^{2n-1}}\int_a^x \exp\big[i\,w_j\,\rho-\mathrm{Re}\big(i\,w_{2n-1}\,\rho\big)\big](x-t)\,B(t)\,dF(t)$$

$$\ldots (16)$$

بما أن $F(x)$ هي دالة ذات تغيير محدود فانه يمكن اختيار $x_1>a$ بحيث أنه

$$\frac{(x_1-a)^{2n-1}}{(2n-1)!}\int_a^{x_1}|dF(t)|\le\frac{1}{2} \qquad (17)$$

إذ

$$\int_a^x |dF(t)|=\underset{a\le t\le x}{\mathrm{Var}}\;F(t)$$

التغيير الكلي لـِ $F(t)$ يقترب إلى الصفر عندما $x \to a+0$ عليه نفرض أن القيمة العظمى لـِ $|B(x)|$ في الفترة $[a\,,\,x_1]$ تصل عند النقطة x_2 أي أن:

$$|B(x_2)| = \max_{a \le x \le x_1} |B(x)|$$

عندئذ من (16) بوضع x_2 بدلاً من x وبأخذ القيمة المطلقة نحصل على

$$|B(x_2)| \le |B(x_2)| \frac{(x_2 - a)^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_a^{x_2} |dF(t)|$$

$$\le |B(x_2)| \frac{(x_1 - a)^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_a^{x_1} |dF(t)|$$

$$\le \frac{1}{2} |B(x_2)|$$

و هذا تناقض.

إذن $B(x_2)=0$ و هذه تـؤدي إلـى أن $B(x)=0$ فــي $[a\,,\,x_1]$ أي أن $z(x,\rho)=0$ فــي $[a\,,\,x_1]$.

الآن لتكن b' هي القيد الأعلى لـِ $(a\,,\,b)$ بحيث أنه $B(x)=0$ في $(a\,,b')$ ، اذن يمكن كتابة المعادلة (16) بالشكل الآتي:

$$B(x) = -\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{i\,w_j}{2n\,\rho^{2n-1}} \int_{b'}^{x} \exp\left[i\,w_j\,\rho - \mathrm{Re}\left(i\,w_{2n-1}\,\rho\right)\right](x-t)\,B(t)\,dF(t)$$

لـِ $b' \le x \le b$ إذا كان $b' < b$.

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن $B(x)=0$ في يمين جوار b' و هذا يعطي التناقض.

إذن $B(x)=0$ في $[a\,,\,b]$ أي أن الحل وحيد.

المصـــــادر

1. سعدون، لمياء حازم، حول معادلة تكاملية معينة ذات تكامل ريمان ســتيليجس، رســالة ماجستير مقدمة إلى مجلس كلية التربية، جامعة الموصل، (2000).
2. Atkinson, A. F., Discrate and continuous boundary problems, ACADEMIC PRESS, London, (1964).
3. Burrill, C. W. and Knudson, J. R., Real variables, Hdt, Rinchart and Winston, Inc., New York, (1969).
4. Balachandran, K. and Ilamaran, S. An existence theorem for Volterra integral equation with deviating arguments, J.Appl.Math.Stoch.Anal.3 (1990), 155-162.
5. Kolmogorov, A. N. and Fomien, G. B., Introduction in the theory of functional and mathematical analysis, USSR, Moscow, (1989).
6. Manafov, M. D., Spectral analysis of differential operaters with coefficients type generalized functions, Dissertation. Inst. Math. and mech. AZ. SSSR, (1987).
7. Nasibov, V. G., Investigation of spectral properties for generalized integral equation of Sturm-Lioville, Dissertation. Inst. Math. and mech. AZ. SSSR, (1980).
8. Yury, V.S. and Yury, G.S. Integral equations, Division for engineering science physics and mathematics, Karlstad University, A compendium, (2002).