مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول باستخدام المحاكاة

المدرس المساعد دريد حسين بدر

قسم الإحصاء

كلية الإدارة الاقتصاد/جامعة البصرة

المستخلص

تم تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) في حالة توافر معلومات أولية وعدم توافرها عن المعلمات وتم توظيف أسلوب المحاكاة (Simulation) بطريقة مونت كارلو (Mont-Carlo) للمقارنة بين طرائق التقديرالأتية ،طريقة الإمكان الأعظم،طريقة العزوم،طريقة المربعات الصغرى،طريقة التقلص. بغية الوصول الى افضل طريقة لتقدير تلك الدالة. وقد توصل الباحث الى أفضلية طريقة التقلص في تقدير دالة المعولية مقارنة مع باقي طرائق التقدير وذلك بالاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي(Integral Mean Squared Error (IMSE)).

١. المقدمة : (Introduction)

أن دراسة المعولية لماكنة معينة هي من الأهمية القصوى في محيط التقنية الحديثة لأنه يُعد المؤشر لبيان مدى كفاءة الماكنة وقدرتها على العمل من دون عطلات لمدد زمنية طويلة وكذلك يعطي القدرة على تقييم المكائن والمعدات للتخطيط والتطوير مستقبلاً، وقد زاد الاهتمام بالمعولية بعد الانتشار الواسع للصناعة وازدياد التعقيدات الميكانيكية والكهربائية والإلكترونية في المعدات في القرن الماضي. وكانت البحوث قبل عام ١٩٤٠ تقتصر على السيطرة النوعية وصيانة المكائن ولم

تاريخ استلام البحث ٢٠١١/١١/١٣
تاريخ قبول النشر ٢٠١٢/٢/٢٢

تشخص المعولية حينها على أنها حقل معين، وبحلول الحرب العالمية الثانية وازدياد المعدات الحربية المعقدة أصبح لحقل المعولية كيان خاص ومنه بدأت المعولية الحديثة.

من هنا ظهرت الحاجة إلى اعتماد نظرية المعولية في دراسة الظواهر وتحليلها على وفق طبيعة البيانات الإحصائية وبالتالي القيام بعملية التقدير اعتمادا على الطرائق الإحصائية منها طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وطريقة التقلص وغيرها.

هدف البحث :

الهدف من هذا البحث هو تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) في حالة توافر معلومات أولية عن المعلمات وفي حالة عدم توافرها للمقارنة بين طرائق التقدير الأتية ،طريقة الإمكان الأعظم،طريقة العزوم،طريقة المربعات الصغرى،طريقة التقلص. بغية الوصول الى افضل طريقة لتقدير تلك الدالة والمقارنة بين هذه الطرائق للوصول الى الطريقة الافضل ، وذلك من خلال الاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) (Integral Mean Squared Error) وباستخدام اسلوب المحاكاة .

٢. الجانب النظري :

٢-١ توزيع باريتو :Pareto Distribution

ينسب هذا التوزيع الى العالم الاقتصادي الإيطالي الجنسية السويسري المولد (Vilfredo Pareto) الذي عاش في الفترة ما بين (١٩٢٣- ١٨٤٨)، اذ وضع أسس هذا التوزيع في موضوع الاقتصاد من خلال دراسة توزيع الدخول (Incomes) عندما تكون الدخول متجاوزة لحد معلوم مثل (K) وإذ يمكن اشتقاق هذا التوزيع حسب مفهوم معدل الفشل (Failure Rate) الذي يسمى أيضاً (Hazard Rate) معدل المخاطرة الآتي:

(Sarhan, El-Gohary, 2003) [١٠]

$$h(t) = \frac{\alpha}{t} \quad ,t > k,\ \alpha > 0 \qquad (2\text{-}1)$$

إذ ان

α: هي معلمة الشكل لتوزيع باريتو من النوع الأول.

t : هي قيمة لمتغير الزمن العشوائي.

وبتطبيق العلاقة الآتية بين دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لدالة المخاطرة (أحتمال فشل المفردة خلال المدة (t, t+Δt)):(الهلالي، فراس صدام، ٢٠٠٤) [٣]

$$f(x) = h(x)Exp\left[-\int_k^x h(u)du\right] \qquad (2\text{-}2)$$

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو بالمعلمتين (α, k) الآتية:

$$f(x;\alpha,k) = \begin{cases} \dfrac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & ,x \ge k \quad ,k > 0,\ \alpha > 0 \\ 0 & \quad otherwise \end{cases} \qquad (2\text{-}3)$$

إذ ان:

α: تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter).

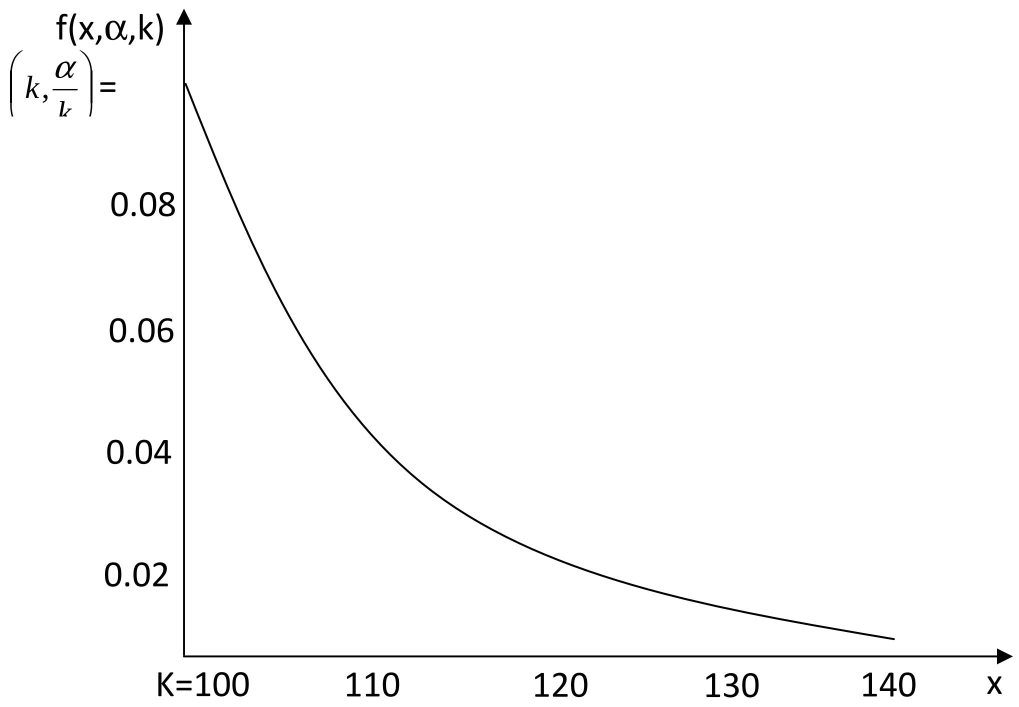
k: تمثل معلمة القياس (Scale Parameter).

يتضح من الدالة أعلاه، ان اعظم قيمة لها تتحقق عندما يكون x = k.

أي ان:

$$f(k)=\frac{\alpha}{k} \tag{2-4}$$

والمخطط التوضيحي الآتي يبين بالرسم دالة الكثافة الاحتمالية لدالة توزيع باريتو من النوع الأول (الذي نشأ من خليط من التوزيعات الأسية)على فرض ان α=100, k=1000.



الشكل (٢-١)يبين دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو من النوع الأول

وكما يمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية (c.d.f) كما يأتي:

$$F(x;\alpha,k) = P(X \le x)$$

$$= \int_{k}^{x} f(u)du \qquad (2\text{-}5)$$

$$F(x;\alpha,k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} \qquad (2\text{-}6)$$

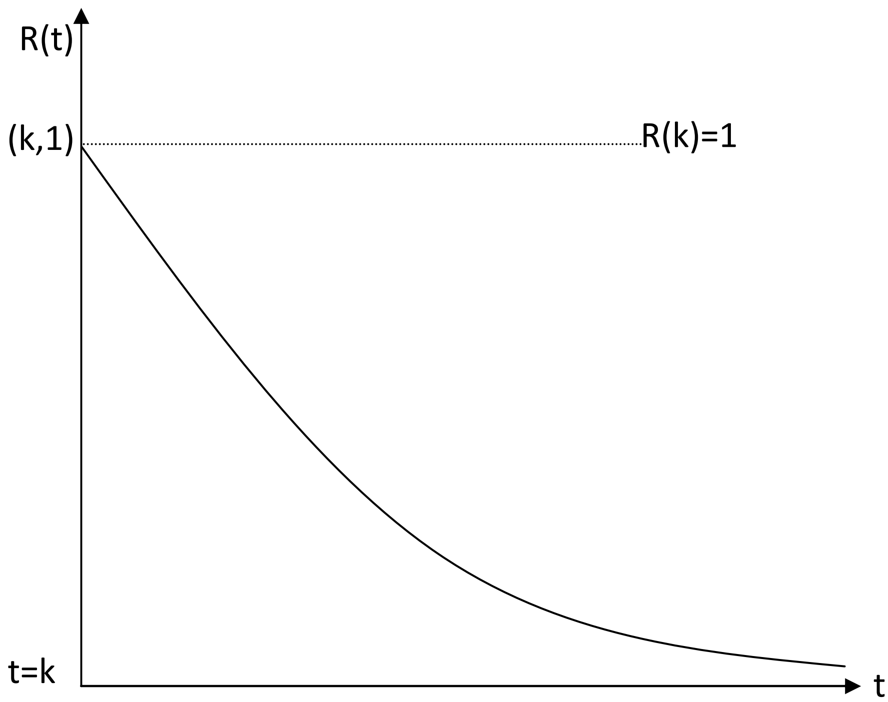
وبذلك يمكن إيجاد دالة المعولية (Reliability Function) لهذا التوزيع كما يأتي:

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} f(x;\alpha,k)dx$$

$$R(t) = \alpha k^{\alpha} \int_{t}^{\infty} x^{-\alpha-1}dx$$

$$R(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha} \qquad (2\text{-}7)$$

والشكل التوضيحي الآتي يبين دالة المعولية لهذا التوزيع.



شكل (٢-٢)يبين دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول

٢-٢ الطرائق التقليدية في التقدير : Classical Methods In Estimation

تعتمد هذه الطرائق على افتراض مفاده ان المعلمة المطلوب تقديرها ثابتة،ومن الطرائق التي سيتم تناولها في هذا البحث ما يلي:

٢-٢-١ طريقة الإمكان الأعظم : Maximum Likelihood Method (ML)

تعد هذه الطريقة ذات خصائص جيدة منها خاصية الثبات(اي $h(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{k}_{ML})$ هي مقدّر الإمكان الأعظم للدالة $h(\alpha, k)$)، ويمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على أنه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان للمشاهدات في نهايتها العظمى.

إذا كانت $(X_1,X_2,....,X_n)$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو من النوع الأول ذي المعلمتين (α, k)، فان دالة الإمكان للمشاهدات (L) هي حسب الصيغ الآتية : (Hodge, B.C, 1997) [٦]

$$L(x_1,...,x_n;\alpha,k)=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}\frac{\alpha k^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}$$

$$=\frac{\alpha^n k^{n\alpha}}{\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}\ x_i^{\alpha+1}}$$

$$\ln L(x_1,...,x_n;\alpha,k)=\ln\alpha^n k^{n\alpha}Exp^{\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}Inx_i\right]}$$

$$\ln L(x_1,...,x_n;\alpha,k)=n\ln\alpha+n\alpha\ln k+\ln Exp^{\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}Inx_i\right]} \qquad (2\text{-}8)$$

إذ أن:

$0 < k < x_{(1)},\ \alpha > 0$

$x_{(1)}$: تمثل اصغر قيمة في العينة المشاهدة وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة (8-٢) النسبة لكل من المعلمتين (α, k) نحصل على معادلتي الإمكان التاليتين:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n\ln k-\sum_{1}^{n}\ln x_i \qquad (2\text{-}9)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial k}=\frac{n\alpha}{k} \qquad (2\text{-}10)$$

وبمساواة المعادلة (9-٢) للصفر نجد أن:

$$\frac{n}{\hat{\alpha}}+n\ln k-\sum_{1}^{n}Inx_i=0$$

$$\frac{n}{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} Inx_i - n\ln k$$

$$\frac{n}{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \ln k)$$

$$\frac{n}{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{k}\right)$$

وبذلك تكون صيغة تقدير معلمة الشكل هي:

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{k}\right)} \qquad (2\text{-}11)$$

وهو تقدير غير متحيز،ويكون التقدير متحيزاذا كانت قيمة x_i تساوي صفراً .إذ إن المعادلة (٢-١٠) لا يمكن حلها بالطريقة الاعتيادية، وذلك لأن الدالة (lnL) غير محددة (Unbounded) بالنسبة لـk، فهي رتيبة متزايدة (Monotonically Increasing).

إذ ان:

(k):هي الحد الأدنى للمتغير العشوائيX فان(lnL) يمكن تعظيمها تحت شرط القيد الآتي [٧]:

$$\hat{k} \le \min_i X_i \qquad (2\text{-}12)$$

وأذا كانت إصغر قيمة من القيم المشاهدة بعد الترتيب تساوي صفراً فان تقدير $\hat{k}$ يكون متحيزاً، ومن ملاحظة المتباينة (٢-١٢) نحصل على قيمة $\hat{k}$ التي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، وهي:

$$\hat{k}_{ML} = \min_i X_i = X_{(1)} \qquad (2\text{-}13)$$

وبما أن مقدّرات الإمكان الأعظم تتصف بخاصية الثبات أي أنه إذا كانت $\hat{k}_{ML}, \quad \hat{\alpha}_{ML}$ هي مقدّرات الإمكان الأعظم للمعلمات α ,k وان h(α, k) هي إحدى الدوال في فضاء المعلمة (Parameter Space)، فان $h(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{k}_{ML})$ هي مقدّر الإمكان الأعظم للدالة h(α, k) وباستخدام هذه الخاصية نحصل على مقدّر لدالة المعولية وكما يأتي:

$$\hat{R}_{ML}(t) = \left(\frac{\hat{k}_{ML}}{t} \right)^{\hat{\alpha}_{ML}} \qquad (2\text{-}14)$$

ويمكن البرهنة بسهولة إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع باريتو من النوع الأول فان المتغير العشوائي $Ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)$ لكل i=1,2,...,n يتوزع أسياً بوسط قدره $\frac{1}{\alpha}$، وعلى ذلك فان المتغير العشوائي الآتي : (Rytgaard, (1990), Vol.20, No.2, PP. 201-216)[9]

$$T = \sum_{i=1}^{n} In\left(\frac{x_i}{x_{(1)}} \right) \qquad (2\text{-}15)$$

له توزيع (gamma) بالمعلمتين (n, α)، وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لـT هي:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!} t^{n-1} Exp(-\alpha t) & ,t > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وإذ أن $\hat{\alpha}_{ML} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} In \dfrac{x_i}{x_{(1)}}}$، فان توقع الإحصاءه $\hat{\alpha}_{ML}$ هو:

$$E(\hat{\alpha}_{ML}) = \frac{n\alpha}{n-1}\int_0^\infty \frac{\alpha^{n-1}}{(n-2)!}t^{n-2}Exp(-\alpha t)dt$$
$$= \frac{n}{n-1}\alpha \qquad (2\text{-}16)$$

لنفرض أن:
$$\alpha^* = \frac{n-1}{T}$$

إذا يكون لدينا:
$$\alpha^* = \frac{n-1}{n}\hat{\alpha}_{ML}$$

ويكون توقع الإحصاءه α^* هو:

$$E(\alpha^*) = \frac{n-1}{n}E(\hat{\alpha}_{ML}) = \alpha$$

وعلى ذلك فان:

$$\alpha^* = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i / x_{(1)})} \qquad (2\text{-}17)$$

هو مقدّر غير متحيز للمعلمة α.

٢-٢-٢ طريقة العزوم : Method of Moments (MOM)

تعد طريقة العزوم من طرائق التقدير التقليدية الشائعة الاستخدام وذلك لسهولتها إذ تعتمد على مساواة عزم المجتمع المقدّر ($\hat{u}_r$) مع عزم العينة (m_r) ومن ثم إيجاد صيغة تقديرية للمعلمات : (Johnson, N.L & Katz, S, 1970) [٨]

إن عزوم العينة عبارة عن إحصاءات، فهي دوال في العينة المشاهدة ($X_1,X_2,...,X_n$)، لذلك من الممكن استخدامها لتقدير المعلمات ($\theta_1, \theta_2, ...,\theta_s$) بواسطة مجموعة المعادلات التالية:

$$m'_j = \hat{\mu}'_j(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s) \quad (2\text{-}18)$$

إذ أن: j = 1,2,....,s

يمكـــن الحصـــول علـــى تقـــدير لمعلمتـــي توزيـــع بـــاريتو مـــن النـــوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) بطريقـة العـزوم حـول نقطـة الاصـل حسب الأسلوب الذي اقترحه (Johnson) ، وكما يأتي:

يــتم أولاً مســاواة الوســط الحســابي للعينـــة (Sample Mean) بـــالتوقع النظـــري (Theoretical Expectation) للمتغير العشوائي X،

إذ أن :

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{\alpha k}{\alpha - 1} \qquad , \alpha \geq 1$$

$$\bar{x} = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{k}}{\tilde{\alpha} - 1} \quad (2\text{-}19)$$

إذ أن:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

في الخطوة الثانية يتم مساواة اصغر قيمة من مشاهدات العينـة $x_{(1)}$ بالقيمـة النظريـة لتوقع اصغر إحصاءه مرتبة من الإحصاءات المناظرة للعينة المشاهدة، ولتكن:

$X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(n)}$

ويمكن بيان أن توزيع المتغير العشوائي

$$Y = x_{(1)} = \underset{i}{Min}\, X_i \quad (2\text{-}20)$$

هو توزيع باريتو من النوع الأول بالمعلمتين (α, k) وبذلك نحصل على المعادلة الثانية لتقدير المعلمتين وهي: (الجاسم، صباح والعلوي، لقاء ،٢٠٠٣) [٢]

$$X_{(1)} = \frac{n\tilde{\alpha}\tilde{k}}{n\tilde{\alpha}-1} \qquad (2\text{-}21)$$

وبحل المعادلتين (١٩-٢) و(٢١-٢) يتم الحصول على مقدّر العزوم لكل معلمة، فيكون مقدّر العزوم بالنسبة لمعلمة الشكل α هو بالصيغة الآتية:

$$\hat{\alpha}_{mom} = \frac{n\bar{x} - x_{(1)}}{n(\bar{x} - x_{(1)})} \qquad (2\text{-}22)$$

أما مقدّر العزوم بالنسبة لمعلمة القياس k فهو:

$$\hat{k}_{mom} = \frac{(n\hat{\alpha}_{mom} - 1)X_{(1)}}{n\hat{\alpha}_{mom}} \qquad (2\text{-}23)$$

أما تقدير دالة المعولية فيأخذ الصيغة الآتية:

$$\hat{R}_{mom}(t) = \left(\frac{\hat{k}_{mom}}{t}\right)^{\hat{\alpha}_{mom}} \qquad (2\text{-}24)$$

٢-٢-٣ طريقة المربعات الصغرى Least Square Method (LS)

ان طريقة المربعات الصغرى تتضمن تصغير مجموع مربعات الخطأ الآتي:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \qquad (2\text{-}25)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالةS لكل من (a,b) ومساواة ناتج كل اشتقاق بالصفر يتم الحصول على معادلتين، وبحلهما يتم الحصول على مقدّري المربعات الصغرى $(\hat{a},\hat{b})$ للمعلمتين (a, b)

ان من خواص مقدّرات المربعات الصغرى إنها غير متحيزة. تعتمد الفكرة الأساسية لطريقة المربعات الصغرى على دالة التوزيع التجميعية للفشل (c.d.f) المبينة في الصيغة $Y = a + bX$ في بناء أنموذج انحدار خطي بسيط وكما يلي: (Hussein, William, 2000) [٧]

$$F(x;\alpha,k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

$$1 - F(x;\alpha,k) = \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} \qquad (2\text{-}26)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي للصيغة (٢-٢٦) يتم الحصول على:

$$\underbrace{\log[1-F(x;\alpha,k)]}_{Y_i} = \underbrace{\alpha \log k}_{a} \underbrace{-\alpha}_{b} \underbrace{\log x}_{X_i} \qquad (2\text{-}27)$$

من الصيغة (٢-٢٧) يمكن ان نستنتج انموذج انحدار خطي وكما يأتي:

$$Y_i = a + bX_i + r_i \qquad (2\text{-}28)$$

إذ ان:

r_i: يمثل متغير الخطأ العشوائي و $i = 1,2,\ldots,n$

$Y_i = \log[1 - F(x;\alpha,k)$, $a = \alpha \log k$

$b = -\alpha$, $X_i = \log x_i$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى تم الحصول على تقدير معلمات الأنموذج الخطي (2-28):

$$\hat{b}_{Ls} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}} \qquad (2\text{-}29)$$

$$\hat{a}_{LS} = \bar{y} - \hat{b}_{LS}\,\bar{x}$$

ويمكن الحصول على تقدير $\hat{\alpha}$ غير متحيز من خلال الصيغة الآتية:

$$\hat{\alpha}_{LS} = -\hat{b}_{LS} = \frac{-n\sum_{i=1}^{n}\log x_i \log\left[1-F(x_i;\alpha,k) + \left(\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\log[1-F(x_i;\alpha,k)]\right)\right]}{n(\sum_{i=1}^{n}\log x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n}\log x_i)^2} \qquad (2\text{-}30)$$

وكذلك تم الحصول على $\hat{k}\,Ls$ غير متحيز من خلال الصيغة الآتية :

$$\hat{k}_{Ls} = Exp\left(\frac{\hat{a}_{Ls}}{\hat{\alpha}_{Ls}}\right) \qquad (2\text{-}31)$$

وبذلك يكون مقدّر المربعات الصغرى لدالة المعولية هو الآتي:

$$\hat{R}_{Ls}(t) = \left(\frac{\hat{k}_{Ls}}{t}\right)^{\hat{\alpha}_{Ls}} \qquad (2\text{-}32)$$

ومن الجدير ذكره هنا ان هذه الطريقة تعطي نتائجاً تقريبية وأن دالة التوزيع التجميعية لا يتم حسابها باستخدام القيم الافتراضية للمعلمات ويتم تقديرها باستخدام الطرائق اللامعلمية تم استخدام الصيغة الآتية .

$$\hat{F}_{(x_{(i)})} = \frac{i}{n+1} \qquad (2\text{-}33)$$

إذ أن:

i: تمثل رتبة المشاهدات بعد ترتيبها تصاعديا.

$\hat{F}(x_{(i)})$: هو تقدير غير متحيز لدالة الكثافة الاحتمالية التجميعية $F(x_{(i)})$.

أي أن:

$$E\left[\hat{F}(x_{(i)})\right] = F(x_{(i)}) \qquad (2\text{-}34)$$

٢-٢-٤ طريقة التقلص : Shrinkage Method (Sh)

ان مقدّر التقلص (Shrinkage Estimator) يعتمد على دالة التقلص λ ومجال تعريفها، وان أي تحسن في سلوك المقدّر يعود لأحد العاملين أو كليهما.

ان دالة التقلص تعبر عن مقدار ثقة الباحث بالمعلومات الأولية، ولعدم وجود قاعدة موحدة لاختيار او حساب قيمة λ، فان لكل باحث أسلوبه في اختيارها على وفق قواعد يعتقد أنها كافية. : (البياتي، حسام نجم، ٢٠٠٢) [١]

ان مقدّر التقلص لمعلمة الشكل θ هو:

$$\hat{\theta}_{Sh} = \lambda.\hat{\theta} + (1-\lambda)\theta_0 \qquad ,0 < \lambda < 1 \qquad (2\text{-}35)$$

إذ أن:

$\hat{\theta}$: تمثل مقدّراً أولياً، يفضل ان يكون مقدّراً غير متحيز.

θ_0: تمثل المعلومات المسبقة حول المعلمة θ.

ان المقدّر في الصيغة (٢-٣٥) قد يرافقه خطأ هو ابتعاد قيمة θ_0 عن القيمة الحقيقية لـθ، لذلك يجب ان تكون θ_0 ضمن المجال للاختبار الأولى للفرضية التالية بمستوى معين باستخدام التوزيع الطبيعي .

$H_0: \theta = \theta_0$

vs $H_1: \theta \neq \theta_0$

ان القيمـة الأوليـة لــθ_0 قـد تكـون قريبـة مـن القيمـة الحقيقيـة للمعلمـة θ، ولا ضـير فـي استخدامها في التقدير.

وبما ان قيم λ تقع ضمن الفترة [١،٠] فانه بالإمكان اشتقاق قيمة λ التـي تجعل متوسط مربعات الخطأ اصغر ما يمكن وهي (البياتي، حسام نجم، ٢٠٠٢) [١]:

$$\lambda = \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{\left[MSE(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \theta)^2\right]} \qquad (2\text{-}36)$$

ويمكن تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول كما يأتي:

$$\hat{R}_{Sh}(t) = W\hat{R}(t) + (1-W)R_0(t) \qquad ,0 < W = \frac{\theta_0}{\theta} < 1 \qquad (2\text{-}37)$$

إذ أن:

$\hat{R}_{Sh}(t)$: يمثل مقدّر دالة المعولية بطريقة التقلص.

$\hat{R}(t) = \left(\frac{\hat{k}}{t}\right)^{\hat{\alpha}}$: يمثل المقدّر غير المتحيز لدالة المعولية.

$\hat{R}_0(t) = \left(\frac{k_0}{t}\right)^{\alpha_0}$: يمثل القيمة الأولية لدالة المعولية.

ويمكن تحديد قيمة w كما يأتي (البياتي، حسام نجم، ٢٠٠٢) [١] :

من المعلوم ان متوسط مربعات الخطأ لمقدّر دالة المعولية هو:

$$MSE\left(\hat{R}_{Sh}(t)\right)=E\left[\hat{R}_{Sh}(t)-R(t)\right]^2 \\ =E\left[\left(W\hat{R}(t)+(1-W)R_0(t)\right)-R(t)\right]^2 \qquad (2\text{-}38)$$

بإضافة وطرح (WR(t)) للصيغة (٢-٣٨) وتبسيطها نحصل على:

$$MSE\left(\hat{R}_{Sh}(t)\right)=W^2E\left\{\hat{R}(t)-R(t)\right\}^2+(1-W)^2\left\{R_0(t)-R(t)\right\}^2 \qquad (2\text{-}39)$$

وباشتقاق المعادلة (٢-٣٩) بالنسبة لـ(W) نحصل على:

$$\frac{\partial MSE(\hat{R}_{sh}(t))}{\partial W}=2WE\left\{\hat{R}(t)-R(t)\right\}^2-2(1-W)\left\{R_0(t)-R(t)\right\}^2 \qquad (2\text{-}40)$$

وبمساواة ناتج المشتقة في الصيغة أعلاه بالصفر نجد أن:

$$W=\frac{\{R_0(t)-R(t)\}^2}{\left[MSE(\hat{R}(t))+\{R_0(t)-R(t)\}^2\right]} \qquad (2\text{-}41)$$

وبقسمة البسط والمقام على ($R^2(t)$) نحصل على قيمة (W) التي تجعل متوسط مربعات الخطأ لمقدّر التقلص اقل ما يمكن:

$$W=\frac{\left(\sum-1\right)^2}{\left[\frac{MSE(\hat{R}(t))}{R^2(t)}+\left(\sum-1\right)^2\right]} \qquad (2\text{-}42)$$

إذ أن:

$\sum=\dfrac{R_0(t)}{R(t)}$ ، و $0<\Sigma<1$

وعلى فرض ان قيمة $R_0(t)$ قريبة من القيمة الحقيقية $R(t)$، فان قيمة Σ تقترب من الواحد الصحيح. وبالتالي فان المقدّرات بهذه الطريقة غير متحيزة .

٣ . الجانب التطبيقي :

٣-١ توليد الأعداد العشوائية :

ان آلية طريقة مونت- كارلو تتم حسب الخطوات التالية:

١- توليد الإعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم (Uniform Distribution) المستمر المعرف على الفترة [0,1] من خلال استخدام دالة التوزيع التجميعية (c.d.f) التي تصف الأنموذج.

٢- تحويل العدد العشوائي المنتظم للحصول على متغير عشوائي يصف الأنموذج تحت التجربة وكما هو مبين أدناه باستخدام مفهوم معكوس الدالة (Inverse Function)، فإذا كانت لدينا الدالة F الآتية:

$$y = F(x) \qquad (1-3)$$

فان معكوس الدالة F^{-1} بشرط ان تكون متباينة وشاملة، يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$x = F^{-1}(y) \qquad (2-3)$$

٣-٢ وصف مراحل تجربة المحاكاة :

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل الآتية لتطبيق أساليب تقدير دالة المعولية في هذا المبحث.

المرحلة الأولى:

وهي مرحلة اختيار القيم الافتراضية، إذ تعد من المراحل المهمة التي تعتمد المراحل الأخرى عليها، وقد تم اختيار القيم الافتراضية كالآتي:

١- بالنسبة للمعلمات والتجارب المختلفة كانت كما في الجدول الآتي:

جدول (٣-١)يبين القيم الافتراضية للمعلمات والتجارب المختلفة

Experiment	α	K
I	1	1
II	1	1.5
III	1	2
IV	2	1
V	2	1.5
VI	2	2

٢- أما العينات المفترضة فكانت كما يلي:

n = 10, 30, 50, 100

وكان تكرار هذه التجارب مساويا الى (L = 1000) لكل تجربة.

المرحلة الثانية:

توليـــد بيانــــات علـــى وفـــق توزيـــع بــــاريتو مــــن النـــوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) بالمعلمتين (α,k) وحسب الصيغة الآتية: Afify, (2004) ْ

$$x = k\,(1 - U)^{-1/\alpha} \qquad (٣-٣)$$

والتي يتم الحصول عليها باتباع الخطوات التالية:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

$$U = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

$$\left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} = 1 - U$$

$$\frac{k}{x} = (1-U)^{1/\alpha}$$

$$x = k(1-U)^{-1/\alpha}$$

إذ ان:

U: يمثل المتغير العشوائي المستمر المنتظم على الفترة [١، ٠] ويتم توليده باستخدام الحاسبة الإلكترونية على وفق الصيغة الآتية:

U = RND (1) (٣-٤)

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة يتم تقدير دالة المعولية لانموذج باريتو من النوع الأول بالمعلمتين (k, α) والمبينة في الجانب النظري وحسب صيغ طرائق التقدير الآتية:

١. طريقة الإمكان الأعظم.

٢. طريقة العزوم.

٣. طريقة المربعات الصغرى.

٤. طريقة التقلص.

المرحلة الرابعة:

هي مرحلة المقارنة بين طرائق التقدير، إذ يتم استخدام المقياس الآتي:

١.مقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي Integral Mean Squared Error **(IMSE):**

لكون (MSE) يحسب لكل (t_i) من الزمن فان (IMSE) يمثل تكاملا ً للمساحة الكلية لـ(t_i) واختزالها بقيمة واحدة تعد عامة للزمن، أو معبرة عن الزمن الكلي وصيغة هذا المقياس تكون كما يلي : (شريم، ماجد هبة الله، ٢٠٠٥) [٤]

$$IMSE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(\hat{R}_i(t_j) - R(t_j))^2\right\} \qquad (٣-٥)$$

$$IMSE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(MSE(\hat{R}(t_i)) \qquad (٤-٦)$$

$i = 1,2, \ldots, L$

إذ أن:

L: عدد مرات تكرار التجربة (Replications).

n_t: هي معبرة عن حدود المتغير (t_i) أي من الحد الأدنى (Lower Bound) إلى الحد الأعلى (Upper Bound).

٣-٢ مناقشة تجارب المحاكاة :

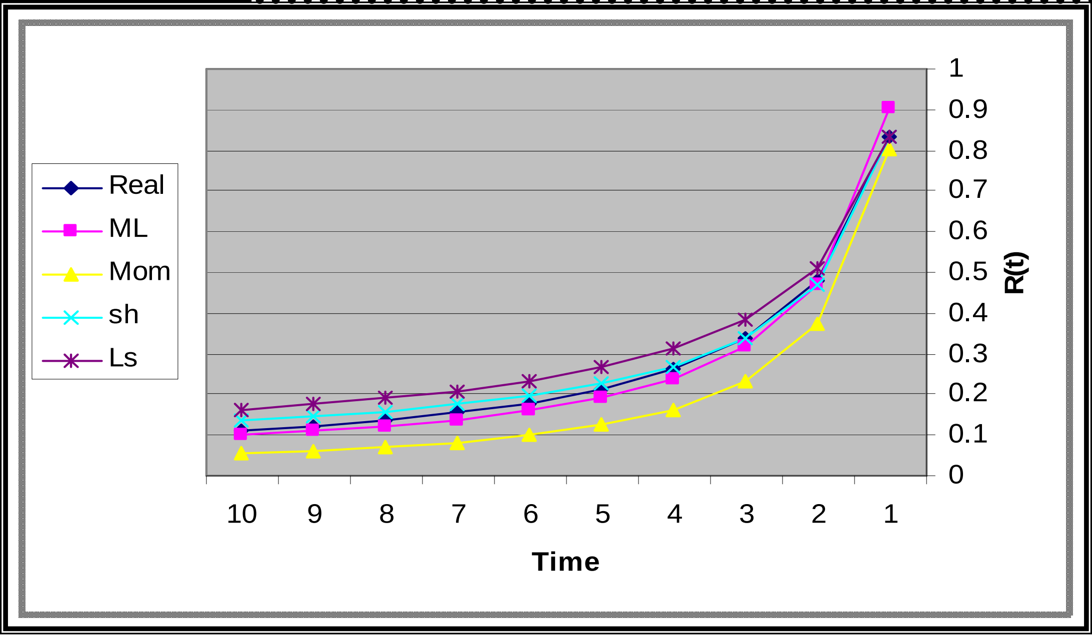
في هذا المبحث سيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) حسب الطرائق المبينة في الجانب النظري من هذا البحث.وقد تم الحصول على هذه النتائج باعتماد برنامج كتب بلغة Visual

Basic من قبل الباحث (ملحق 1) ، وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها حسب التسلسل وكما يأتي:

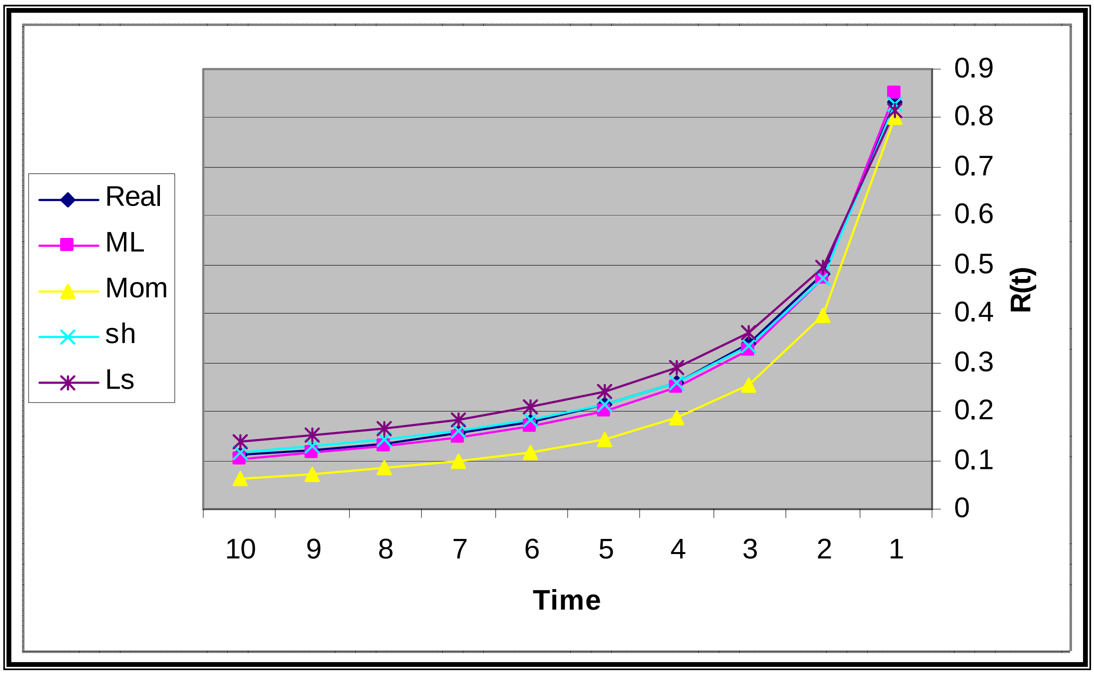
جدول (٣-٢)يبين قيم دالة المعولية لطرائق التقدير المختلفة للتجربة الأولى بحسب حجوم العينات وبعدد مكررات (L=1000)

n	time	Real	ML	Mom	sh	Ls
	1.20	0.34255	0.24482	0.87777	0.86880	0.43232
	2.08	0.43077	0.47242	0.36764	0.44239	0.32466
	2.96	0.33354	0.31242	0.26612	0.35444	0.89073
	3.84	0.23542	0.22423	0.16855	0.29451	0.75436
10	4.72	0.21643	0.19222	0.16877	0.55554	0.26663
	5.60	0.17447	0.16424	0.09681	0.16542	0.25555
	6.48	0.15443	0.15338	0.06877	0.19499	0.20456
	7.36	0.12427	0.11313	0.06830	0.17545	0.17658
	8.24	0.12436	0.10131	0.06867	0.15787	0.78697
	9.12	0.24965	0.07770	0.05681	0.10978	0.77769
	1.20	0.22333	0.77765	0.73333	0.85773	0.87537
	2.08	0.48237	0.55762	0.39357	0.47577	0.43478
	2.96	0.33384	0.37511	0.23220	0.35573	0.33773
	3.84	0.25542	0.24549	0.14240	0.27544	0.66819
30	4.72	0.26546	0.20383	0.14442	0.55557	0.57820
	5.60	0.17534	0.16955	0.14663	0.17527	0.28673
	6.48	0.15333	0.15615	0.09577	0.17572	0.16618
	7.36	0.13888	0.15858	0.08571	0.17747	0.15546
	8.24	0.18836	0.13455	0.05719	0.17546	0.15433
	9.12	0.77777	0.13334	0.07577	0.14870	0.13335
	1.20	0.86533	0.44445	0.45473	0.55593	0.33336

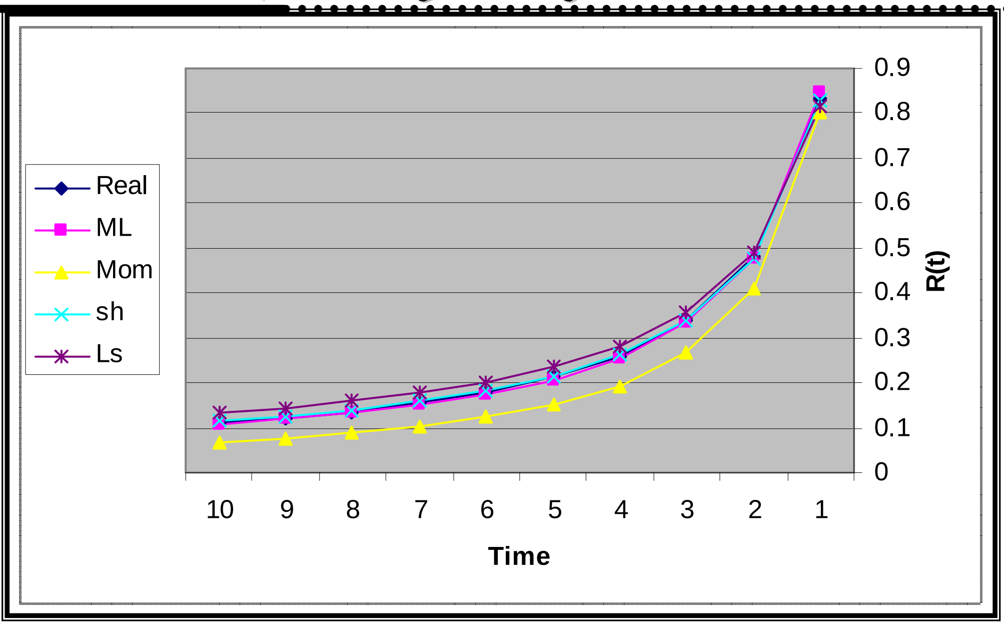
50	2.08	0.44537	0.64660	0.76565	0.76659	0.22252
	2.96	0.97698	0.54649	0.87676	0.36766	0.34476
	3.84	0.99645	0.44424	0.57578	0.26559	0.25677
	4.72	0.21112	0.29998	0.56756	0.57753	0.27554
	5.60	0.22234	0.34678	0.23327	0.55573	0.54494
	6.48	0.13378	0.15875	0.65455	0.89652	0.44459
	7.36	0.1767	0.15431	0.08977	0.67862	0.15554
	8.24	0.16453	0.19564	0.55715	0.67866	0.76592
	9.12	0.15675	0.10236	0.6781	0.66654	0.97666
100	1.20	0.45533	0.43678	0.22566	0.81278	0.87773
	2.08	0.54577	0.45555	0.34851	0.43458	0.46584
	2.96	0.57784	0.32487	0.24637	0.32315	0.35447
	3.84	0.45642	0.23242	0.20676	0.26785	0.26786
	4.72	0.12226	0.23336	0.15769	0.21782	0.22858
	5.60	0.11211	0.15435	0.43783	0.11284	0.14543
	6.48	0.11112	0.12399	0.10888	0.11678	0.14354
	7.36	0.12334	0.13111	0.06546	0.12343	0.13213
	8.24	0.15322	0.11122	0.03227	0.14536	0.11232
	9.12	0.10338	0.10322	0.02344	0.16444	0.11420



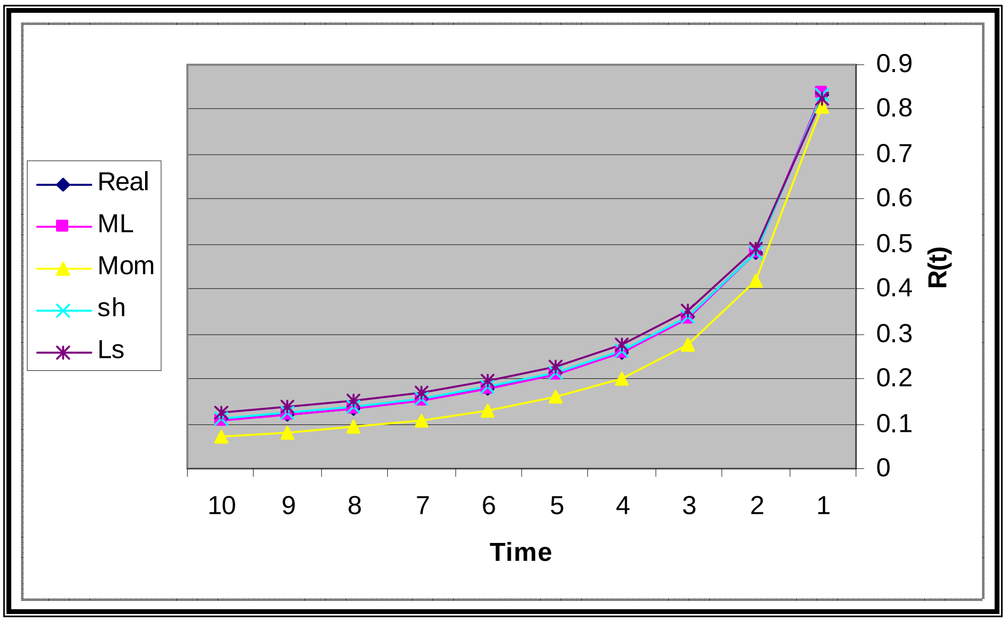
شكل (٣-١)يبين تغير دالة المعولية مع الزمن للتجربة الاولى للطرائق كافة ولحجم العينة (n=10)



شكل (٣-٢)يبين تغير دالة المعولية مع الزمن للتجربة الاولى للطرائق كافة ولحجم العينة (n=30)



شكل (٣-٣)يبين تغير دالة المعولية مع الزمن للتجربة الاولى للطرائق كافة ولحجم العينة (n=50)



شكل (٣-٤)يبين تغير دالة المعولية مع الزمن للتجربة الاولى للطرائق كافة ولحجم العينة (n=100)

من خلال النتائج المبينة في الجدول (٣-٢) نلاحظ ما يلي:

١- أظهرت الطرائق المعتمدة على المعلومات الأولية أفضلية من حيث اقتراب القيم التقديرية من القيم الافتراضية.

٢- لأحجام العينات المفترضة جميعها، أظهرت تقديرات دالة المعولية بطريقة التقلص أفضلية في اقترابها من القيم الافتراضية مقارنة بالطرائق الأخرى.

٣- حققت طريقة الإمكان الأعظم الأفضلية على الطرائق التقليدية الأخرى لتقدير دالة المعولية لحجوم العينات (n = 10, 30, 50, 100) من خلال اقتراب القيم التقريبية من القيم الافتراضية.

والأشكال (٣-١) و(٣-٢) و(٣-٣) و(٣-٤) تبين ما تم التوصل إليه في أعلاه وبيان افضل طريقة من حيث اقتراب القيم التقديرية لدالة المعولية من القيم الافتراضية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة (n=10,30,50,100).

جدول (٣-٣)يبين متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لتقدير دالة المعولية بجميع الطرائق وحجوم العينات ولجميع التجارب

Model	n	ML	Mom	Sh	Ls	Best
I	10	0.020880	0.010222	0.002222	0.112055	Sh
	30	0.011123	0.015231	0.001123	0.015345	Sh
	50	0.004352	0.011232	0.001323	0.003444	Sh
	100	0.003325	0.013211	0.005563	0.003255	Sh
II	10	0.013353	0.011999	0.012233	0.015655	Mom
	30	0.005586	0.003078	0.003244	0.003456	Mom
	50	0.005579	0.005888	0.002457	0.006434	Sh
	100	0.006660	0.003888	0.001643	0.004599	Sh
III	10	0.016620	0.018678	0.013345	0.019763	Sh
	30	0.007740	0.008651	0.004710	0.006537	Sh
	50	0.002555	0.005678	0.001640	0.005438	Sh

	100	0.003455	0.003754	0.001331	0.003336	Sh
IV	10	0.006662	0.003534	0.004333	0.013451	Mom
	30	0.006666	0.006656	0.003333	0.003566	Sh
	50	0.005450	0.001646	0.001858	0.002342	Sh
	100	0.001165	0.002676	0.002766	0.001398	ML
V	10	0.015679	0.004568	0.009644	0.015876	Mom
	30	0.009999	0.003856	0.002433	0.005654	Sh
	50	0.009995	0.002647	0.001323	0.003433	Sh
	100	0.000941	0.001753	0.000322	0.001346	Sh
VI	10	0.010008	0.003333	0.004411	0.014643	Mom
	30	0.008888	0.002389	0.001220	0.005789	Sh
	50	0.001999	0.001964	0.001673	0.003995	Sh
	100	0.000999	0.001432	0.000999	0.001999	Sh

من الجدول (٣-٣) نلاحظ:

١- للتجربة الاولى (I) كانت أكفأ طريقة لتقدير دالة المعولية R(t)، هي طريقة التقلص (Sh)، وذلك عند حجوم العينة المفترضة (n = 10,30,50,100) (لانها تملك أقل IMSE) .

٢- للتجربة الثانية (II) حقق مقدّرالعزوم (Mom) كفاءة في التقدير عند حجمي العينة (n = 10, 30)، أما طريقة (Sh)، فكانت أكفأ عندما (n= 50, 100)،مقارنة بطرائق التقدير المستخدمة في هذا البحث (لانها تملك أقل IMSE) .

٣- للتجربة الثالثة (III) أيضاً حققت طريقة التقلص (Sh)، كفاءة في التقدير عند حجوم العينات المفترضة (n = 10, 30, 50, 100)، مقارنة بطرائق التقدير الأخرى (لانها تملك أقل IMSE) .

٤- للتجربة الرابعة (IV) كانت أكفأ طريقة لتقدير دالة المعولية R(t) هي طريقة العزوم (Mom)، عند حجم العينة (n = 10)، أما طريقة التقلص(Sh)، فكانت أكفأ عند حجمي العينة (n = 30,

50) في حين كانت طريقة الإمكان الأعظم (M.L) هي الأكفأ عندما (n = 100) (لانها تملك أقل IMSE) .

٥- للتجربة الخامسة (V) حققت طريقة العزوم(Mom)، كفاءة في التقدير عند حجم العينة عندما (n = 10)، و كانت لطريقة التقلص (Sh)، المرتبة الأولى في الكفاءة عندما (n= 30, 50, 100)

(لانها تملك أقل IMSE) .

٦- للتجربة السادسة (VI) حققت طريقة العزوم (Mom)الكفاءة في التقدير عند حجم العينة

(n = 10)، أما طريقة (Sh)، فكانت أكفأ عندما (n= 30, 50, 100)، مقارنة بطرائق التقدير المستخدمة في هذا البحث (لانها تملك أقل IMSE) .

كما يتضح مما تقدم وفيما يخص المقياس الإحصائي (IMSE) كانت طريقة التقدير التي حققت أعلى نسبة من حيث الكفاءة لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول (Pareto Distribution of the First Kind) ومن أجل حجوم العينات جميعها، هي طريقة التقلص (Shrinkage).والجدول الآتي يلخص نسبة الكفاءة لطرائق التقدير المختلفة.

جدول (٣-٤)يبين نسبة الكفاءة لتقدير دالة المعولية باستخدام المقياس الإحصائي (IMSE)

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية	النسبة
Sh	18	0.75
Mom	5	0.21
ML	1	0.04
LS	0	0

٤ الاستنتاجات: Conclusions

١- بشكل عام تبين لدى الباحث من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة أفضلية طريقة التقلص مقارنة بطرائق التقدير المستخدمة في هذا البحث، لتقدير دالة المعولية باستخدام المقياس الإحصائي (IMSE) من اجل المقارنة يبن أفضلية المقدّرات ولحجوم العينات المفترضة كافة.

٢- بشكل عام تبين لدى الباحث بالنسبة للطرائق التقليدية ومن خلال تنفيذ تجارب المحاكاة أفضلية طريقة التقلص عند استخدام المقياس الإحصائي (IMSE) ولحجوم العينات كافة (n=10,30,50,100).

٣- أظهرت نتائج تجارب المحاكاة ان قيم دالة المعولية تتناقص بزيادة زمن الاشتغال t وان قيمتها تقع ضمن الفترة [١،٠] وهذا ينسجم مع الجانب النظري المتعلق بخواص دالة المعولية.

٤- أظهرت نتائج المحاكاة ان مقدّرات طريقة المربعات الصغرى اقل كفاءة من بقية الطرائق المستخدمة في هذا البحث في تقدير دالة المعولية.

٥ التوصيات: Recommendations

١- يوصي الباحث باعتماد طريقة التقلص لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول.

٢- يوصي الباحث بإجراء بحوث مستقبلية بالاتجاه نفسه بالنسبة لصيغ باريتو الأخرى وهي النوع الثاني (Type II) والنوع الثالث (Type III).

٣- يوصي الباحث بإجراء بحوث حول استخدام توزيع باريتو المبتور (Truncated Pareto Distribution) من الأعلى كأنموذج للفشل واستخدام أسلوب المحاكاة لغرض المقارنة بين طرائق التقدير التي يمكن ان تستخدم في مثل هذه الحالة.

٤- يوصي الباحث بإجراء بحث على بيانات حقيقية واستخدام طريقة التقلص لتقدير دالة المعولية لكونه افضل طرائق التقدير التي تم التوصل إليها في الجانب التجريبي.

قائمة المصادر

أولاً: المصادر العربية: Arabic References

١. البياتي، حسام نجم، (٢٠٠٢): مقارنة طرائق تقدير أنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

٢. الجاسم، صباح والعلوي، لقاء (٢٠٠٣): ملاحظات حول توزيع باريتو العام، المؤتمر العلمي التاسع لكلية الرافدين الجامعة- بغداد.

٣. الهلالي، فراس صدام، (٢٠٠٤): مقارنة طرائق تقدير أنموذج ويبل للفشل بثلاث معالم باستخدام المحاكاة، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

٤. صالح ، ستار محمد ،(٢٠٠٦): مقارنة أسلوب بيز مع طرائق أخرى لتقدير دالة المعولية لتوزيع \باريتو من النوع الأول، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

٥. شريم، ماجد هبة الله، (٢٠٠٥): دراسة مقارنة لطرائق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي عن مرضى سرطان الدم في اليمن، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

ثانياً: المصادر الأجنبية: Foreign References

6. Afify, E.E, (2004): Estimation of Parameters for Pareto Distribution. http://interstat.statjournals.net/YEAR/2003/articles/0302004.pdf.

7. Hodge, B.C, (1997): Estimating Pareto's Constant and Gina Coefficient of the Pareto Distribution, A thesis in statistics, University of Nevada, Las Vegas.

8. Hussein, A.M, & William, J. T, (2000): Comparisons of Methods of Estimation for a Pareto distribution of the First Kind, Common. Statistic-Theory Math, 29(4), PP. 859-878.

9. Johnson, N.L & Katz, S, (1970): Continuous Univariate Distribution, Houghton Mifflin, Boston.

10. Rytgaard, M, (1990): Estimation In The Pareto Distribution, Astin, Bulletin, Vol.20, No.2, PP. 201-216.

11. Sarhan, A.M, & El-Gohary, A. I, (2003): Estimations of Parameters In Pareto Reliability Model in the Presence of Masked Data, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 82, PP. 75-83.