The Optimal Solution for Calculating a Number of Integer Points in Descarte's Folium

الحل الأمثل لحساب عدد النقاط الصحيحة في رقيقة ديكارت

Dr. Hani Muslim Abood Al-Dainy
Department of ComputerSciences- Ibn-Al-Haitham College of Education - University of Baghdad

Abstract

This research consecrated to study and calculating a number of integer points in Descarte's folium. We introduce a new method by using polar parameter, in contrast with the classic method that usually used in calculating a number of integer points in bounded region which uses linear parameter.

الخلاصة

كرس بحثنا هذا لدراسة وحساب عدد النقاط الصحيحة في رقيقة ديكارت، إذ نقدم طريقة جديدة باستعمال وسيط قطبي خلافاً للطريقة التقليدية باستعمال وسيط خطي في حساب عدد النقاط الصحيحة في منطقة محدودة.

المقدمة

(لا يوجد بحث علمي بشري يمكن أن يسمى علم حقيقي إذا لم يمر خلال برهان رياضياتي. ولايقين مطلق في العلوم حيثما لايستند على علوم الرياضيات وهذا صلب العلاقة مع الرياضيات) (ليونارد دافنشي)

مسائل النقاط الصحيحة عديدة ومختلفة، البحوث الاولى في هذا المجال تعود لكاووس (K.F.Gauss)(1)، حيث بحث مسألة عدد النقاط الصحيحة في المنطقة المحدودة بمنحني الدائرة:

$$x^2 + y^2 = R$$

وبرهن على أن:

لعدد النقاط الصحيحة $K(R)$ في المنطقة المحدودة بمنحني الدائرة $x^2 + y^2 = R$ ، الصيغة المقاربة الآتية صائبة:

$$K(R) = \pi R + \Delta(R) \; ; \; \Delta(R) = O(\sqrt{R})$$

وهذا ما يسمى بتمهيدية كاووس.

ثم توالت البحوث لدراسة مناطق مختلفة، منها المنطقة المقيدة بين الإحداثيات الموجبة والقطع الزائد:

$$x y \le R \; ; \; x > 0, \; y > 0$$

حيث برهن دريخل(L.P.G.Dirichlet)صواب الصيغة المقاربة الآتية لعدد النقاط الصحيحة $L(R)$ لهذه المنطقة:

$$L(R) = R(\ln R + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{R})$$

حيث: γ ثابت اويلر (Eüler's Constant).

وفي مناطق أكثر تعقيداً (مناطق ثلاثية الأبعاد)، (2).حسبت عدد النقاط الصحيحة أيضاً (في الكرة مثلاً).

1. المبرهنة الأساسية:

هذا البحث يمثل دراسة لعدد النقاط الصحيحة في المنطقة المحدودة بالمنحني:

$$x^3 + y^3 - 3 N xy = 0 \; ; \; x > 0 \; , \; y > 0$$

والتي تسمى برقيقة ديكارت (Descarte's Folium)،(وهدا ماتتضمنه المبرهنة1)حيث نقدم طريقة جديدة باستعمال وسيط قطبي، خلافاً للطريقة التقليدية المتبعة – عادةً- في حساب عدد النقاط الصحيحة في منطقة محدودة والتي يستعمل فيها وسيطاً خطياً،(3)، وهذا ما تتضمنه المبرهنة 1.

مبرهنة1:

لتكن H(N) ترمز لعدد النقاط الصحيحة للمنطقة المحدودة بالمنحني:

$$x^3 + y^3 - 3N\,xy = 0 \ ; x > 0 , y > 0$$

حيث: N متغير حقيقي يعتمد على x و y، عندئذ، لدينا الصيغة المقاربة الآتية صائبة:

$$H(N) = \frac{3}{2}N^2 + O(N)$$

لإعطاء برهان مقنع لهذه المبرهنة نقوم بحساب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني أولاَ ثم نجد صيغة مقاربة لطول المنحني ثانيآ، بعدها نستعمل تمهيدية يارنيك للحصول على صيغة مقاربة لعدد النقاط الصحيحة في رقيقة ديكارت.

2. النقطة الصحيحة، المنطقة الجوردانية:

(النقطة الصحيحة هي النقطة في المستوي التي تكون مركباتها (إحداثياتها) أعداداً صحيحة)،(4) (أي منحني بسيط على المستوي يجزأ (يقسم) المستوي إلى منطقتين محدودة وغير محدودة (مقيدة وغير مقيدة)) – مبرهنة جوردان، (5)

لتكن المنطقة D محدودة بالمنحني : $x^3 + y^3 - 3N\,xy = 0$ الذي لا يتقاطع مع نفسه، ولتكن مساحة هذه المنطقة موجودة، مثل هذه المنطقة سنسميها بالمنطقة الجوردانية.

التمهيدية التالية صحيحة للمنطقة D والتي تسمى بتمهيدية يارنيك (V.Yarnik's Lemma)،(3)وهي تعميم لتمهيدية كاووس.

تمهيدية:

لتكن D منطقة جوردانية، مساحتها تساوي A وطول منحنيها يساوي L عندئذٍ عدد النقاط الصحيحة H في المنطقة D تحقق المتراجحة:

$$|H - A| < L$$

3. مساحة المنطقة المحدودة

بدايةً نقوم بتحويل معادلة المنحني $x^3 + y^3 - 3\,N\,xy = 0$ الى الصيغة الوسيطية، لهذا نضع:

$$x = r\cos(\theta);\ y = r\sin(\theta)$$

ومنها نجد أن:

$$r = 3N\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)}$$

مبرهنة2:(6)

إذا كانت الدالة $f(r,\theta)$ مستمرة على المنطقة D فان:

$$\iint_D f(r,\theta)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

من هذه المبرهنة نستطيع القول بأن التكامل الثنائي القطبي يمثل حجم المُجسّم لارتفاع ثابت يساوي 1 فوق المنطقة D.عددياً هذا الحجم نفسه يكون مساحة المنطقة D، إذن:

$$A = \iint_D dA$$

المنطقة D تقع في الربع الأول من الاحداثيات الديكارتية، فعليه الوسيط (r) في هذه المنطقة يتغير من (0)إلى $3N\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)}$. إذن يكون لدينا:

$$A=\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{r}d\theta$$

$$=\frac{(3N)^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{(\sin^3(\theta)+\cos^3(\theta))^2}d\theta$$

$$=\frac{(3N)^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2}{\cos^2(\theta)\left(\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^3+1\right)^2}d\theta$$

$$=\frac{(3N)^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2(\theta)\tan^2(\theta)}{\left(\tan^3(\theta)+1\right)^2}d\theta$$

نضع $u = \tan(\theta)$ ومنها $du = \sec^2(\theta)d\theta$ وبذلك يكون:

$$A=\frac{(3N)^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{u^2}{(u^3+1)^2}du$$

نفرض : $t = (u^3 + 1)$ ومنها $dt = 3u^2\,du$ ونحصل على:

$$A=\frac{(3N)^2}{6}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{3}{2}N^2$$

4. صيغة مقاربة لطول المنحني

صيغة طول قوس لمنحني وسيطي يمكن استعمالها للحصول على صيغة لطول قوس منحني قطبي، وهذا ما تحققه المبرهنة الآتية:

مبرهنة3:(6)

إذا كان للمنحني معادلة قطبية $r = f(\theta)$، حيث $f'(\theta)$ مستمرة في الفترة $a \le \theta \le b$ فان طول قوس المنحني من $\theta = a$ إلى $\theta = b$ يكون:

$$L=\int_a^b\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

أو بشكل مكافىء:

$$L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

قبل البدء بتطبيق المبرهنة نحسب مشتقة الدالة $r = f(\theta)$ ، فيكون لدينا:

$$r = 3N\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)+\cos^3(\theta)}$$

$$= 3N\frac{\tan(\theta)}{\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)}$$

إذن:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3N\frac{\sec(\theta)[1+\tan(\theta)(\tan^3(\theta)+1)-2\tan^3(\theta)]}{[\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)]^2}$$

نستعمل صيغة طول القوس للمنحني القطبي ونحصل على:

$$L = \int_0^{\pi/2}\sqrt{(3N)^2\frac{\tan^2(\theta)}{[\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)]^2}+(3N)^2\frac{\sec^2(\theta)[1+\tan(\theta)(\tan^3(\theta)+1)-2\tan^3(\theta)]^2}{[\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)]^4}}\,d\theta$$

$$= 3N\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)[\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)]^2+\sec^2(\theta)[1+\tan(\theta)(\tan^3(\theta)+1)-2\tan^3(\theta)]^2}}{[\cos(\theta)(\tan^3(\theta)+1)]^2}\,d\theta$$

$$L = 3N\int_0^{\pi/2} h(\theta)\,d\theta$$

التكامل الأخير هو تكامل معتل (improper) حيث لايمكن حسا به بدقه ، ولكن يمكن أن نصل إلى تقاربه أوتباعده ،وهذا ماهو مطلوب في بحثنا لإثبات صحة إدعاء المبرهنة الاساسية.
من المعلوم إنه إذا كانت الدالة غيرمقيدة(unbounded) على فترة مغلقة فإنها غير قابلة للتكامل ولهذا إذا أردنا أن نكامل دالة غير مقيدة في هذا المعنى فمن الضروري علينا تعميم مفهوم التكامل.
لتكن الدالة $h(\theta)$ معرفة على الفترة النصف مفتوحة المنتهية $]0, \frac{\pi}{2}($. نفرض بأنها قابلة للتكامل على أية فترة مغلقة $[0,\alpha]$ بحيث : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ وإنها غير مقيدة في جوار النقطة$\frac{\pi}{2}$.التكامل الريماني (الاعتيادي) للدالة $h(\theta)$على الفترة $[0,\frac{\pi}{2})$ أو في الوقت نفسه على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ لايمكن إيجاده بما ان التكامل الريماني (بمعنى التمام) للدالة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ يجب أن تكون مقيدة .

لكن قد يحصل بأن تكون النهاية :

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha} h(\theta)\,d\theta$$

موجودة.عندئذ يكون:

$$\int_0^{\pi/2} h(\theta)\,d\theta = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha} h(\theta)\,d\theta$$

وإذا كان كذلك (أي وجود النهاية) فإننا نقول بأن التكامل المعتل متقارب. من ناحية ثانية عندما تكون النهاية غير موجودة نقول بأن التكامل متباعد.
مفهوم النهاية بهذا المعنى يقودنا إلى المبرهنة الآتية(مبرهنة مقياس كوشيCauchy's Criterion)

مبرهنة 4: (7)

ليكن معطى التكامل من الشكل : $\int_a^b f(x)\,dx$ مع خصوصية واحدة عند النقطة b فقط. الشرط الضروري والكافي بأن يكون التكامل متقاربا أن يحقق شروط مقياس كوشي:

لأي $\varepsilon > 0$ معطاة يوجد $a < b_0 < b$ بحيث أن :

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

ولأي b' ، b'' تتحقق المتراجحات : $b_0 < b' < b'' < b$

إذن وفقا لهذه المبرهنة يكون لدينا:

$$\left|\int_{\alpha'}^{\alpha''} h(\theta)\,d\theta\right| < \varepsilon$$

حيث : $\alpha' < \alpha'' < \frac{\pi}{2}$ عندئذ طول المنحني يحقق المتراجحة

$$L < CN \qquad ; C\text{-Constant}$$

وهذا يثبت صحة الباقي في الصيغة المقاربة لعدد النقاط الصحيحة في المبرهنة 1.

حقيقة البحث تكمن في الحصول على أفضل باقي، أي كلما كانت رتبة N صغيرة فأننا نقترب إلى نقطة صحيحة. لذا تبقى المسألة موضوع البحث مفتوحة.

References

1. Karacuba,A.E.,"Principles Analytic Number Theory", Science, Moscow, (1983).
2. Vinogradov, I.M.,"Special Variant Method Trigonometric Sums", Science, Moscow, (1976).
3. Abood,H.,M.,"TheInteger Pointes in Descarte'sFolium",M.Sc. Thesis, Moscow State University, (1985).
4. Chandrasekharan, K., "Introduction to Analytic Number Theory", Springer-Verlage, Berlin, Heidelberg New York, (1968).
5. Kuderiacov, L.D., "Mathematical Analysis", High School, Moscow, (1973).
6. Howard A., Calculus with Analytic Geometry, Jon Wiley and Sons Co., New York, (1980)
7. Nikolsky,S.,M., " A Course of Mathematical Analysis",Volume, 1, Mir Publisher, Moscow, Third printing, (1985).