Derivation of formulaes for evaluating double integrals and their error formulaes by using Trapezoidal rule.

اشتقاق قواعد حساب التكاملات الثنائية وصيغ الخطا باستخدام قاعدة شبه المنحرف

أ.علي حسن محمد
جامعة الكوفة /كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات

ندى احمد محمد طه
جامعة الكوفة /كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إيجاد قيم التكاملات الثنائية البعد عددياً, مكاملاتها مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية أو معتلة في نقطة واحدة أو أكثرمن نقاط منطقة التكامل, وإيجاد صيغة عامة لصيغ الخطأ (حدود التصحيح) حسب سلوك المكامل وبأسلوب جديد مغاير للأسلوب الذي اتخذه باحثون آخرون محمد[14], الطائي [9] , ضياء [12]. وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بتحسين قيم التكاملات الثنائية التي حصلنا عليها, فوجدنا إن الطريقة RTT (وهي طريقة مركبة من استخدام قاعدة شبه المنحرف على البعدين الداخلي x والخارجي y مع تطبيق طريقة تعجيل رومبرك) يمكن الاعتماد عليها عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي ان $\left(h=\overline{h}\right)$ حيث إن $\overline{h}$ تعني المسافات بين الإحداثيات السينية و h هي المسافات بين الإحداثيات الصادية حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقل مما احتاجه الباحثون اعلاه الذين تعاملوا مع الموضوع نفسه .

Abstract

The main aim of this search is to evaluate double integrals numerically ,with continuous integrands or continuous but at least one of the partial derivatives is singular or with singular integrands at one point or more of the integral region and to find the general forms of correction terms (Errors) with respect to the behaviour of integrands by style different from style that Mohammed [4], Altaii[9], Dya'a[12] used it .By depending on that the correction terms that we found it we improved the results that we got it .And we found the method RTT(compouned method depends on Trapezoidal method for the two dimensions x and y) and Romberg acceleration can be depend on it when the subintervals of interior dimension x equal to subintervals of exterior dimension y, that is $(h=\overline{h})$ where as $\overline{h}$ means the distances between x ordinates and h means the distances between y ordinates.

This method gives high accuracy on the results with little subintervals and little time less than the others searchers needed it.

1-المقدمة

ان للتكاملات الثنائية أهمية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصورالذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي , وكمثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho=2\left(1-\cos\theta\right)$ حول المحور القطبي, فضلا عن أهميته في إيجاد مساحة سطح منحن كإيجاد مساحة قطعة السطح $x^2+y^2+z^2=4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب $\rho=\left(1-\cos\theta\right)$ أو حساب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2+z^2=6y$. فرانك آيرز[13], وقد عمل الكثير من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية, ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة$f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)$ هما هانس جار وجاكوبسن [3] عام 1973 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال , دافييز ورابينوتز [6] عام 1975.

وفي عام 1984 عالج محمد [14] التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المعتلة في المشتقة أو المعتلة وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغارتمي أم كليهما) وذلك باستخدام طرائق مركبة واحدها رومبرك (كاوس) التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة كاوس على البعد الداخلي x وأيضا منها كاوس (رومبرك) التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعد الخارجي y و طريقة تعجيل

رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي x ومنها أيضا كاوس (كاوس) التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعدين الخارجي y والداخلي x وكذلك طريقة مركبة اسماها رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x وقد اثبت من خلال المقارنة بين الطرائق المركبة أعلاه وعلى تكاملات متعددة بان الطريقة المركبة من كاوس (كاوس) هي الأفضل من بقية الطرائق بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة على البعدين واثبت بنفس الوقت إن الطريقة المركبة من رومبرك (كاوس) هي الأفضل في حساب التكاملات التي مكاملاتها معتلة المشتقة أو معتلة والتي يمكن إلغاء اعتلالها على البعد الداخلي x من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

كما قدم محمد [4] بحثا في عام 2002 بيَن فيه طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع طريقة تعجيل رومبرك وعلى البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها وعلى البعدين x و y من دون إهمال الاعتلال على البعدين x و y واسماها طريقة رومبرك (رومبرك) حيث إن $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ (حدود التصحيح للبعد الداخلي x) تعتمد على سلوك المكامل وقد أعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيمة التحليلية وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

أما الطائي [9] فقد استخدمت في عام 2005 قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x مع إهمال الاعتلال على البعد الداخلي x وأعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وبعدد قليل من الفترات الجزئية .

وفي عام 2009 قدم كل من محمد وآخرون [5] بحثا في إيجاد القيم العددية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة وتناولوا فيه ثلاث طرائق وهي :

طريقة $RS(RS)$ $RM(RS)$, $RT(RS)$, إذ إن هذه الطرائق استخدمت قاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وكل من قاعدة سمبسون وقاعدة النقطة الوسطى وقاعدة شبه المنحرف على البعد الخارجي y وباستخدام تعجيل رومبرك على كلا البعدين x و y مع عدم إهمال الاعتلال في كلا البعدين. وقد اثبتوا ان طريقة $RM(RS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات و عدد الفترات الجزئية المستخدمة .

أما ضياء[12] فقد استخدمت في عام 2009 أربع طرائق عددية مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون لحساب قيم التكاملات الثنائية سواء كانت مكاملاتها مستمرة أو مستمرة ولكن مشتقاتها معتلة أو معتلة وممكن إلغاء الاعتلال فيها أو التي من غير الممكن إلغاء الاعتلال فيها وهذه الطرائق هي $RM\left(RS\right)$, $RM\left(RM\right)$, $RS\left(RM\right)$ و $RS\left(RS\right)$ وقد أعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وعددالفترات الجزئية المستخدمة وبالاضافة الى انها توصلت الى ان الطريقة $RM\left(RS\right)$ هي أفضل للتكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المستمرة لكن معتلة المشتقة مع إلغاء الاعتلال بالنسبة للتكاملات التي مشتقات مكاملاتها معتلة اوالتكاملات ذات المكاملات المعتلة التي يمكن إلغاء الاعتلال فيها. أما في حالة التكاملات ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها , فوجدت إن أفضل الطرائق هي طريقة $RM\left(RM\right)$.

وقد ناقشت الحالات الآتية عند استخراج صيغ الخطأ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$:-

1 - إلغاء الاعتلال على البعد الداخلي باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي , محمد[14].

2- فرض $y = a$ مع عدم إلغاء الاعتلال حيث a هي نقطة الاعتلال محمد وآخرون.[5]

3 - فرض y ثابت مع الأخذ بنظر الاعتبار الاعتلال بالرغم من إمكانية إلغائه على الداخل, محمد [4]

وفي عام 2010 قدمت عكار [11] أسلوب جديد مغاير لما استعمله الباحثون في أعلاه آذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي إذ إن $h = \bar{h}$ وأسمتها RMM حيث أن MM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على كلا البعدين و R طريقة تعجيل رومبرك و قدمت حالة واحدة مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح في حالة كون المكامل دالة مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل والصيغة العامة للقاعدة التي استخدمتها عكار [11] هي :-

$$MM\left(h\right)=\int_c^d\int_a^b f\,(x\,,y\,)dxdy\,=h^2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f\,\left(x_i\,,y_j\,\right)$$

آذ أن $j=1,2,...,m\ ,\ y_j=c+\frac{2j-1}{2}h$ $\quad ,i=1,2,...,n\ ,\ x_i=a+\frac{2i-1}{2}h$

وقد حصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة بعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة للتكاملات المستمرة والمعتلة والمعتلة المشتقات الجزئية.

وفي عام 2011 قدمت موسى [15] أسلوب مشابه لما استعملته عكار[11] في أعلاه إذ قدمت ثلاث طرائق عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي x وقاعدة سمبسون على البعد الخارجي y مرة ومن تطبيق قاعدة سمبسون على البعد الداخلي xو قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y مرة اخرى ومن تطبيق قاعدة سمبسون على كلا البعدين عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي إذ إن $h=\bar{h}$ وأسمت هذه القواعد بـ (RSS,RMS,RSM) على التوالي حيث أن SM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى على البعد الدخلي x وقاعدة سمبسون على البعد الخارجي y في حين ان MS ترمزلقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x و قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y بينما SS ترمز لقاعدة سمبسون المطبقة على كلا البعدين x و y وR تشيرالى تعجيل رومبرك المستعمل مع كل قاعدة من القواعد الثلاث وقد قدمت البرهان لكل قاعدة من القواعد وإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح في حالة كون المكامل دالة مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل والصيغ العامة للقواعد التي حصلت عليها موسى [15] هي :-

$$SS=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\frac{h^2}{9}\Bigg[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+4\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_{(2i-1)},c\right)+f\left(x_{(2i-1)},d\right)\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(x_{2i},c\right)+f\left(x_{2i},d\right)\right)+4\sum_{j=1}^{n}\left(f(a,y_{(2j-1)})+f(b,y_{(2j-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)})\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)})\right)+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(f(a,y_{2j})+f(b,y_{2j})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\right)\Bigg]$$

حيث ان
$$i=1,2,\ldots,n,\ x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h \qquad , \ i=1,2,\ldots,n-1,\ x_{2i}=a+2ih$$
$$j=1,2,\ldots n,\ y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h \quad , \ j=1,2,\ldots,n-1,\ y_{2j}=c+2jh$$

$$MS=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{2n}\left[f(a,y_j)+f(b,y_j)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_j)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_j)\right]$$

حيث ان
$$j=1,2,\ldots 2n \quad , \quad y_j=c+\frac{(2j-1)}{2}h$$
$$i=1,2,\ldots,n,\ x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h \ , \ i=1,2,\ldots,n-1,\ x_{2i}=a+2ih$$
$$SM=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{2n}\left[f(x_i,c)+f(x_i,d)+4\sum_{j=1}^{n}f(x_i,y_{(2j-1)})+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_{2j})\right]$$
حيث ان
$$i=1,2,\ldots,2n,\ x_i=a+\frac{(2i-1)}{2}h$$
$$j=1,2,\ldots n,\ y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h \quad , \quad j=1,2,\ldots,n-1,\ y_{2j}=c+2jh$$

وان صيغ الخطأ(حدود التصحيح) للقواعد الثلاث المذكورة في أعلاه كالآتي :

$$I-SS(h)=A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+C_{SS}h^8+\cdots$$
$$I-MS(h)=A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+C_{MS}h^6+\cdots$$
$$I-SM(h)=A_{SM}h^2+B_{SM}h^4+C_{SM}h^6+\cdots$$

حيث ان $A_{SS},B_{SS},C_{SS},\cdots$ $A_{MS},B_{MS},C_{MS},\cdots$ $A_{SM},B_{SM},C_{SM},\cdots$ ثوابت لاتعتمد على h
وقد حصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة بعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة للتكاملات المستمرة وكانت افضل طريقة RSS .

وفي عام 2011 قدمت الباحثة ناصر[16] طرائق عددية مركبة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى وسمبسون مستخدمة تعجيلي رومبرك و ايتكن وقد اسمت هذه الطرائق بالاتي

1- طريقة AM(RM) وهي طريقة مركبة من النقطة الوسطى مع(تعجيل رومبرك على البعد الداخلي x وايتكن على البعد الخارجي y).

2 - طريقة AM(AM) وهي طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع (تعجيل ايتكن مكررة على كلا البعدين).

3 - طريقة RS(AS) وهي طريقة مركبة من قاعدة سمبسون مع (تعجيل ايتكن على البعد الداخلي x وقاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y) .

4 - طريقة AS(RS) وهي طريقة مركبة من قاعدة سمبسون مع (تعجيل رومبرك على البعد الداخلي x وقاعدة سمبسون مع تعجيل ايتكن على البعد الخارجي y) .

5 - طريقة AS(AS) وهي طريقة مركبة من قاعدة سمبسون مع(تعجيل ايتكن على البعد الداخلي x ونفسهاعلى البعدالخارجي y).

6 - طريقة AMM ويتم في هذه الطريقة حساب قيمة التكامل على البعدين باستخدام النقطة الوسطى ومن ثم استخدام تعجيل ايتكن لتحسين النتائج.

مع الغاء الاعتلال على البعد الداخلي x في الطريقة الاولى والرابعه.

ولقد قامت الباحثة بمقارنة النتائج التي حصلت عليها من الطرائق اعلاه مع بعضها ومع الطرائق التي قدمها الباحث محمد [RM(AM),RM(RM)] وكذلك الطرائق التي استخدمتها الباحثة ضياء [RS(RS),RM(RM)], وكذلك الطريقة التي استخدمتها الباحثة عكار [RMM] .وقد وجدت من خلال التكاملات التي طرحتها بان افضل هذه الطرائق المستخدمة لحل التكاملات الثنائية المستمرة هي الطرائق RM(RM), RS(RS), [RMM] وقد كان التقارب سريع للقيم الحقيقية وبدقة عالية و فترات جزئية قليلة للدوال المعرفة في منطقة التكامل .اما في حالة التكاملات المعتلة المشتقة فان الطريقة RM(RM) والطريقة RMM كانتا افضل الطرائق المستعملة. اما الطريقة RS(RS) كانت نتائجها ابطأ وبعدد مراتب عشرية اقل, اما اذا كانت الدالة معتلة في منطقة التكامل فان الطريقةRM(RM) والطريقة RMM تعطيان نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة بينما الطريقة RS(RS) كانت بطيئة جدا في الاقتراب الى القيمة الحقيقية.

اما الطرائق الاخرى كانت نوعا ما جيدة من حيث الدقة لكن تبقى الطريقةRM(RM)هي الافضل من حيث سرعةالاقتراب الى القيمة الحقيقية

اما في بحثنا هذا تناولنا طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق(القاعدة المركبة من قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y) , عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي ($h=\bar{h}$) وأسمينا القاعدة بـ TT واشتققنا الصيغة العامة لحدود التصحيح (صيغ الخطأ) للطريقة المركبة لكل حالة من حالات المكامل (مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل أو مستمرولكن معتل المشتقات في نقطة واحدة او اكثر من منطقة التكامل أو معتل في نقطة او اكثر من منطقة التكامل).

2- اشتقاق قواعد حساب التكاملات الثنائية وصيغ الخطا باستخدام قاعدة شبه المنحرف.

نستعرض الآن طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ومن ثم تطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق القاعدة المركبة (قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y) عندما n (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$) مساوية إلى m (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$) بمعنى ان $\left(h=\bar{h}\right)$. وسنرمزللطريقة بالرمز RTT حيث ان R تشير لطريقة تعجيل رومبرك أما TT تشيرللقاعدة المركبة من تطبيق قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y و الصيغة العامة لهذه القاعدة هي:

$$TT=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(a,c)+f(a+d)+f(b,c)+f(b,d)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a,y_i)+f(b,y_i)+f(x_i,c)+f(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\right)\Bigg]$$

حيث ان $x_i=a+ih \quad i=1,2,\cdots n-1 \qquad y_j=c+jh \quad j=1,2,\cdots n-1$

أولاً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة Double Integrals With Continuous Integrands :

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي:-

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

حيث إن $f(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$

بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=TT\left(h\right)+E\left(h\right) \qquad ...(1)$$

حيث إن $TT\left(h\right)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين, وان $E\left(h\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $TT\left(h\right)$, وان $h=\frac{(b-a)}{n}=\frac{(d-c)}{m}$.

معلوم لدينا ان قيمة التكامل الاحادي

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

بقاعدة شبه المنحرف

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_0+h)+2f(x_0+2h)+\cdots+f(x_n)\right]$$

حيث ان $h=\frac{x_n-x_0}{n}$

وان صيغة الخطا للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف هي

$$E_T(h)=-\frac{1}{12}h^2(f_n^{(1)}-f_0^{(1)})+\frac{1}{720}h^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})-\cdots \qquad \cdots(2)$$

فوكس [1]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغة (2) نحصل على

$$E_T(h)=\frac{-\left(x_n-x_0\right)}{12}h^2f^{(2)}\left(\mu_1\right)+\frac{\left(x_n-x_0\right)}{720}h^4f^{(4)}\left(\mu_2\right)+... \qquad \cdots(3)$$

حيث $\mu_i,\in\left(x_0,x_n\right)$, $i=1,2,3,...$.

فبالنسبة للتكامل الداخلي $\int_a^b f\left(x,y\right)dx$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة شبه المنحرف على البعد x و(التعامل مع yكثابت) من الصيغة :-

$$T=\int_a^b f(x,y)dx=\frac{h}{2}\left(f(a,y)+f(b,y)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y)\right)-$$

$$\frac{(b-a)}{12}h^2\frac{\partial^2 f(\mu_1,y)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_2,y)}{\partial x^4}-\frac{(b-a)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(\mu_3,y)}{\partial x^6}+\cdots \qquad \cdots(4)$$

حيث ان $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\cdots\in(a,b)$.وبمكاملة الصيغة (4) بالنسبة الى y و(التعامل مع xكثابت) نحصل على

$$TT=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a,y_i)f(b,y_i)+f(x_i,c)+f(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+$$
$$\int_c^d\left(\frac{(b-a)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(\mu_1,y)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_2,y)}{\partial x^4}-\frac{(b-a)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(\mu_3,y)}{\partial x^6}+\cdots\right)dy+$$
$$\frac{h}{2}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_{11})}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_{12})}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(a,\lambda_{13})}{\partial y^6}+\cdots\right]+$$
$$\frac{h}{2}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\lambda_{21})}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\lambda_{22})}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(b,\lambda_{23})}{\partial y^6}+\cdots\right]+$$
$$h\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,\lambda_{i+21})}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{i+22})}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(x_i,\lambda_{i+23})}{\partial y^6}+\cdots\right]\quad\cdots(5)$$

حيث ان $x_i=a+ih \quad i=1,2,\cdots n-1 \qquad y_j=c+jh \quad j=1,2,\cdots n-1$

وان $\lambda_{kl}\in(c,d)$ وان $k=1,2,3,\cdots,n+1 \qquad l=1,2,3,\cdots$

و بأستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل نحصل على

$$TT=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a,y_i)+f(b,y_i)+f(x_i,c)+f(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+$$
$$(b-a)(d-c)\left[\left(\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(\mu_1,\theta_1)}{\partial x^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f(\mu_2,\theta_2)}{\partial x^4}-\frac{h^6}{30240}\frac{\partial^6 f(\mu_3,\theta_3)}{\partial x^6}+\cdots\right]+$$
$$h^2\left[\frac{h}{2}\frac{(d-c)}{-12}\frac{\partial^2 f(a,\lambda_{11})}{\partial y^2}+\frac{h}{2}\frac{(d-c)}{-12}\frac{\partial^2 f(b,\lambda_{21})}{\partial y^2}+h\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(d-c)}{-12}\frac{\partial^2 f(x_i,\lambda_{2+i1})}{\partial y^2}\right]+$$
$$h^4\left[\frac{h}{2}\frac{(d-c)}{720}\frac{\partial^4 f(a,\lambda_{12})}{\partial y^4}+\frac{h}{2}\frac{(d-c)}{720}\frac{\partial^4 f(b,\lambda_{22})}{\partial y^4}+h\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(d-c)}{720}\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{2+i2})}{\partial y^4}\right]+\cdots$$

حيث θ_i قيم تنتمي للفترة (c,d) $\quad i=1,2,3,\cdots$ هذا يعني ان قيمة TT تصبح

$$\boxed{\begin{aligned}&TT=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(a,c)+f(a+d)+f(b,c)+f(b,d)+\\&2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a,y_i)f(b,y_i)+f(x_i,c)+f(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+\\&A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+C_{TT}h^6+\cdots\qquad\cdots(6)\end{aligned}}$$

حيث ان A_{TT} , B_{TT} , C_{TT} .... , ثوابت تعتمد قيمها على المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة الى المتغيرين x و y ولا تعتمد على h .

ثانياً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة – معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals For Continuous Integrands With Singularity in Partial Derivatives

الحالة الاولى:- لنفرض انه لدينا التكامل

$$J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy \qquad (7)$$

حيث ان الدالة f مستمرة في منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]$ لكنها معتلة المشتقة عند النقطة (x_0,y_0) . نستطيع كتابة التكامل اعلاه بالشكل الاتي $J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=$

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

بما ان الدالة معرفة عند النقطة (x_1,y_1) اذن نستطيع نشر $f(x,y)$ باستخدام متسلسلة تايلرحول النقطة (x_1,y_1) وبذلك يكون لدينا

$$\begin{aligned}f(x,y)=\Big[&1+(x-x_1)D_x+(y-y_1)D_y+\frac{(x-x_1)^2}{2!}D_x^2+(x-x_1)(y-y_1)D_xD_y+\frac{(y-y_1)^2}{2!}D_y^2\\&+\frac{(x-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_1)^3}{3!}D_y^3+\\&\frac{(x-x_1)^4}{4!}D_x^4+\frac{(x-x_1)^3(y-y_1)}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^3}{3!}\\&D_xD_y^3+\frac{(y-y_1)^4}{4!}D_y^4+\frac{(x-x_1)^5}{5!}D_x^5+\cdots\Big]f(x_1,y_1)\end{aligned} \qquad \cdots(8)$$

وبمكاملة (8) في المنطقة $(x_0,x_1)\times(y_0,y_1)$ نحصل على

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\Big[&(x_1-x_0)(y_1-y_0)-\frac{(x_0-x_1)^2(y_1-y_0)}{2}D_x-\frac{(x_1-x_0)(y_0-y_1)^2}{2}D_y-\\&\frac{(x_0-x_1)^3(y_1-y_0)}{6}D_x^2+\frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)^2}{4}D_xD_y-\frac{(x_1-x_0)(y_0-y_1)^3}{6}D_y^2-\\&\frac{(x_0-x_1)^4(y_1-y_0)}{24}D_x^3+\frac{(x_0-x_1)^3(y_0-y_1)^2}{12}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)^3}{12}D_xD_y^2-\\&\frac{(x_1-x_0)(y_0-y_1)^4}{24}D_y^3-\frac{(x_0-x_1)^5(y_1-y_0)}{120}D_x^4+\frac{(x_0-x_1)^4(y_0-y_1)^2}{48}D_x^3D_y+\\&\frac{(x_0-x_1)^3(y_0-y_1)^3}{36}D_x^2D_y^2+\frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)^4}{48}D_xD_y^3-\frac{(x_1-x_0)(y_0-y_1)^5}{120}D_y^4\\&-\frac{(x_0-x_1)^6(y_1-y_0)}{720}D_x^5+\cdots\Big]f(x_1,y_1)\end{aligned} \qquad \cdots(9)$$

تعوض عن (y_1-y_0) بـ h وعن (x_1-x_0) بـ h وكذلك عن (x_0-x_1) وعن (y_0-y_1) بـ $-h$ نجد ان

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy = \Big[h^2 - \frac{h^3}{2}D_x - \frac{h^3}{2}D_y + \frac{h^4}{6}D_x^2 + \frac{h^4}{4}D_xD_y + \frac{h^4}{6}D_y^2 - \frac{h^5}{24}D_x^3 - \frac{h^5}{12}D_x^2D_y - \frac{h^5}{12}D_xD_y^2$$
$$- \frac{h^5}{24}D_y^3 + \frac{h^6}{120}D_x^4 + \frac{h^6}{48}D_x^3D_y + \frac{h^6}{36}D_x^2D_y^2 + \frac{h^6}{48}D_xD_y^3 + \frac{h^6}{120}D_y^4 - \frac{h^7}{720}D_x^5 - \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(10)$$

الان نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_0 في الصيغة (8) نحصل على

$$f(x_0,y_0) = \Big[1 + (x_0-x_1)D_x + (y_0-y_1)D_y + \frac{(x_0-x_1)^2}{2}D_x^2 + (x_0-x_1)(y_0-y_1)D_xD_y + \frac{(y_0-y_1)^2}{2}D_y^2$$
$$+ \frac{(x_0-x_1)^3}{6}D_x^3 + \frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)}{2}D_x^2D_y + \frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)^2}{2}D_xD_y^2 + \frac{(y_0-y_1)^3}{6}D_y^3 + \frac{(x_0-x_1)^4}{24}$$
$$D_x^4 + \frac{(x_0-x_1)^3(y_0-y_1)}{6}D_x^3D_y + \frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)^2}{4}D_x^2D_y^2 + \frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)^3}{6}D_xD_y^3 + \frac{(y_0-y_1)^4}{24}$$
$$D_y^4 + \frac{(x_0-x_1)^5}{120}D_x^5 + \frac{(x_0-x_1)^4(y_0-y_1)}{24}D_x^4D_y + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(11)$$

وكذلك نعوض عن x بـ x_1 وعن y بـ y_0 في الصيغة (8) نجد ان

$$f(x_1,y_0) = \Big[1 + (y_0-y_1)D_y + \frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^2 + \frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^3 + \frac{(y_0-y_1)^4}{4!}D_y^4 + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(12)$$

وبالتعويض عن x بالقيمة x_0 وعن y بالقيمة y_1 في الصيغة (8) نستنتج ان

$$f(x_0,y_1) = \Big[1 + (x_0-x_1)D_x + \frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^2 + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^3 + \frac{(x_0-x_1)^4}{4!}D_x^4 + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(13)$$

وبالتعويض عن (y_0-y_1) بـ $-h$ وعن (x_0-x_1) بـ $-h$ في المعادلات (11),(12),(13)

فنحصل من المعادلة (11) على

$$f(x_0,y_0) = \Big[1 - hD_x - hD_y + \frac{h^2}{2}D_x^2 + h^2D_xD_y + \frac{h^2}{2}D_y^2 - \frac{h^3}{6}D_x^3 - \frac{h^3}{2}D_x^2D_y - \frac{h^3}{2}D_xD_y^2 - \frac{h^3}{6}D_y^3$$
$$+ \frac{h^4}{24}D_x^4 + \frac{h^4}{6}D_x^3D_y + \frac{h^4}{4}D_x^2D_y^2 + \frac{h^4}{6}D_xD_y^3 + \frac{h^4}{24}D_y^4 - \frac{h^5}{120}D_x^5 - \frac{h^5}{24}D_x^4D_y - \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(14)$$

وكذلك نحصل من المعادلة (12) على

$$f(x_1,y_0) = \Big[1 - hD_y + \frac{h^2}{2!}D_y^2 - \frac{h^3}{3!}D_y^3 + \frac{h^4}{4!}D_y^4 - \frac{h^5}{5!}D_y^5 + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(15)$$

ايضا نحصل من المعادلة (13)على

$$f(x_0,y_1) = \Big[1 - hD_x + \frac{h^2}{2!}D_x^2 - \frac{h^3}{3!}D_x^3 + \frac{h^4}{4!}D_x^4 - \frac{h^5}{5!}D_x^5 + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(16)$$

بضرب المعادلات (14),(15),(16) بـ $-\frac{h^2}{4}$ وجمعها مع المعادلة (10)نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\big[f(x_0,y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_1,y_0) + f(x_1,y_1)\big] +$$
$$\Big[h^4\left(\tfrac{-1}{12}D_x^2 + \tfrac{-1}{12}D_x^2\right) + h^5\left(\tfrac{1}{24}D_x^3 + \tfrac{1}{24}D_x^2D_y + \tfrac{1}{24}D_xD_y^2 + \tfrac{1}{24}D_y^3\right) + h^6\left(\tfrac{1}{80}D_x^4 + \cdots\right) + \cdots\Big] f(x_1,y_1) \quad \cdots(17)$$

المعادلة(17)تمثل قيمة التكامل بقاعدة شبه المنحرف على البعدين y , x في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$ وبضمنها صيغة الخطأ (حدود التصحيح) حول النقطة (x_1,y_1) .اما بالنسبة للتكاملات الثلاث الاخرفأن المكامل مستمر المشتقة في فترات تكاملها لذلك لا توجد فيها اية مشكلة بالنسبة للاعتلال وستكون قيمها كما أسلفنا في اولا وكالاتي

$$\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_0,y_i)+f(x_0,y_{i+1})+f(x_1,y_i)+f(x_1,y_{i+1})]$$
$$+A_1h^2+B_1h^4+C_1h^6+\cdots \qquad \cdots(18)$$

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_0)+f(x_i,y_1)+f(x_{i+1},y_0)+f(x_{i+1},y_1)]$$
$$+A_2h^2+B_2h^4+C_2h^6+\cdots \qquad \cdots(19)$$

$$\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}[f(x_1,y_1)+f(x_1,y_n)+f(x_n,y_1)+f(x_n,y_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_1,y_i)+f(x_n,y_i)$$
$$+f(x_i,y_1)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=2}^{n-1}f(x_i,y_j)]]+A_3h^2+B_3h^4+C_3h^6+\cdots \qquad (20)$$

حيث $A_i,B_i,C_i,\cdots$ $(i=1,2,3,\cdots)$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x,y

حيث ان $x_i=a+ih \quad i=1,2,\cdots n-1 \qquad y_j=c+jh \quad j=1,2,\cdots n-1$

وبجمع المعادلات(17),(18),(19),(20)نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg(f(x_0,y_i)+f(x_n,y_i)$$
$$f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\Bigg)\Bigg]+A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+C_{TT}h^6+\cdots+\Bigg[\frac{-h^4}{12}D_x^2+\frac{-h^4}{12}D_y^2+\frac{h^5}{24}D_x^3+$$
$$\frac{h^5}{24}D_x^2D_y+\frac{h^5}{24}D_xD_y^2+\frac{h^5}{24}D_y^3-\frac{h^6}{80}D_x^4-\frac{h^6}{48}D_x^3D_y+\cdots\Bigg]f(x_1,y_1) \qquad \cdots(21)$$

حيث $A_{TT},B_{TT},C_{TT},\cdots$ ثوابت تعتمد على قيمة المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x,y ولا تعتمد على h .لذلك:-

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_0,y_i)+\\&f(x_n,y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)]\Big]+A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+\cdots+\Bigg[h^4\left(\frac{-1}{12}D_x^2+\frac{-1}{12}D_y^2\right)\\&h^5\left(\frac{1}{24}D_x^3+\frac{1}{24}D_x^2D_y+\frac{1}{24}D_xD_y^2+\frac{1}{24}D_y^3\right)+h^6\left(\frac{1}{80}D_x^4-\frac{1}{48}D_x^3D_y\cdots\right)+\cdots\Bigg]f(x_1,y_1) \qquad \cdots(22)\end{aligned}}$$

الصيغة (22) تمثل قيمة التكامل (7) باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y متضمنة حدود التصحيح ومقدار الخطأ بسبب الاعتلال في النقطة (x_0,y_0) حول النقطة (x_1,y_1)

<u>الحالة الثانية</u> لنفرض انه لدينا التكامل

$$J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

ولنفرض ان الدالة f(x,y) مستمرة في منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0\times y_n]$ ولكن معتلة المشتقة عند النقطة (x_n,y_n) التكامل اعلاه يمكن كتابته بالشكل الاتي

$$J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=$$

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

لايجاد قيمة التكامل الاخير ننشر الدالة بمتسلسلة تايلر حول النقطة(x_{n-1},y_{n-1})

$$f(x,y)=\Big[1+(x-x_{n-1})D_x+(y-y_{n-1})D_y+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+(x-x_{n-1})(y-y_{n-1})D_xD_y$$
$$+\frac{(y-y_{n-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_{n-1})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_{n-1})^2}{2!}$$
$$D_xD_y^2+\frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4+\frac{(x-x_{n-1})^3(y-y_{n-1})}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_{n-1})^2}{2!2!}$$
$$D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_{n-1})^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y-y_{n-1})^4}{4!}D_y^4+\frac{(x-x_{n-1})^5}{5!}D_x^5+\cdots\Big]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(23)$$

و باخذ التكامل اولاً بالنسبة للمتغير xوالمحدد بالفترة$[x_{n-1},x_n]$ ثم بالنسبة للمتغير y والمحدد بالفترة $[y_{n-1},y_n]$ للمعادلة (23) فنحصل على

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=\Big[(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})}{2}D_x+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^2}{2}D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_n-y_{n-1})}{6}D_x^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})^2}{4}D_xD_y$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^3}{6}D_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^4(y_n-y_{n-1})}{24}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_n-y_{n-1})^2}{12}D_x^2D_y$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})^3}{12}D_xD_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^5(y_n-y_{n-1})}{120}D_x^4$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^4(y_n-y_{n-1})^2}{48}D_x^3D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_n-y_{n-1})^3}{36}D_x^2D_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})^4}{48}$$
$$D_xD_y^3+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^5}{120}D_y^4+\frac{(x_n-x_{n-1})^6(y_n-y_{n-1})}{720}D_x^5+\cdots\Big]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(24)$$

وبالتعويض عن كل من (x_n-x_{n-1}) و(y_n-y_{n-1}) بـ h نحصل على

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=\Big[h^2+\frac{h^3}{2}D_x+\frac{h^3}{2}D_y+\frac{h^4}{6}D_x^2+\frac{h^4}{4}D_xD_y+\frac{h^4}{6}D_y^2+\frac{h^5}{24}D_x^3+\frac{h^5}{12}D_x^2D_y$$
$$+\frac{h^5}{12}D_xD_y^2+\frac{h^5}{24}D_y^3+\frac{h^6}{120}D_x^4+\frac{h^6}{48}D_x^3D_y+\frac{h^6}{36}D_x^2D_y^2+\frac{h^6}{48}D_xD_y^3+\frac{h^6}{120}D_y^4+\frac{h^7}{720}D_x^5+\frac{h^7}{240}$$
$$D_x^4D_y+\frac{h^7}{144}D_x^3D_y^2+\frac{h^7}{144}D_x^2D_y^3+\frac{h^7}{240}D_xD_y^4+\frac{h^7}{720}D_y^5+\cdots\Big]f(x_1,y_1) \qquad \cdots(25)$$

الان نعوض عن x بـ x_n وعن yبـ y_n في المعادلة(23) نحصل على

$$f(x_n,y_n)=\Bigg[1+(x_n-x_{n-1})D_x+(y_n-y_{n-1})D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})$$
$$D_xD_y+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})}{2!}D_x^2D_y$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_n-y_{n-1})}{3!}$$
$$D_x^3D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{n-1})^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{4!}D_y^4$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^5}{5!}D_x^5+\cdots\Bigg]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(26)$$

وبالتعويض عن x بـx_{n-1} وعن yبـy_n في المعادلة (23) نحصل على

$$f(x_{n-1},y_n)=\left[1+(y_n-y_{n-1})D_y+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{4!}D_y^4+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad (27)$$

وبالتعويض عن x بـ x_n وعن y بـy_{n-1} في المعادلة (23) نحصل على

$$f(x_n,y_{n-1})=\left[1+(x_n-x_{n-1})D_x+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad (28)$$

كذلك نعوض عن كل من (y_n-y_{n-1})و (x_n-x_{n-1})بـ h في كل من المعادلات (28),(27),(26) .

فنحصل من المعادلة (26) على

$$f(x_n,y_n)=\Bigg[1+hD_x+hD_y+\frac{h^2}{2!}D_x^2+h^2D_xD_y+\frac{h^2}{2!}D_y^2+\frac{h^3}{3!}D_x^3+\frac{h^3}{2!}D_x^2D_y+\frac{h^3}{2!}D_xD_y^2$$
$$+\frac{h^3}{3!}D_y^3+\frac{h^4}{4!}D_x^4+\frac{h^4}{3!}D_x^3D_y+\frac{h^4}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{h^4}{3!}D_xD_y^3+\frac{h^4}{4!}D_y^4+\frac{h^5}{5!}D_x^5+\frac{h^5}{4!}D_x^4D_y+\frac{h^5}{3!2!}$$
$$D_x^3D_y^2+\frac{h^5}{2!3!}D_x^2D_y^3+\cdots\Bigg]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(29)$$

ومن المعادلة(27)على

$$f(x_{n-1},y_n)=\left[1+hD_y+\frac{h^2}{2!}D_y^2+\frac{h^3}{3!}D_y^3+\frac{h^4}{4!}D_y^4+\frac{h^5}{5!}D_y^5+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(30)$$

ومن المعادلة (28) على

$$f(x_n,y_{n-1})=\left[1+hD_x+\frac{h^2}{2!}D_x^2+\frac{h^3}{3!}D_x^3+\frac{h^4}{4!}D_x^4+\frac{h^5}{5!}D_x^5+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(31)$$

وبضرب المعادلات(29).(30),(31)بـ $\frac{-h^2}{4}$ وجمعها مع المعادلة (25)فنحصل على

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_n)+f(x_n,y_{n-1})+f(x_{n-1},y_{n-1})\right]+$$
$$\left[-\frac{h^4}{12}\left(D_x^2+D_y^2\right)-\frac{h^5}{24}\left(D_x^3+D_x^2D_y+D_xD_y^2+D_y^3\right)+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(32)$$

اما بالنسبة للتكاملات الثلاث الاخر فان مكاملها مستمر المشتقات الجزئية في فترات تكاملها لذلك فان

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\Bigg[f(x_0,y_0)+f(x_{n-1},y_0)+f(x_0,y_{n-1})+f(x_{n-1},y_{n-1})+$$

$$2\sum_{i=1}^{n-2}\left(f(x_0,y_i)+f(x_{n-1},y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_{n-1})+2\sum_{j=1}^{n-2} f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+A_1h^2+B_1h^4+\cdots \qquad (33)$$

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy = \int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{i=0}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n-2}\big(f(x_i,y_{n-1})+f(x_i,y_n)+f(x_{i+1},y_{n-1})$$

$$+f(x_{i+1},y_n)\big)+A_2h^2+B_2h^4+C_2h^6+\cdots \qquad \cdots(34)$$

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy = \sum_{i=0}^{n-2}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n-2}\big(f(x_{n-1},y_i)+f(x_{n-1},y_{i+1})+f(x_n,y_i)$$

$$+f(x_n,y_{i+1})\big)+A_3h^2+B_3h^4+C_3h^6+\cdots \qquad \cdots(35)$$

حيث $A_i, B_i, C_i, \cdots$ وان $i=1,2,3$ هي ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x,y

وبجمع المعادلات (35),(34),(33),(32)نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\Bigg[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_0,y_i)+f(x_n,y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+\Bigg[-\frac{h^4}{12}\left(D_x^2+D_y^2\right)$$

$$-\frac{h^5}{24}\left(D_x^3+D_x^2D_y+D_xD_y^2+D_y^3\right)+\cdots\Bigg] f(x_{n-1},y_{n-1})+A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+C_{TT}h^6+\cdots \qquad \cdots(36)$$

حيث $A_{TT}, B_{TT}, C_{TT}, \cdots$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين y , x ولا تعتمد على h الصيغة (36) تمثل قيمة التكامل (7) مستخدمين قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y و متضمنة لحدود التصحيح مضافا اليها الخطأ بسبب الاعتلال في المشتقة في النقطة (x_n, y_n) حول النقطة (x_{n-1}, y_{n-1}).

الحالة الثالثة لنفرض ان لدينا التكامل
$$J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

ولنفرض ان الدالة f(x,y) مستمرة في منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0\times y_n]$ ولكن معتلة المشتقة عند النقطتين (x_n,y_n) و (x_0,y_0) التكامل اعلاه يمكن كتابته بالشكل الاتي

$$J=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy =$$

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_1}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

بالنسبة للتكامل الاول قد تمت دراسة كيفية ايجاد قيمته في الحالة الاولى وكذلك التكامل الاخير قد تم حسابه في الحالة الثانية لذلك فلسنا بحاجة الى اعادة خطوات ايجاد قيمهما وسوف ناخذ النتائج دون اعادة الاشتقاق , اما بالنسبة للتكاملات الثلاث الاخر فأن المكامل مستمر المشتقات في فترة تكاملها. وقيمها بقاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين (الداخلي والخارجي)كالاتي :-

$$1)\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy =$$

$$\frac{h^2}{4}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_0,y_i)+f(x_0,y_{i+1})+f(x_1,y_i)+f(x_1,y_{i+1})]+A_1h^2+B_1h^4+C_1h^6+\cdots \qquad \cdots(37)$$

$$2)\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_1}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\sum_{i=1}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dxdy=$$

$$\frac{h^2}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-2}[f(x_i,y_j)+f(x_i,y_{j+1})+f(x_{i+1},y_j)+f(x_{i+1},y_{i+1})]+A_2h^2+B_2h^4+C_2h^6+\cdots \qquad \cdots(38)$$

$$3)\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=\sum_{i=0}^{n-2}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=$$

$$\frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n-2}[f(x_{n-1},y_i)+f(x_{n-1},y_{i+1})+f(x_n,y_i)+f(x_n,y_{i+1})]+A_3h^2+B_3h^4+C_3h^6+\cdots \qquad \cdots(39)$$

حيث $A_i,B_i,C_i,\cdots$ وان $i=1,2,3$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x,y ولاتعتمد على h .

اما التكاملين الاول و الاخيرقيميهما هي كما اسلفنا كالاتي :-

$$1)\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_1,y_0)+f(x_1,y_1)]+$$

$$\left[\tfrac{-h^4}{12}\left(D_x^2+D_x^2\right)+\tfrac{h^5}{24}\left(D_x^3+D_x^2D_y+D_xD_y^2+D_y^3\right)+\cdots\right]f(x_1,y_1) \qquad \cdots(40)$$

$$2)\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_n)+f(x_n,y_{n-1})+f(x_{n-1},y_{n-1})\right]+$$

$$\left[-\tfrac{h^4}{12}\left(D_x^2+D_y^2\right)-\tfrac{h^5}{24}\left(D_x^3+D_x^2D_y+D_xD_y^2+D_y^3\right)+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \cdots(41)$$

وبجمع المعادلات (41),(40),(39),(38),(37)نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Big[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}\Big[f(x_0,y_i)+f(x_n,y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\Big]\Big]+\Bigg[h^4\left(\frac{-1}{12}D_x^2+\frac{-1}{12}D_y^2\right)$$
$$+h^5\left(\frac{1}{24}D_x^3+\frac{1}{24}D_x^2D_y+\frac{1}{24}D_xD_y^2+\frac{1}{24}D_y^3\right)+h^6\left(\frac{1}{80}D_x^4-\frac{h^6}{48}D_x^3D_y+\cdots\right)+\cdots\Bigg]f(x_1,y_1)+$$
$$\left[-\frac{h^4}{12}\left(D_x^2+D_y^2\right)-\frac{h^5}{24}\left(D_x^3+D_x^2D_y+D_xD_y^2+D_y^3\right)+\cdots\right]f(x_{n-1},y_{n-1})+A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+C_{TT}h^6+\cdots \qquad (42)$$

حيث $A_{TT},B_{TT},C_{TT},\cdots$ هي ثوابت تعتمد على قيمة المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين y, x ولاتعتمد على h .الصيغة (42) تمثل قيمة التكامل (7)مستخدمين قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y و متضمنة لحدود التصحيح مضافا اليها الخطأ بسبب الاعتلال في المشتقة في النقطتين (x_0,y_0), (x_n,y_n) وحول النقطتين (x_{n-1},y_{n-1})و (x_1,y_1) .

ثالثا:التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة Double Integrals With Singular Integrands

لنفرض إن مكامل التكامل الثنائي I معرف في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0,y_0). فلا يمكن تطبيق طريقة TT لانها تستعمل قيمة المكامل في النقطة (x_0,y_0) وبذلك يكون من غير الممكن استعمال الصيغة(22) .و للحصول على قيمة التكامل باستخدام القاعدة المذكورة سوف نقوم بإهمال قيمة $f(x_0,y_0)$ من القاعدة , دافييز و رابينوتز[6] وبذلك يمكن استعمال الصيغ (22) وحساب صيغ الخطأ من خلالها , وكذلك الحال إذا كانت $f(x_n,y_n)$ غير معرفة فنستخدم الصيغة(36) بعد اهمال قيمة $f(x_n,y_n)$.

رابعا: الامثلة

1. $\int_2^{2.5}\int_2^{2.5}\cos(\frac{\pi}{2}(x+y))dxdy$ وقيمته التحليلية 0.16787443368141 مقربة الى اربع عشرة مرتبة عشرية .التكامل هنا ذات مكامل مستمر

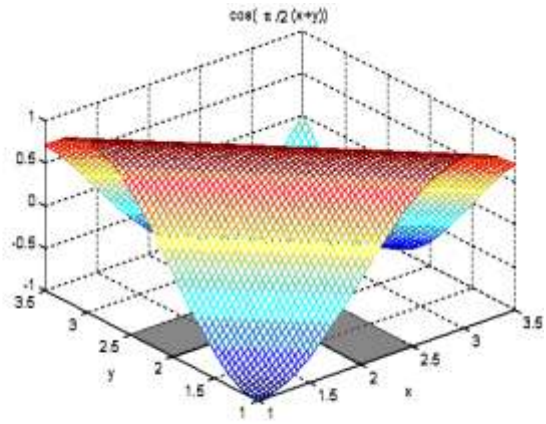
2. $\int_0^1\int_0^1\left(\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)\right)dxdy$ وقيمته التحليلية 1.14159265359 مقربة الى احدى عشرة مرتبة عشرية .التكامل هنا ذات مكامل مستمر لكن معتل المشتقات الجزئيه عندما (x,y)=(1,1)

3. $\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)dxdy$ وقيمته التحليلية 2.331980777422 مقربة الى اثنتي عشرة مرتبة عشرية .التكامل ذات مكامل معتل عندما (x,y) =(0,0) و(x,y)= (1,1)

4. $\int_1^2\int_2^3\ln(xy-2)dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية ,المكامل معتل عندما (x,y)= (2,1) .

النتائج :

في التكامل الاول $\int_2^{2.5}\int_2^{2.5}\cos(\frac{\pi}{2}(x+y))dxdy$ المكامل مستمر في كل منطقة التكامل المبين في الشكل (1) والذي قيمتة التحليلية 0.16787443368141 مقربة الى اربعة عشر مرتبة عشرية , كانت القيمة العددية كما مدونة في الجدول (1) بتطبيق القاعدة TTصحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما n=16 و بعد استعمال تعجيل رومبرك [1]على النتائج المحصل عليها بطريقة TTوباعتماد حدود التصحيح في الصيغة (6)حصلنا على قيمة صحيحة لاربعة عشر مرتبة عشرية صحيحة عندما n=16 , أي مطابقة للقيمة التحليلية مقربة الى اربع عشرة مرتبة عشرية.



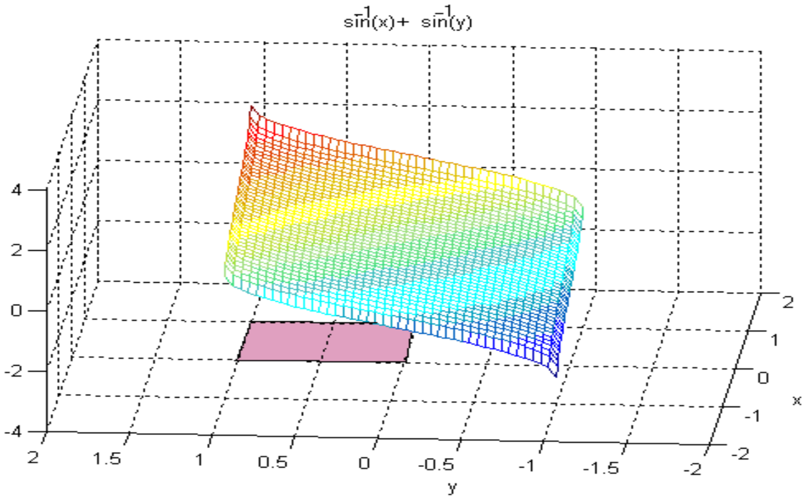
تمثيل هندسي يبين شكل الدالة $\cos(\frac{\pi}{2}(x+y))$. (1)

	TT	k=2	k=4	k=6	k=8
1	0.15088834764832				
2	0.16357644604101	0.16780581217191			
4	0.16679679378580	0.16787024303407	0.16787453842488		
8	0.16760482839724	0.16787417326772	0.16787443528330	0.16787443364613	
16	0.16780702017098	0.16787441742889	0.16787443370630	0.16787443368127	0.16787443368141
جدول(1) يبين قيمة التكامل $\int_2^{2.5}\int_2^{2.5}\cos((x+y)\frac{\pi}{2})dxdy$ باستعمال القاعدة RTT					0.16787443368141

بالنسبة للتكامل الثاني $\int_0^1\int_0^1 \left(\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)\right)dxdy$ المبين في الشكل (2)وقيمته التحليلية 1.14159265359 مقربة لاحدى عشرة مرتبة عشرية ,التكامل هنا ذات مكامل مستمرلكن معتل المشتقات الجزئيه عندما(1,1)=(x,y) كانت القيمة العددية بتطبيق القاعدة TT صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندماn=256, و بعد استعمال تعجيل رومبرك[1] على النتائج المحصلة وباعتماد حدود التصحيح في الصيغة (36)

$$E_{TT}(h)=\alpha_1 h^{1.5}+\alpha_2 h^2+\alpha_3 h^{2.5}+\alpha_4 h^{3.5}+\alpha_5 h^4+\alpha_6 h^{4.5}+\alpha_7 h^{5.5}+\alpha_8 h^6+\alpha_9 h^{6.5}+\cdots$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ ثوابت . حصلنا على احدى عشرمرتبة عشرية صحيحة عندما256 =n كما في الجدول (2).



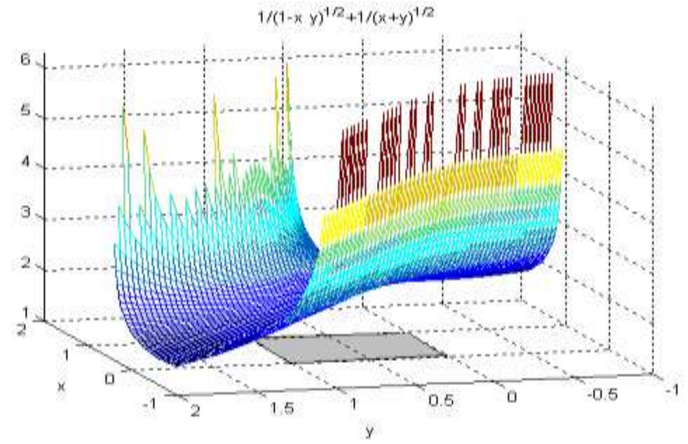
تمثيل هندسي يبين شكل الدالة $\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)$. (2)

n	TT	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3.5	k=4	k=4.5	k=5.5	k=6
1	1.96349540849								
2	1.40717170942	1.10290817518							
4	1.22941332917	1.13219404279	1.14195599866						
8	1.17114373021	1.13927502832	1.14163535684	1.14156650310					
16	1.15166883332	1.14101765854	1.14159853528	1.14159062832	1.14159296746				
32	1.14506264783	1.14144960501	1.14159358717	1.14159252463	1.14159270849	1.14159269122			
64	1.14279644055	1.14155701063	1.14159281250	1.14159264615	1.14159265793	1.14159265456	1.14159265286		
128	1.14201250969	1.14158376367	1.14159268136	1.14159265320	1.14159265388	1.14159265361	1.14159265357	1.14159265358	
256	1.14173966080	1.14159043478	1.14159265848	1.14159265357	1.14159265361	1.14159265359	1.14159265359	1.14159265359	1.14159265359
جدول(2) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1 \sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)\,dxdy$ باستعمال القاعدة RTT.									1.14159265359

بالنسبة للتكامل الثالث $\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)dxdy$ المبين في الشكل (3) . وقيمته التحليلية 2.331980777422,التكامل هنا ذات مكامل مستمرفي منطقة التكامل عدا عندما(x,y)=(1,1) و(x,y)=(0,0),كانت القيمة العددية بتطبيق القاعدة TT صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما n=512 وبعد استعمال تعجيل رومبرك [1]على النتائج المحصلة , وباعتماد حدود التصحيح في الصيغة (42)والتي صيغتها العامة

$$E_{TT}(h)=\alpha_1h^{1.5}+\alpha_2h^2+\alpha_3h^{2.5}+\alpha_4h^{3.5}+\alpha_5h^4+\alpha_6h^{4.5}+\alpha_7h^5+\alpha_8h^{5.5}+\alpha_9h^6+\alpha_{10}h^{6.5}+\cdots$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ ثوابت .حصلنا على قيمة صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية عندما n=512 كما في الجدول (3) .



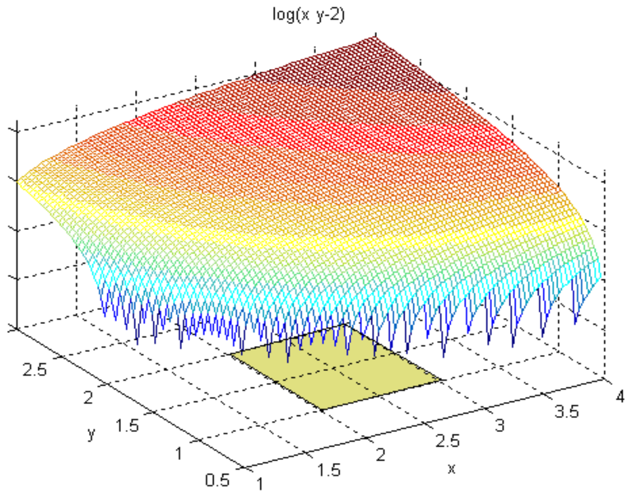
تمثيل هندسي يبين شكل الدالة $\left(\frac{1}{\sqrt{1-xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$. (3)

n	TT	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3.5	k=4	k=4.5	k=5	k=5.5	k=6
1	1.000000000000									
2	1.949906061013	2.469426936720								
4	2.219982084953	2.367691567210	2.333779777373							
8	2.298354260484	2.341217426573	2.332392713028	2.332094858667						
16	2.321625772566	2.334353385151	2.332065371343	2.331995078896	2.331985404415					
32	2.328711008533	2.332586052756	2.331996941958	2.331982247621	2.331981003522	2.331980710129				
64	2.330924002562	2.332134329185	2.331983754662	2.331980922858	2.331980794411	2.331980780471	2.331980783723			
128	2.331632227653	2.332019568818	2.331981315362	2.331980791554	2.331980778823	2.331980777784	2.331980777660	2.331980777464		
256	2.331863862255	2.331990547425	2.331980873627	2.331980778770	2.331980777530	2.331980777444	2.331980777428	2.331980777421	2.331980777420	
512	2.331941028910	2.331983232756	2.331980794533	2.331980777548	2.331980777430	2.331980777423	2.331980777422	2.331980777422	2.331980777422	2.331980777422
جدول (3) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)dxdy$ باستعمال القاعدة RTT										2.331980777422

بالنسبة للتكامل الرابع $\int_{1}^{2}\int_{2}^{3}\ln(xy-2)dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية,والمبين في الشكل (4),التكامل هنا ذات مكامل مستمر قي منطقة التكامل عدا عندما $(x,y)=(2,1)$, وكانت القيمة العددية بتطبيق القاعدة TT تقترب من مقدار معين (تناقصا), ولاحظنا ان القيمة تماثلت لخمس مراتب عشرية (0.40552) عندما n=256 وn=512 وn=1024 وn=2048 وبعد استعمال تعجيل رومبرك [1]على النتائج المحصلة وباعتماد حدود التصحيح في الصيغة (22) والتي كانت

$$E_{TT}(h)=\alpha_1 h^2+\alpha_2 h^4+\alpha_3 h^5+\alpha_4 h^6+\alpha_5 h^7+\alpha_6 h^8+\cdots$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ ثوابت . حصلنا على الاقل تسع مراتب عشرية صحيحة عندما n=2048 وذلك باحتساب الخطأ النسبي $\left|\frac{RTT(h_2)-RTT(h_1)}{RTT(h_1)}\right|$بـ$(10^{-11})$ وذلك بمقارنة القيمة التالية $RTT(h_2)$ مع القيمة التي تسبقها في الصف نفسه من جدول رومبرك .ومن ذلك نعرف ان قيمة التكامل في اعلاه هي صحيحة على الاقل لتسع مراتب عشرية(0.405519329) لتماثل الاعداد الاخيرة لتسع مراتب عشرية في الصف الاخير عندما n=1024 ولتسع اعمدة . كما في الجدول (4).



تمثيل هندسي يبين شكل الدالة $\ln(xy-2)$. (4)

n	TT	k=2	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13
1	0.519860385											
2	0.435088523	0.406831236										
4	0.413683217	0.406548115	0.406529240									
8	0.407860945	0.405920188	0.405878326	0.405857329								
16	0.406197459	0.405642963	0.405624482	0.405616293	0.405612467							
32	0.405714498	0.405553511	0.405547548	0.405545066	0.405543936	0.405543396						
64	0.405574846	0.405528296	0.405526614	0.405525939	0.405525636	0.405525491	0.405525421					
128	0.405534926	0.405521619	0.405521174	0.405520999	0.405520921	0.405520883	0.405520865	0.405520856				
256	0.405523659	0.405519904	0.405519789	0.405519744	0.405519725	0.405519715	0.405519711	0.405519708	0.405519707			
512	0.405520516	0.405519469	0.405519440	0.405519428	0.405519423	0.405519421	0.405519420	0.405519419	0.405519419	0.405519419		
1024	0.405519648	0.405519359	0.405519352	0.405519349	0.405519348	0.405519347	0.405519347	0.405519347	0.405519347	0.405519347	0.405519347	
2048	0.405519411	0.405519332	0.405519330	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329	0.405519329

جدول (4) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_{1}^{2}\int_{2}^{3}\ln(xy-2)dxdy$ بطريقة RTT

ملاحظة

لقد اضفنا اسفل كل جدول من الجداول في اعلاه حقل اوردنا فيه القيمة التحليلية وذلك لسهولة المقارنة والمطابقة

المناقشة

نستنتج من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثنائية بالقاعدة المذكورة (TT) إن هذه القاعدة تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية بدون استعمال الطريقة التعجيلية عليها كما يظهر ذلك بوضوح أكثر في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل.

وكذلك ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل ,على سبيل المثال ,في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما $m = n = 16, m = n = 8$ بقاعدة TT,وفي التكامل الثاني المعتل المشتقات الجزئية عند النقطة(1,1)حصلنا على ثلاث مراتب عشرية صحيحة عندما $m = n = 128, m = n = 256$ باستخدام القاعدةTT .

وكذلك حصلنا عدد من المراتب الصحيحة في حالة التكاملات المعتلة في نقطة او اكثر من منطقة التكامل كما في التكامل الثالث حصلنا عندما $m = n = 128, 256, 512$ على ثلاث مراتب عشرية صحيحة عند استعمال القاعدة TT. وفي التكامل الرابع حصلنا عندما $m = n = 256, 512, 1024, 2048$ على خمس مراتب عشرية صحيحة ايضا عند استعمال القاعدة TT.

إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال استخدام تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب الى القيم التحليلية بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً,.إذ كانت صحيحة لاربعة عشر مرتبة عشرية بطريقة RTTبالنسبة للتكامل الاول . وكذلك في حالة التكاملات ذات المكاملات المستمرة لكن معتلة المشتقات الجزئية او المكاملات المعتلة ففي التكامل الثاني حصلنا باستخدام طريقة RTT على احدى عشر مرتبة عشرية صحيحة , وفي التكامل الثالث حيث المكامل معتل حصلنا على اثنتي عشر مرتبة عشرية صحيحة عندما $m = n = 512$ باستعمال القاعدة المذكورة,وفي التكامل الرابع غير المعروف القيمة التحليلية والمعتل حصلنا على قيمة تقريبية للتكامل صحيحة على الاقل لتسع مراتب عشرية. وقد أوضحت الجداول إن طريقة تعجيل رومبرك ذات أهمية كبيرة في تعجيل اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكاملات وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقة RTT في حساب التكاملات الثنائية مهما كان سلوك المكامل في منطقة التكامل .

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands",comput. J.10, pp. 87-93,1967 .

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function ", the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[4] Mohammed A. H. ,"Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7, No.3 , pp. 21-28 , 2002 .

[5] Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009

[6] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[7] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi, pp 5-7 , 2008

[8] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[9] الطائي , علية شاني , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " , رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2005 .

[10] بوردين , ريتشارد ودوكلاس فاريز, " التحليل العددي " ,مديرية دار الكتب للطباعة و النشر , ترجمة خالد احمد السامرائي كلية التربية للبنات جامعة بغداد سنة 1992

[11] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[12] ضياء , عذراء محمد , " طرائق عددية لايجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009.

[13] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988

[14] محمد , علي حسن , " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة , 1984

[15] موسى ,صفاء مهدي , " تحسين النتائج لحساب التكاملات الثنائية عدديا من خلال استخدام طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى و سمبسون " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2011

[16] ناصر, رسل حسن , " المقارنة بين الطريقتين التعجيليتين ايتكن و رومبرك في حساب التكاملات عدديا" , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2011.