المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (21) 2012
ص ص [119-140]

مؤشرات الفوضى والاختبار الثنائي للأنظمة الديناميكية

د.ميسون مال الله عزيز[1]　　　منصور نغيمش فرج[2]

الملخص

إن الظواهر الفوضوية تَحصلُ على الاهتمام في كُلّ مجالاتِ المعرفةِ . في هذا البحث استعملنا تقنية الاختبار الثنائي الجديد ، اختبار الصفر– واحد للفوضى والمقترح من Gottwald and Melborne واعتمادها كأداة فعالة في اختبار فوضوية المنظومات الحركية (الديناميكية) ولكلا الحالتين المتقطعة والمستمرة. في الماضي كانت هناك بعض الأدوات للتمييز بين الأنظمة الديناميكية الحتمية المنتظمة والفوضوية مثل رسم السلسلة الزمنية ، رسم فضاء الطور ، مخططات التشعب ، قوى لابنوف وغيرها. إن هذه الأدوات مفيدة جدا ، لكنها ليست كافية للتمييز بدقة بين الأنظمة الديناميكية المنتظمة والفوضوية ، في هذا البحث تم تطبيق الاختبار الثنائي والحصول على نتائج مفيدة لتطبيق الخيمة، وتطبيق تانكيربيل، تطبيق هينون، منظومة لورنز ومن خلال دراسة سلوك هذه التطبيقات بهذه الأدوات ، ومقارنتها بالاختبار الثنائي ، فأنه يلاحظ أن النتائج التي تم الحصول عليها بالاختبار الثنائي مقنعه جدا وبالغة الأهمية.

Indicators of Chaos and Binary Test for Dynamical Systems

Abstract

Chaotic phenomena are getting interest in all spheres of knowledge . In this paper, we use a new binary technical test, the 0-1 test for chaos , due to Gottwald & Melborne and adopt an effective tool in testing the chaotic dynamic systems for both discrete dynamical

[1] - أستاذ مساعد/قسم الرياضيات/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات-جامعة الموصل
[2] - مدرس مساعد/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات-جامعة الموصل

تاريخ التسليم 2011/8/23 ــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول 2011/9/7

system and continuous dynamical system . In the past there were certain tools to identify regular and chaos in deterministic dynamical system such as time series curves , phase plots , bifurcation diagrams , lyapunov exponent etc. these tools though very powerful , are not sufficient to differentiate regular and chaos SYSTEMS . In this paper, the binary test has been discussed and its application has been shown with satisfactory results . The Tent map, Tinkerbell map, Henon map, Lorenz system have been studied and their behavior has been observed with respect to these tools and a comparison of binary test with these tools has been done .It has been found that the results obtained by the binary test are quite satisfactory and significant .

1- المقدمة Introduction

يعد موضوع تحليل الأنظمة الديناميكية اللاخطية من المواضيع الإحصائية المهمة التي تتناول سلوك الظواهر وتفسيرها عبر حقب محدودة ومن أهداف تحليل الأنظمة الديناميكية هي الحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة بالعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية لتفسير سلوك السلسلة الزمنية واستخدام النتائج للتكهن والتنبؤ بسلوك السلسلة الزمنية في المستقبل ولتحقيق ذلك يتطلب الأمر دراسة وافية لبيان فيما إذا كانت السلسلة الزمنية اللاخطية فوضوية أم لا حيث إن من مساوئ الفوضى هو فقدان التنبؤ. من المعلوم أن الأنظمة الديناميكية الفوضوية لها خاصيتان [5] : الحساسية للقيم الابتدائية واللانظامية للمسارات ، لهذا من الصعب جداً إيجاد التوقع للقيم المستقبلية للمسارات الفوضوية أي من الصعب جداً التنبؤ عن الإحصاء (السلوك في المدى البعيد) مما يؤدي إلى صعوبة بناء صيغة لدالة احتمال صريحة [6]. في الأنظمة الديناميكية اللاخطية وبدرجات حرية عالية رسم السلسلة الزمنية ، فضاء الطور ، ومخططات التشعب ، وقوى لابنوف ، ومخطط تمثيل المدار لم تكن كافية لتشخيص السلوك الفوضوي وللتغلب على هذه المسألة تم استخدام الاختبار الثنائي الذي قدمه (Gottwald and Melborne) [2]، [3]، [4] . حيث سيتم تطبيق المقاييس واختبارها على أنظمة ديناميكية متقطعة ومستمرة ، وكذلك سنقوم بتطبيق الاختبار الجديد اختبار الفوضى الثنائي وإيجاد النتائج وتوضيح الأهمية الكبيرة لهذا الاختبار .

2- اختبار الفوضى الثنائي The Binary Test for Chaos

إن الاختبار الجديد للفوضى الـذي اقترحـه Gottwald وMelborne مقارنـة بالطريقة الاعتيادية لحساب قوى لابنوف فان الاختبار الجديد يطبق مباشرة على مشاهدات السلسلة الزمنية ولا يتطلب إعادة بناء فضاء الطور(phase – space) ، المدخلات هـي بيانات السلسلة الزمنية والمخرجات هي قريبة من الصفر أو قريبة من الواحد وتعتمد فيما إذا كان النظام الديناميكي غير فوضوياً أو غير فوضوي.وكان الاختبار عامـاً وشـاملاً وقابلاً للتطبيق لأي منظومة ديناميكية محددة .

وصف اختبار الفوضى الثنائي[4]:
Description of The Binary Test for Chaos

لتكن $\phi(j)$ مشاهدات السلسلة الزمنية ،

$\phi(j)$ ، $j=1,2,\ldots\ldots T$

هناك سلسلة من الخطوات نوضحها كالأتي:

أ- لتكن $c \in (o,\pi)$ ، نحسب المتغيرات الاتجاهية

$$p_c(t)=\sum_{j=1}^{t}\phi(j)\ \cos jc \qquad , \qquad q_c(t)=\sum_{j=1}^{t}\phi(j)\ \sin jc \qquad (1)$$

$$t = 1,2,\ldots\ldots\ T$$

حيث

- $p_c(t)$ و $q_c(t)$ هي مقيدة (bounded) إذا كان النظام الديناميكي منتظماً (كمثال: دوري periodic أو شبه دوري quasi periodic)

- $p_c(t)$ و $q_c(t)$ تـسلك سـلوكاً محاذيـاً مـشابهاً للحركـة البروانية (Brownian motion) إذا كان النظام الديناميكي فوضوياً .

ب- نحسب متوسط مربع الإزاحـة (Mean – square displacement) للمتغيـرات الاتجاهية $p_c(t)$ و $q_c(t)$ المعرفة في (1) لبعض قيم c

$$M_c(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}[p_c(j+t)-p_c(j)]^2+[q_c(j+t)-q_c(j)]^2$$

وعند تمهيد (Smoothing) وتحسين متوسط مربع الإزاحة فأن

$$M_c(t)_{new}=M_c(t)_{old}-\frac{1-\cos(tc)}{1-\sin(tc)}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\phi(j)\right)^2 \qquad (2)$$

حيث أن $t<<T$ ، $t\le t_{cut}$ ، $t_{cut}<T$ ،علماً أن t_{cut} تمثل الحد الأعلى لحساب $M_c(t)$ وبصورة عملية عندما نجد $t_{cut}=T/10$ فإننا نحصل على نتائج جيدة .

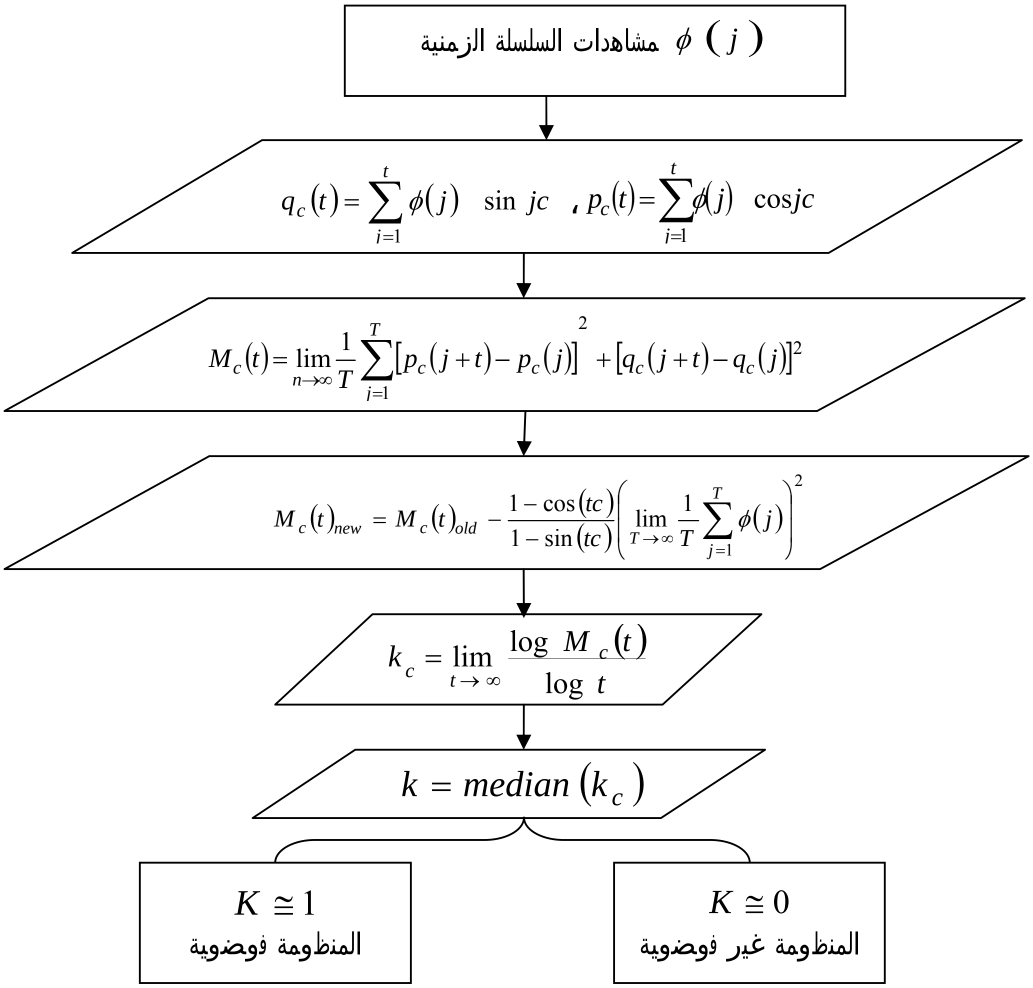
ج- متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ يكون بشكل دالة تنمو خطيا مع الزمن t إذا كان النظام الديناميكي فوضوياً بينما تكون $M_c(t)$ دالة مقيدة (bounded) مع الزمن t إذا كان النظام الديناميكي منتظماً .

د- يمكن إيجاد النمو المحاذي لمتوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ عدديا بواسطة الانحدار الخطي لـ $\log M_c(t)$ عكس $\log(t)$ والمعرف بالصيغة الاتية

$$k_c=\lim_{t\to\infty}\frac{\log M_c(t)}{\log t}$$

حيث k يمثل الوسيط لـ k_c ، إذا كان $k\cong 0$ فان النظام الديناميكي منتظم بينما إذا كان $k\cong 1$ فان النظام الديناميكي فوضوي .

المخطط الانسيابي Flow Chart



3- التطبيقات Maps

في هذا الجزء سنقوم بدراسة الفوضى لبعض التطبيقات المتقطعة والمستمرة وبإبعاد مختلفة. إن النتائج التي حصلنا عليها بواسطة المحاكاة الحاسوبية تمـت ببنـاء وتـصميم برامج في لغة MATLAB .

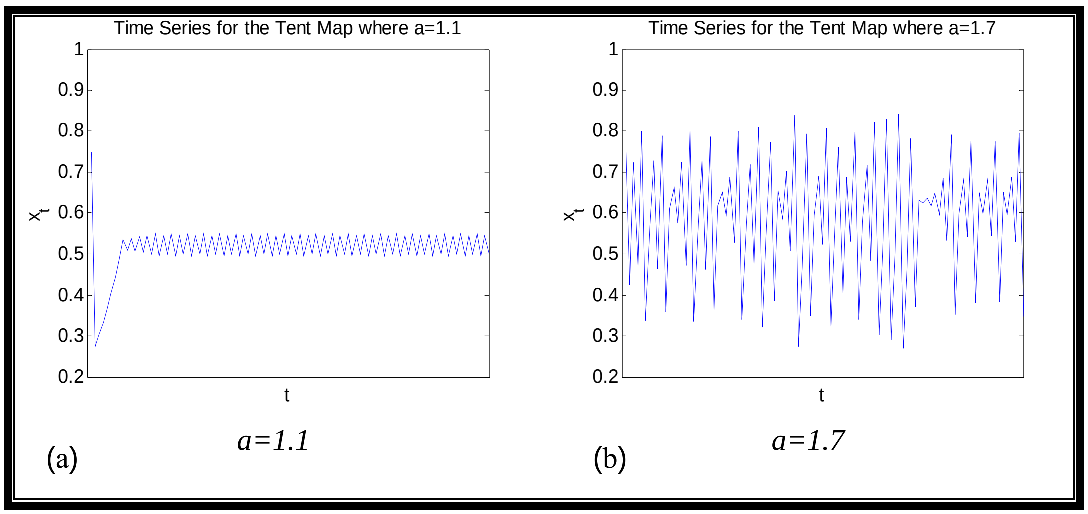
تطبيق الخيمة Tent Map [5]

تعتبر من الأنظمة الديناميكية المتقطعة ببعد واحد

$$T(x) = \begin{cases} ax & if \quad x \le 1/2 \\ ax(1-x) & if \quad x > 1/2 \end{cases} \qquad (3)$$

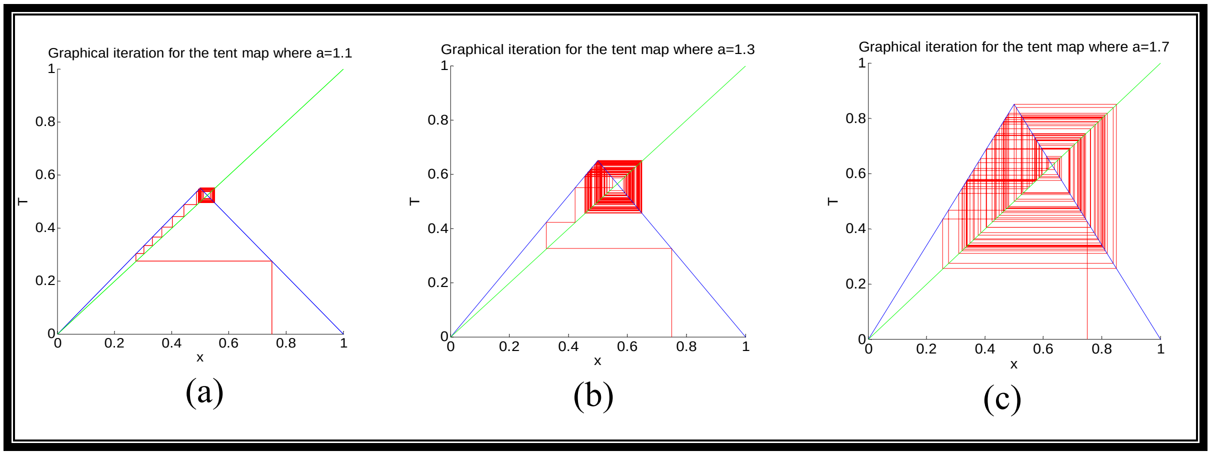
حيث $0 \le a \le 2$

عندما تكون $a > 1$ فأن قوى لابنوف $\lambda(x_1) > 0$ لكن من خلال دراستنا عن سلوك هذا التطبيق فانه يتضح عند قيم a التي اكبر بقليل من الواحد فان السلوك يبقى منتظما والذي لا يتفق وحساب قوى لابنوف (Lyapunove Exponent) ، فعلى سبيل المثال عند $a = 1.1$ فأن $\lambda(x_1) > 0$ بينما كل المؤشرات الأخرى تشير إلى أن السلوك منتظم عند هذه القيمة. في الشكل (1) نبين من خلال رسم السلسلة الزمنية للتكرارات بان السلوك منتظم عند $a = 1.1$ وفوضوي عند $a = 1.7$.



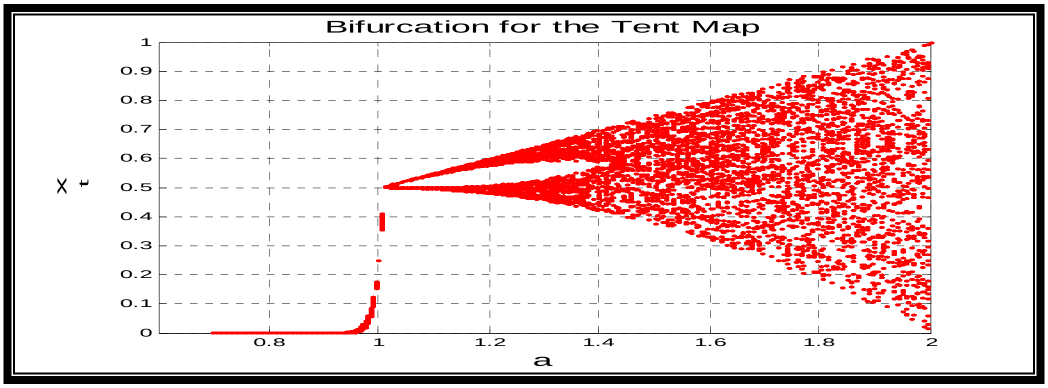
الشكل (1) : رسم السلسلة الزمنية لأول 100 تكرار لتطبيق الخيمة، (a) : يظهـر الـسلوك المنتظم لتطبيق الخيمة ، (b) : يظهر السلوك الفوضوي لتطبيق الخيمة .

ومن خلال مخطط تمثيل المدار (Cobweb) الموضح في الشكل (2) يمكن مشاهدة السلوك بصورة أفضل



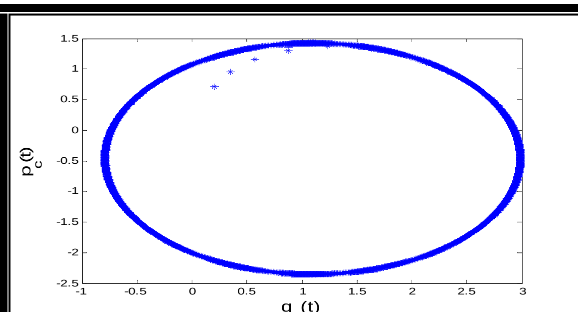
الشكل (2) : تمثيل المدار بالمخطط التكراري (Cobweb) لتطبيق الخيمة عند القيم المختلفة للمعلمة a . (a) : للمعلمة $a=1.1$ يكون السلوك دورياً . (b) : للمعلمة $a=1.3$ يكون السلوك شبه دوري . (c) : للمعلمة $a=1.7$ يكون السلوك فوضوياً .

ومما يؤكد هذه الملاحظة هو رسم وتوضيح مخططات التشعب لتطبيق الخيمة في الشكل (3) عند تغيير قيم معلمة التشعب a للفترة من 0 لغاية 2 بزيادة مقدرها 0.001 ، حيث أن السلسلة الزمنية المتولدة تتمثل في المحور العامودي بينما المحور الأفقي يمثل عائلة معلمة التشعب ، إذ يلاحظ بأن السلسلة الزمنية المتولدة من التطبيق تسلك سلوكاً دورياً عند قيمة المعلمة $a=1.1$ وان سلوكها يتغير إلى السلوك شبه المنتظم وصولاً إلى السلوك الفوضوي عندما تزداد التشعبات بتغيير قيمة معلمة التشعب a (كمثال عند قيمة المعلمة $a=1.3$ يكون السلوك شبه منتظم وفوضوي عند قيمة المعلمة $a=1.7$) .

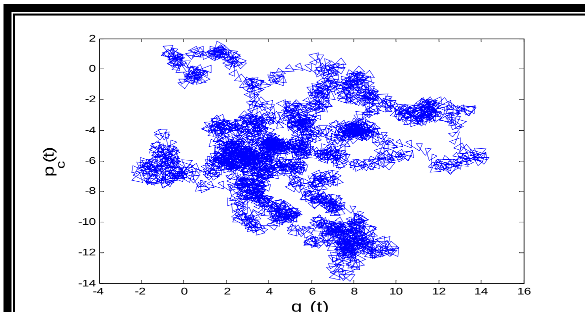


الشكل(3): مخططات التشعب لتطبيق الخيمة للقيم المختلفة للمعلمة a
$x_0 = 0.75$ $t = 1000$, $a = 0 : 0.001 : 2$

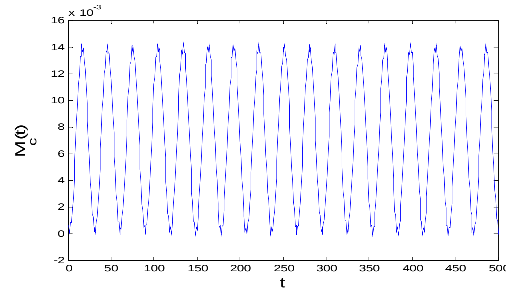
وعند تطبيق خوارزمية اختبار الفوضى الثنائي (The Binary Test for Chaos) لتطبيق الخيمة لـ 5000 من التكرارات عند قيمة المعلمة $a = 1.1$ تبين أن السلوك منتظم بالاعتماد على قيمة متغير التشخيص k حيث $K = 0.003 \cong 0$ كما مبين في الجانب الأيمن من الشكل (4) أما في الجانب الأيسر فيكون السلوك فوضوياً عند قيمة المعلمة $a = 1.7$ حيث $K = 0.996 \cong 1$.



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تكون مقيدة مع الزمن t
-a-

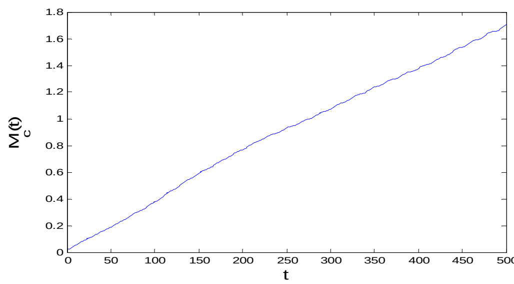


رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تسلك سلوكا محاذيا مشابها للحركة البراونية
-d-



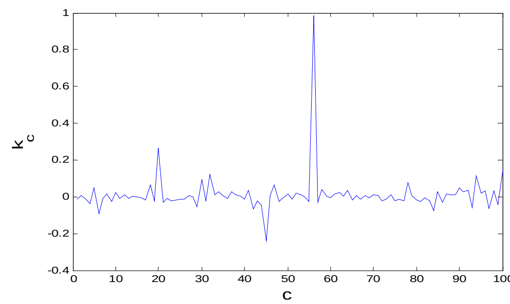
رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة مقيدة (bounded) مع الزمن t

-b-



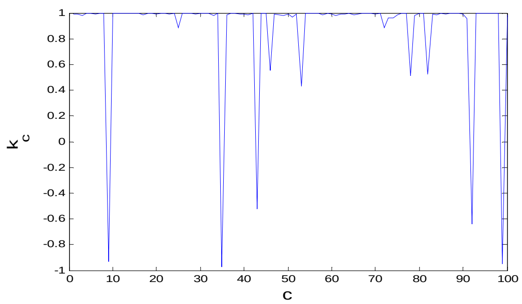
رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة تنمو خطيا مع الزمن t

-e-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c ، k_c يبقى حول الصفر

-c-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c ، k_c يبقى حول الواحد

-f-

الشكل (4): اختبار الفوضى الثنائي لتطبيق الخيمة والمقارنة بين السلوك المنتظم (c, b, a) والسلوك الفوضوي (f, e, d) .

الجدول (1) يوضح بصورة مختصرة النتائج التي تم الحصول عليها من الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق الخيمة والتي تظهر مدى دقة اختبار الفوضى الثنائي والذي يعطي نتائج أدق من حساب قوى لابنوف .

الجدول (1) : نتائج الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق الخيمة عند قيمتـين مختلفتين للمعلمة a .

التسلسل	نتائج الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى					
	معلمة التشعب	رسم السلسلة الزمنية	مخططات التشعب	تمثيل المدار	قوى لابنوف	اختبار الفوضى الثنائي
1	$a = 1.1$	منتظم	منتظم	منتظم	$\lambda(x_1) > 0$	$K \cong 0$
					فوضوي	منتظم
2	$a = 1.7$	فوضوي	فوضوي	فوضوي	$\lambda(x_1) > 0$	$K \cong 1$
					فوضوي	فوضوي

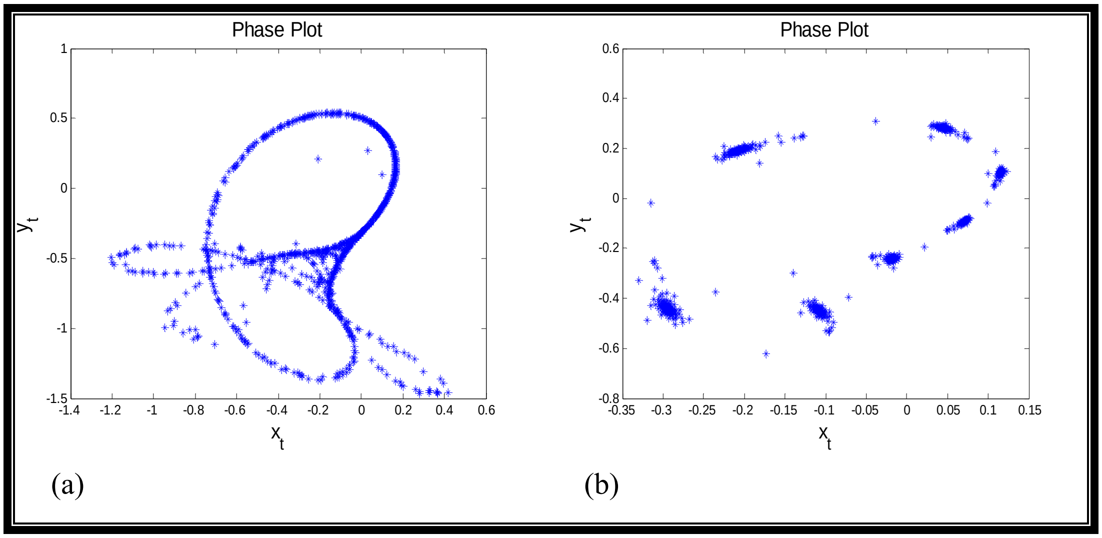
تطبيق تانكيربيل Tinkerbell Map [1]

يعد تطبيق تانكيربيل من الأنظمة الديناميكية ببعدين ذوات السلسلة الزمنية المتقطعة والتي يمكن تمثيلها بالصيغة الآتية:-

$$x_{t+1} = x_t^2 - y_t^2 + ax_t + by_t$$
$$y_{t+1} = 2x_t y_t + cx_t + dy_t \qquad (4)$$

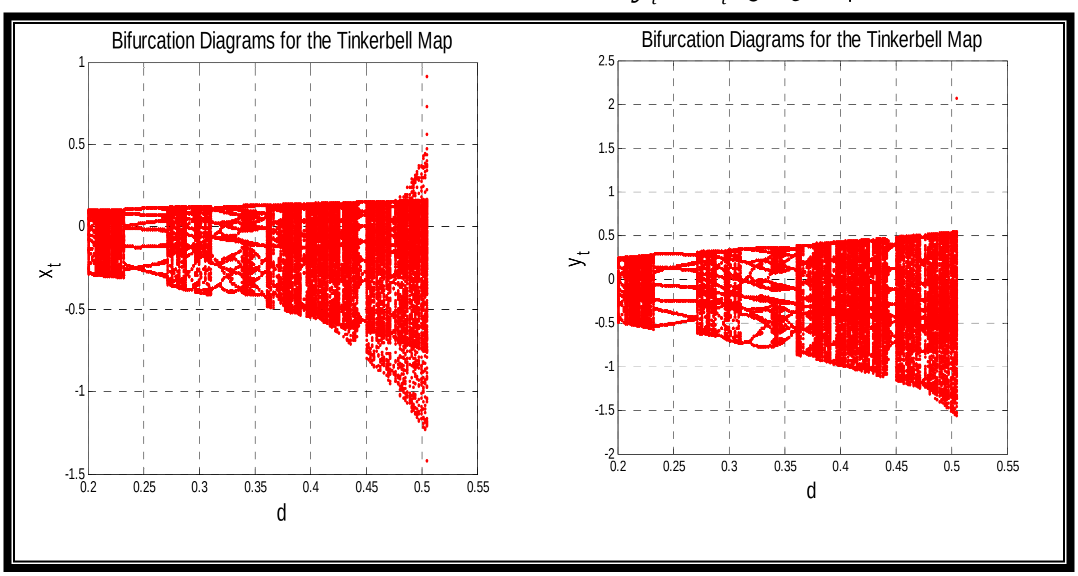
حيث a , b , c , d هي معلمات حقيقية غير صفرية .

وعندما تكون $d = 0.5$, $c = 2$, $b = -0.6$, $a = 0.9$, $t = 1000$ وللقيم الابتدائية $(x_0 , y_0) = (0.1, 0.1)$ نحصل على الجاذب الفوضوي كما موضح بالشكل (5a) بينما عند المعلمة $d = 0.27$ ولنفس القيم للمعلمات الأخرى يكون السلوك غير فوضوي كما موضح بالشكل (5b). إي أن السلوك يتغير بتغيير قيمة المعلمة d



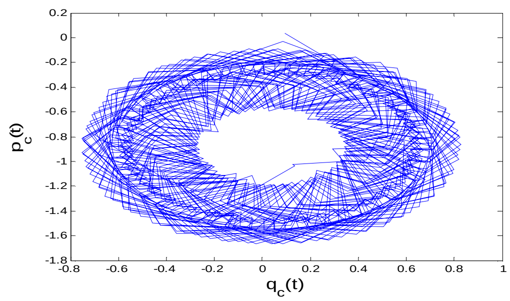
الشكل (5) : رسم فضاء الطور وملاحظة الجاذب الفوضوي لتطبيق تانكيربيل عند تغيير قيمة المعلمة d : (a) يشير إلى أن السلوك فوضوي (b) يشير إلى أن السلوك منتظم

ويمكن مشاهدة تأثير معلمة التشعب d في سلوك التطبيق في الشكل (6) من خلال رسم مخططات التشعب لكل من x_t ، y_t



الشكل (6) : مخططات التشعب لتطبيق تانكيربيـل عنـد تغييـر قيمـة المعلمـة d للفتـرة من 0.2 إلى 0.55 بزيادة مقدارها 0.001 . حيـث $a = 0.9$, $b = -0.6$, $c = 2$ $t = 1000$ $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$

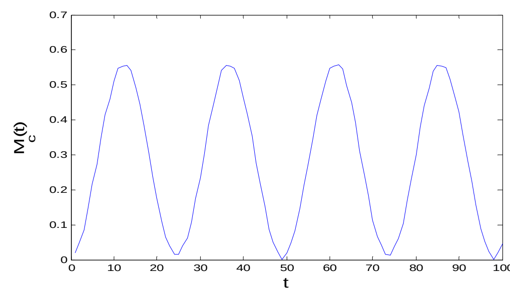
ومن اختبار الفوضى الثنائي لتطبيق تانكيربيل لـ 1000 من التكرارات عند قيمة المعلمة $d=0.27$ تبين أن السلوك منتظم بالاعتماد على قيمة متغير التشخيص k حيث $k=0.019\approx 0$ كما مبين في الجانب الأيمن من الشكل (7) بينما في الجانب الأيسر يكون السلوك فوضوياً عند قيمة المعلمة $d=0.5$ حيث $k=0.997\approx 1$.



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

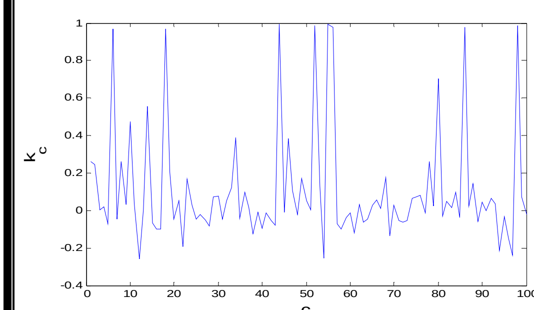
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تكون مقيدة مع الزمن t

-a-



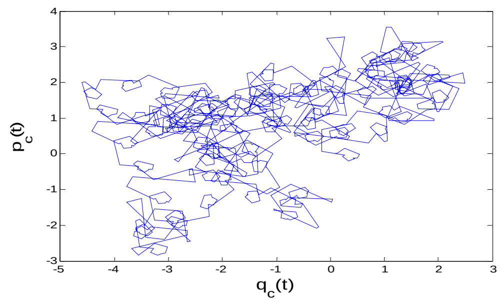
رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة مقيدة (bounded) مع الزمن t

-b-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الصفر

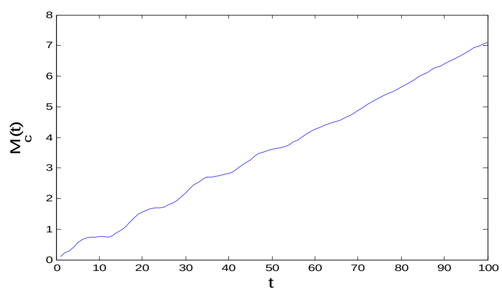
-c-



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

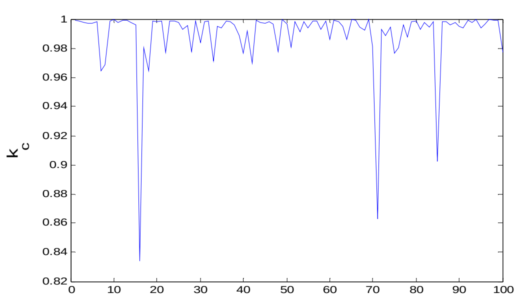
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تسلك سلوكا محاذيا مشابها للحركة البراونية

-d-



رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة تنمو خطيا مع الزمن t

-e-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الواحد

-f-

الـشكل (7): اختبـار الفوضـى الثنـائي لتطبيـق تانكيربيـل والمقارنـة بـين الـسلوك المنتظم (c, b, a) والسلوك الفوضوي (f, e, d) .

الجدول (2) يوضح بصورة مختصرة النتائج التي تم الحصول عليها من الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق تانكيربيل والتي تظهر مدى دقة اختبار الفوضى الثنائي والذي يعطي نتائج متوافقة مع مؤشرات الفوضى الأخرى .

الجدول (2) : نتائج الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق تانكيربيل عند قيمتين مختلفتين للمعلمة d .

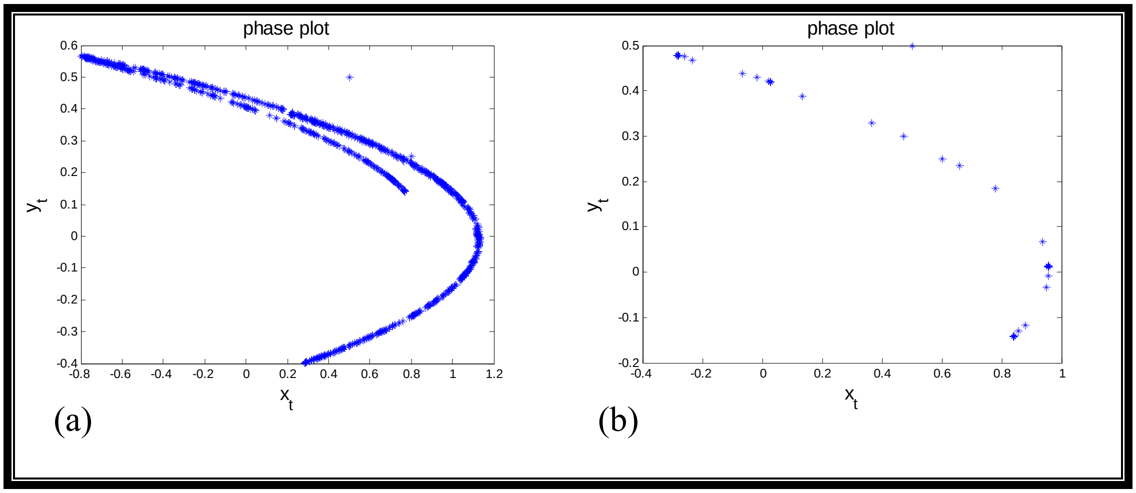
التسلسل	نتائج الاختبار الثنائي وبقية مؤشرات الفوضى				
	اختبار الفوضى الثنائي	قوى لابنوف	مخططات التشعب	فضاء الطور والسلسلة الزمنية	معلمة التشعب
1	$K \cong 0$	$\lambda_1 = -0.0033$ ، $\lambda_2 = -0.0212$	منتظم	منتظم	$d = 0.27$
	منتظم	منتظم			
2	$K \cong 1$	$\lambda_1 = 0.1942$ ، $\lambda_2 = -0.5545$	فوضوي	فوضوي	$d = 0.5$
	فوضوي	فوضوي			

تطبيق هينون Henon Map [5]

يعد تطبيق هينون من النظم الديناميكية ببعدين ذوات السلسلة الزمنية المتقطعة والمعرفة بالصيغة

$$X_{t+1} = a + bx_t^2 + cy_t$$
$$Y_{t+1} = dx_t \qquad (5)$$

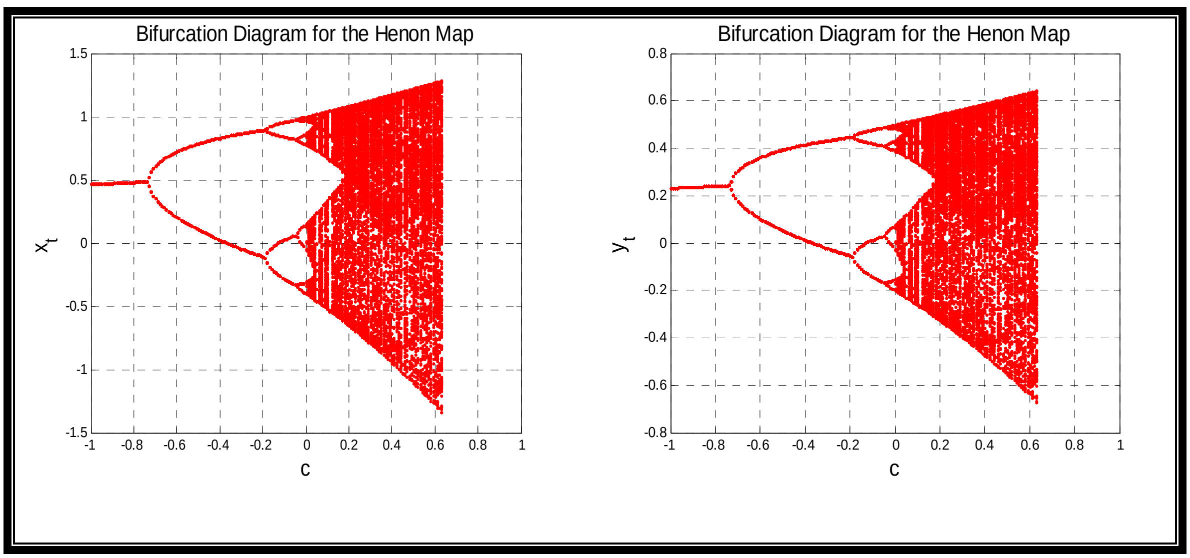
a و b هي معلمات حقيقية و c هي معلمة التشعب ، فعندما تكون قيم المعلمات $c = 0.3$, $b = -1.4$, $d = 0.5$, $t = 1000$, $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ فأن السلوك يكون فوضوياً ونحصل على الجاذب الفوضوي كما موضح بالشكل (8a) بينما عند المعلمة $c = -0.1$ ولنفس القيم للمعلمات الأخرى يكون السلوك غير فوضوي كما موضح بالشكل (8b). إي أن السلوك يتغير بتغيير قيمة المعلمة c .



الشكل (8) : رسم الطور وملاحظة الجاذب الفوضوي لتطبيق هينون عند تغيير قيمة المعلمة c:

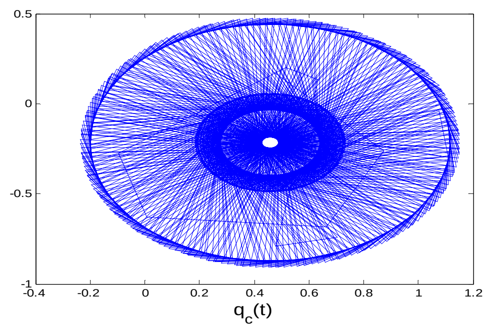
(a) يشير إلى أن السلوك فوضوي . (b) يشير إلى أن السلوك منتظم .

ويمكن مشاهدة تأثير معلمة التشعب c في السلوك في الشكل (9) من خلال رسم مخططات التشعب لكل من x_t ، y_t



الشكل (9) : مخططات التشعب لتطبيـق هينـون عنـد تغييـر قيمـة المعلمـة c للفتـرة من (-1) لغاية 1 بزيـادة مقـدارها 0.001 . حيـث $b=-1.4$, $d=0.5$, $t=1000$
$(x_0, y_0)=(0.5,0.5)$

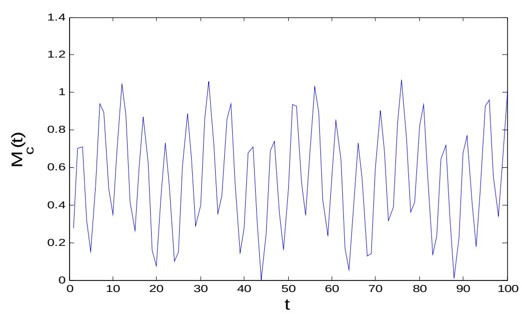
ومن اختبار الفوضى الثنائي لتطبيق هينون عند قيمة المعلمة $c=-0.1$ تبين أن السلوك منتظم بالاعتماد على قيمة متغير التشخيص k حيث $k=0.0014\approx 0$ كما مبين في الجانب الأيمن من الشكل (10) بينما في الجانب الأيسر يكون السلوك فوضوياً عنـد قيمـة المعلمة $c=0.3$ حيث $k=0.997\approx 1$



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

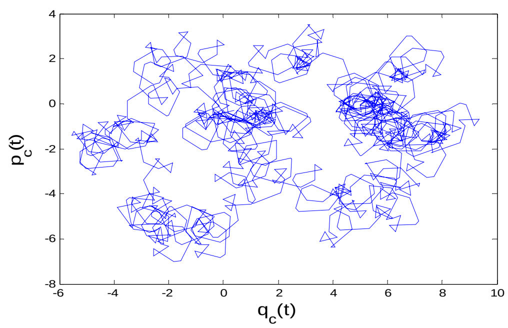
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تكون مقيدة مع الزمن t

-a-



رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة مقيدة (bounded) مع الزمن t

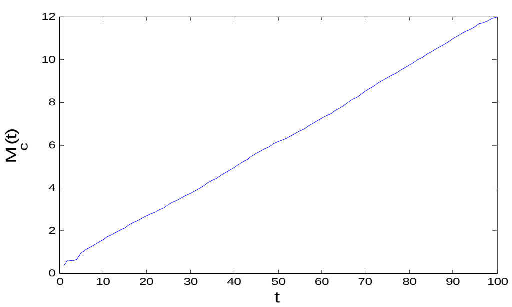
-b-



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

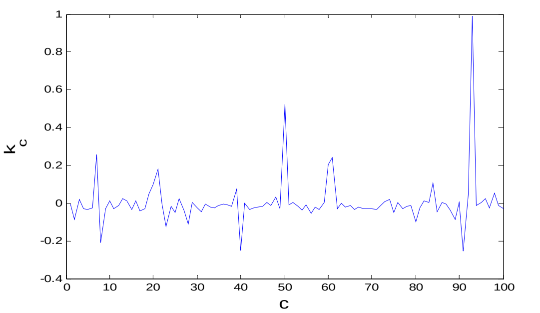
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تسلك سلوكا محاذيا مشابها للحركة البراوانية

-d-



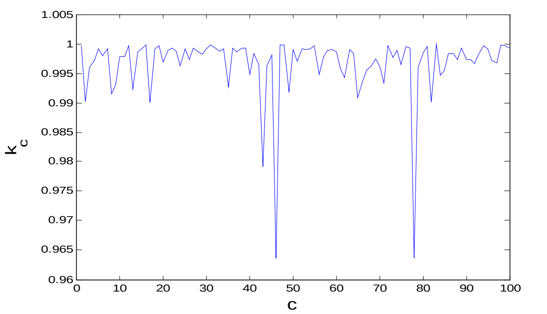
رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة تنمو خطيا مع الزمن t

-e-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الصفر

-c-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الواحد

-f-

الشكل (10): اختبار الفوضى الثنائي لتطبيق هينون والمقارنة بين السلوك المنتظم (c, b, a) والسلوك الفوضوي (f, e, d) .

الجدول (3) يوضح بصورة مختصرة النتائج التي تم الحصول عليها من الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق هينون والتي تظهر مدى دقة اختبار الفوضى الثنائي والذي يعطي نتائج متوافقة مع مؤشرات الفوضى الأخرى .

الجدول (3) : نتائج الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لتطبيق هينون عند قيمتين مختلفتين للمعلمة c .

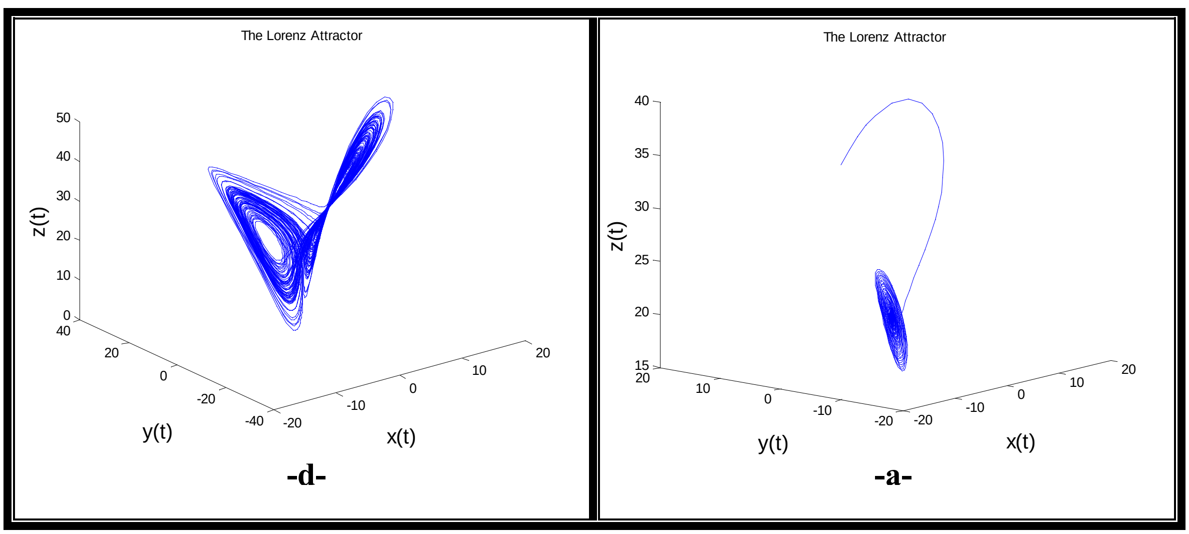
التسلسل	نتائج الاختبار الثنائي وبقية مؤشرات الفوضى				
	اختبار الفوضى الثنائي	قوى لابنوف	مخططات التشعب	فضاء الطور والسلسلة الزمنية	معلمة التشعب
1	$K\cong 0$ منتظم	$\lambda_1 = -0.3725$ $\lambda_2 = -2.6231$ منتظم	منتظم	منتظم	$c=-0.1$
2	$K\cong 1$ فوضوي	$\lambda_1 = 0.3334$ $\lambda_2 = -2.2306$ فوضوي	فوضوي	فوضوي	$c=0.3$

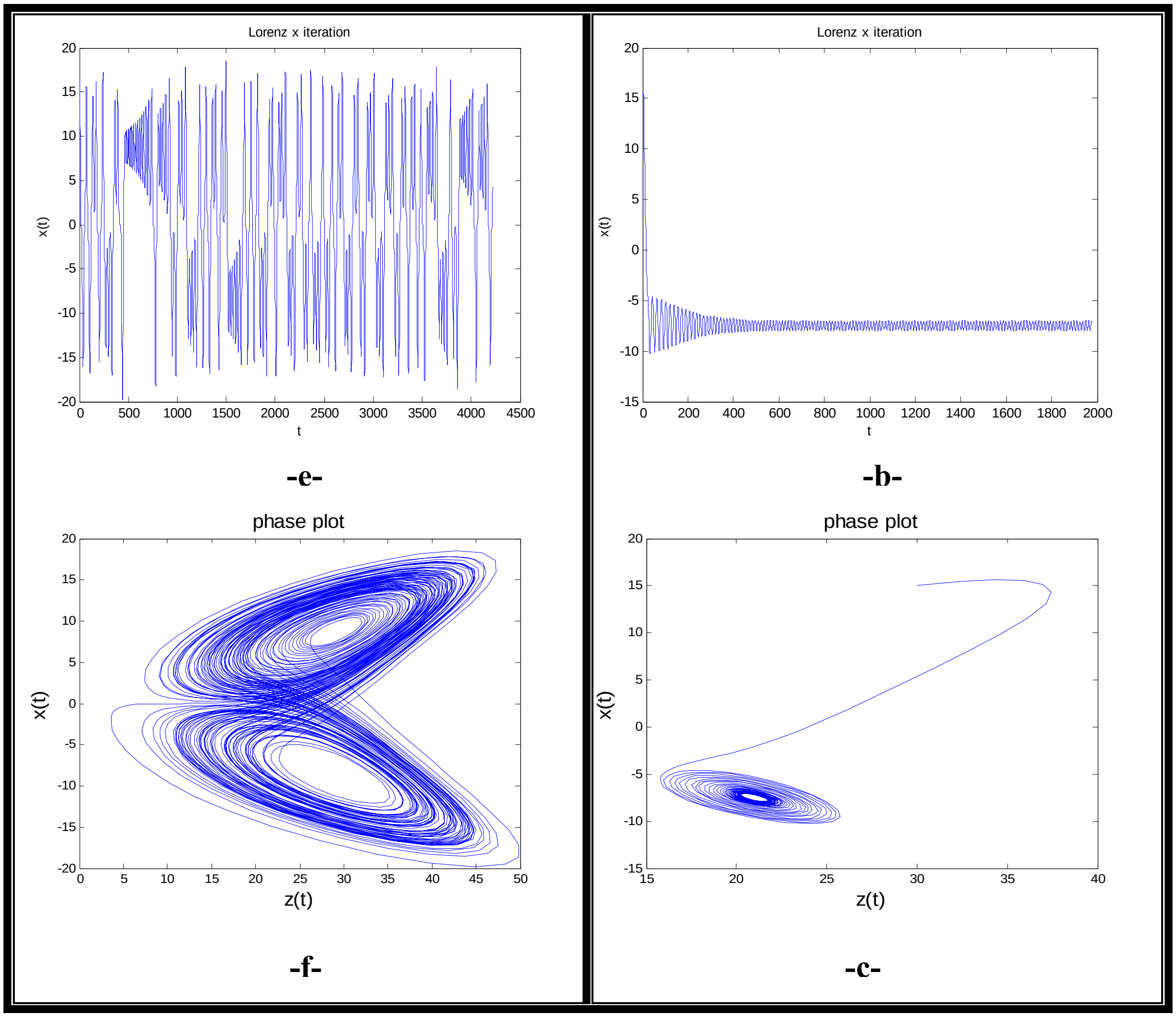
منظومة لورنز The Lorenz System [5]

تعتبر منظومة لورنز من الأنظمة الديناميكية التي يمكن تمثيلها على شكل نظام مـن المعادلات التفاضلية بثلاثة إبعاد والمعرفة بالصيغة الآتية

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz \qquad (6)$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - cz$$

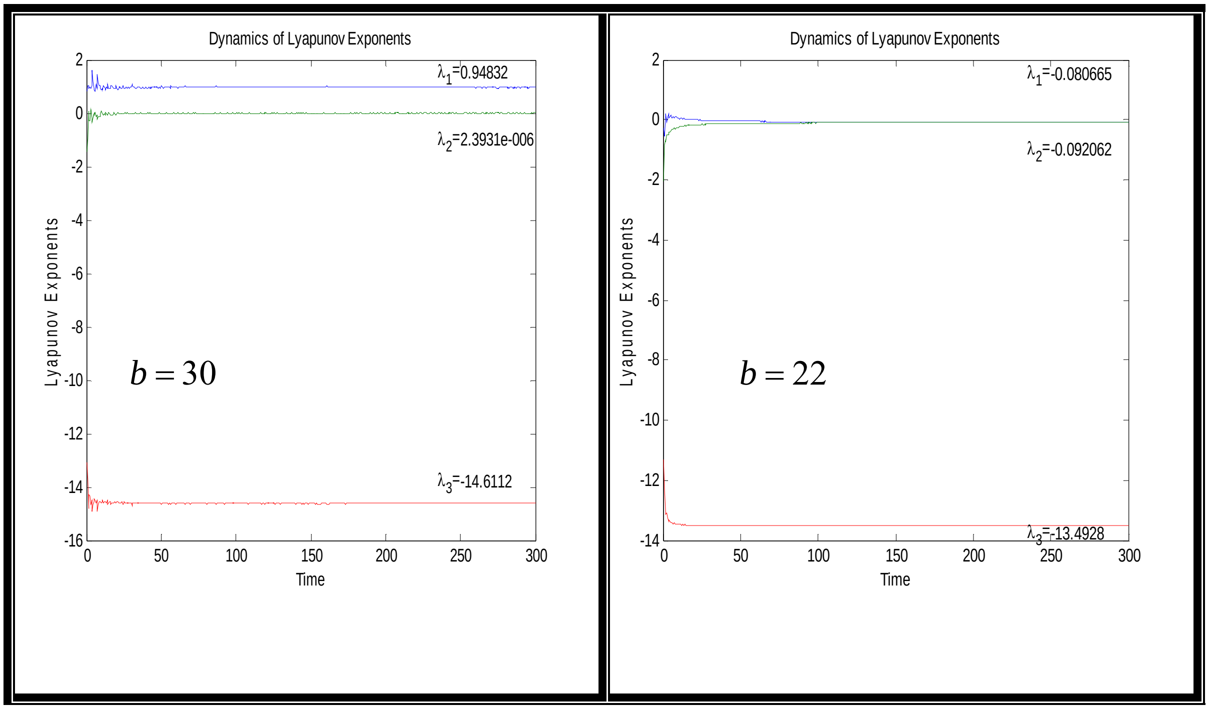
إن هذه المنظومة الديناميكية حساسة للقيم الابتدائية فعنـد قيمـة المعلمـات الثابتـة $a = 10$ ، $c = 8/3$ ، للقيم الابتدائية $(x_0, y_0, z_0) = (15, 20, 30)$ فأن سلوكها يتغير بالاعتماد على قيمة المعلمة b . يتضح بأنه عندما تكون قيمة المعلمـة $b = 22$ فان السلوك يكون منتظماً كما مبين في الجانب الأيمن من الشكل (11) بينما في الجانـب الأيسر عند قيمة المعلمة $b = 30$ فان السلوك يكون فوضوياً .





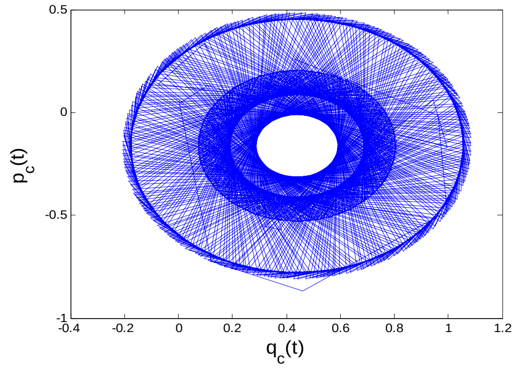
الشكل (11) : رسم فضاء الطور، السلسلة الزمنية، اسقاط الحل في المستوي xz عند القيم المختلفة للمعلمة b، يتضح الجاذب الفوضوي عندما تكون قيمة المعلمة $b = 30$.

من خلال الرسم الديناميكي لقوى لابنوف لمنظومة لورنز (6) ولنفس قيم المعلمات الثابتة إذ يتضح أيضا أن السلوك منتظم عند $b = 22$ لأن كل قوى لابنوف سالبة عند هذه القيمة ، وفوضوي عند $b = 30$ لأن بعض قوى لابنوف موجبة عند هذه القيمة . انظر الشكل (12) .



الشكل (12) : الرسم الديناميكي لقوى لابنوف لمنظومة لورنز عند القيم المختلفة للمعلمة b

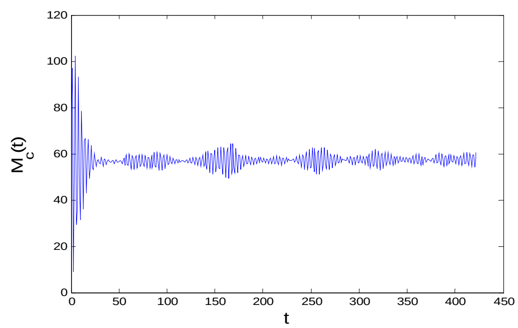
حيث من اختبار الفوضى الثنائي لمنظومة لورنز لـ $T = 5000$ ، $0 \le t \le 100$ ، $\Delta t = 0.05$ لقيم المعلمات الثابتة $a = 10$ ، $c = 8/3$ ، القيم الابتدائية $(x_0, y_0, z_0) = (15, 20, 30)$ ، عندما تكون قيمة المعلمة $b = 22$ يتضح أن السلوك منتظم بالاعتماد على قيمة متغير التشخيص k حيث $k = 0.0427 \approx 0$ كما في الجانب الأيمن من الشكل (13) بينما في الجانب الأيسر عند قيمة المعلمة $b = 30$ نحصل على $k = 0.9990 \approx 1$ وهذا يشير إلى أن السلوك فوضوي .



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

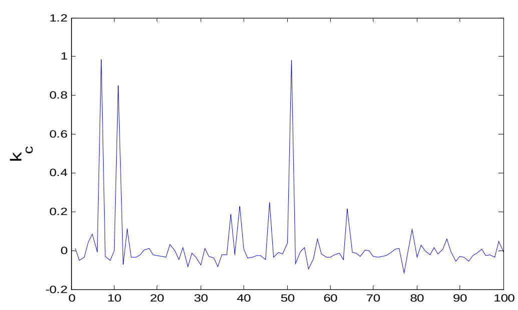
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تكون مقيدة مع الزمن t

-a-



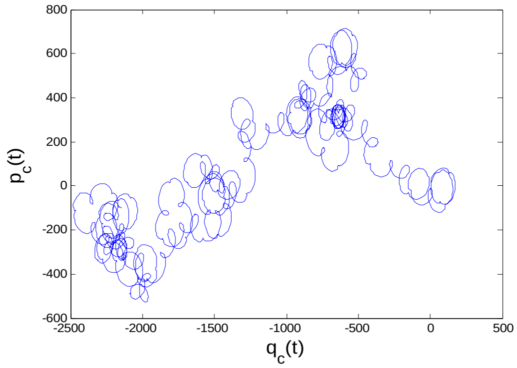
رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة مقيدة (bounded) مع الزمن t

-b-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الصفر

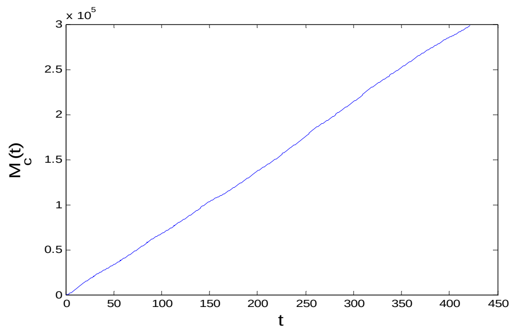
-c-



رسم $p_c(t)$ مقابل $q_c(t)$

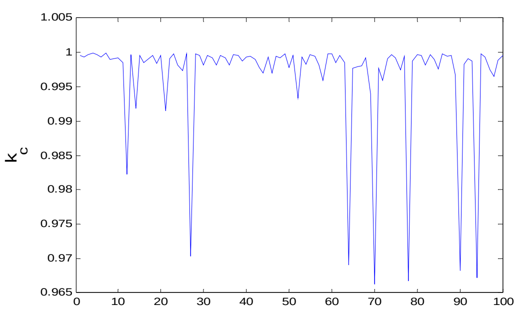
$p_c(t)$ و $q_c(t)$ تسلك سلوكا محاذيا مشابها للحركة البراونية

-d-



رسم متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ مقابل t ، متوسط مربع الإزاحة $M_c(t)$ هو دالة تنمو خطيا مع الزمن t

-e-



النمو المحاذي k_c لمتوسط مربع الإزاحة مقابل c، k_c يبقى حول الواحد

-f-

الشكل (13): اختبار الفوضـى الثنـائي لمنظومـة لـورنز (6) والمقارنـة بـين الـسلوك المنتظم (c, b, a) والسلوك الفوضوي (f, e, d) .

الجدول (4) يوضح بصورة مختصرة النتائج التي تم الحصول عليها من الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لمنظومة لورنز والتي تظهر مدى دقة اختبار الفوضى الثنائي والذي يعطي نتائج متوافقة مع مؤشرات الفوضى الأخرى

الجدول (4) : نتائج الاختبار الثنائي والمؤشرات الأخرى للفوضى لمنظومة لورنز عند قيمتين مختلفتين للمعلمة b .

التسلسل	نتائج الاختبار الثنائي وبقية مؤشرات الفوضى			
	معلمة التشعب	رسم فضاء الطور والسلسلة الزمنية	قوى لابنوف	اختبار الفوضى الثنائي
1	$b = 22$	منتظم	$\lambda_1 = -0.0806$ ، $\lambda_2 = -0.0921$ $\lambda_3 = -13.4928$	$K \cong 0$
			منتظم	منتظم
2	$b = 30$	فوضوي	$\lambda_1 = 0.9483$ ، $\lambda_2 = 2.39e-006$ $\lambda_3 = -14.6112$	$K \cong 1$
			فوضوي	فوضوي

4- الاستنتاجات Conclusions

يمكن لاختبار الفوضى الثنائي من مفهومه يمكن فقط أن يميز بين النظام الديناميكي غير الفوضوي والفوضوي فقط، هذا التمييز واضح جداً بواسطة متغير التمييز K الذي قيمته قريبة إما إلى الصفر أو قريبة من الواحد كما انه يتميز بالمشاهدة البصرية للنتائج . إن السمة الأقوى للاختبار التي تبرز عالميته هو انه مستقل ولا يعتمد على طبيعة البيانات التي تغذي المنظومة وبشكل خاص ليس هناك حاجة إلى معرفة معادلات المنظومة الديناميكية فضلا عن إلى أن الطريقة تطبق على جزء من المشاهدات $\phi(X(t))$ بدلاً من كل المسار $X(t)$. من وجهة نظر حسابية تماما فان الاختبار الثنائي يتميز بتقنية عالية عن الطريقة التقليدية لحساب قوى لابنوف والتمييز الدقيق لانتقال السلوك من حالة الانتظام

(الدوري وشبه الدوري) إلى حالة الفوضى كما مبين في نتائج تطبيق الخيمة في الجدول (1). لقد تبين إن الأنظمة الديناميكية المتقطعة والمستمرة وبأبعاد مختلفة التي تم فحصها لبيان مدى فوضويتها في هذا البحث باستخدام طرائق أخرى أنها تتوافق مع اختبار الفوضى ، مما يؤيد دقة هذه الطريقة لاختبار الفوضى وانه بعض الأحيان يتفوق بالدقة على مؤشرات الفوضى التقليدية الأخرى.

المصادر References

[1] Alligood, K. T. & Sauer, T. D. & Yorke J. A. (1997), "Chaos: An Introduction to Dynamical Systems", Springer-Verlag ,New York, Inc.

[2] Falconer, I. & Gottwald, G. A. & Melbourne, I. (2007), "Application of the 0-1 Test for Chaos to Experimental Data", Xulvi – Brunet, SIAM J. 6, No. 2, pp. 395–402.

[3] Gottwald, G. A. & Melbourne, I. (2003), "A new Test for Chaos in Deterministic Systems" , Proc. R. Soc. Lond. A 2004 460, 603-611.

[4] Gottwald, G. A. & Melbourne, I. (2009) , " On the Implementation of the 0–1 Test for Chaos" , Xulvi – Brunet , SIAM J. Appl. Dyn. Syst. (8) 129–145.

[5] Henk Broer & Floris Takens (2010), "Dynamical Systems and Chaos", Springer- Science+Business Media, Inc.

[6] Paul, S. Addison (1997) ," Fractals and Chaos ", Napier University, Edinburgh.