المجاميع القالبية الاصغرية ذات ألحجم (30) في المستوي PG(2,19)

أماني بنيان إبراهيم أل– سليم
قسم تقنيات الإدارة الالكترونية
الكلية التقنية الإدارية / الموصل

الاستلام **القبول**
٢٥ / ١٢ / ٢٠١١ ٠٣ / ٠٤ / ٢٠١٢

Abstract

A blocking set B in projective plane PG(2,q) is a set of points such that every line in the plane intersect B in at least one point and there exist a line intersect B in only one point, we say that B is minimal if B has no blocking subset. In this research we proved the non_existence of minimal blocking set of size (30) contains 12_secant and not contains 13_secant in PG(2,19).

المستخلص

المجموعة القالبية B في المستوي الاسقاطي PG(2,q) هي مجموعة نقاط بحيث ان كل خط في المستوي يقطع B بما لا يقل عن نقطة واحدة ويوجد خط يقطع B بنقطة واحدة فقط ، نقول ان B اصغرية اذا لم تحتوي بداخلها على اي مجموعة قالبية. في هذا البحث تم إثبات عدم وجود مجا ميع قالبية اصغرية في المستوي PG(2,19)، من الحجم (30) تمتلك قاطعاً ثاني عشر ولا تمتلك قاطعاً ثالث عشر.

١. المقدمة

يقال للمجموعة B القالبية _ t انها اصغرية او غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية تتشكل منها مجموعة قالبية _ t، وبصورة خاصة عندما t=1 فان B تسمى مجموعة قالبية. Richardson [5] هو اول من بحث في المستويات ذات الرتب الكبيرة ، كما انه اثبت ان اصغر حجم للمجموعة القالبية في المستوي PG(2,3) هو (6). أذا كانت Bمجموعة قالبية في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فأن B تسمى من نوع ـ ريدي اذا وجد خط في المستوي الاسقاطي يحوي على K من النقاط B بحيث ان |B|=q+k.

2. المجاميع القالبية في المستوي الاسقاطي PG(2,19)

(2.1) الإسقاط الدوار على GF(19):

لتكن $F(x) = x^3-4x^2-2$ متعددة حدود على الحقل GF(19) فان المصفوفة:-

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

هي إسقاط دوار على المستوي PG(2,19)، المستوي الاسقاطي PG(2,19) يحتوي على (381) نقطة و (381) خطاً ، وكل خط يحوي (20) نقطة ، وكل نقطة يمر منها (20) خطاً . كما مبين في الجدول (1) و (2). لتكن p1=(1,0,0) هي النقطة الابتدائية فان باقي نقاط المستوي يمكن إيجادها بمدار واحد باستخدام العلاقة الآتية:

$$p_i = p_{i-1}\,T \quad , \quad \forall i = 2,\ldots,q^2+q+1$$

وكذلك بالنسبة للمستقيمات:

L_1 = {1 2 24 37 52 56 82 93 126 157 234 244 252 261 268 273 320 334 340 380}

يمكن إيجادها بالعلاقة الآتية: $L_i = L_{i-1}T \quad , \quad i = 2,\ldots,q^2+q+1$

ملاحظة: لتكن B مجموعة قالبية ذات حجم K، ولتكن n قاطع لـ B حيث n=1,2,…,q. فان كانت n=q+1 فان B تسمى تافهة.

(2_2) مبرهنة:

لتكن B مجموعة قالبية اصغرية ذات الحجم 30 في الفضاء الاسقاطي PG(2,19)، وليكن L قاطعاً لـ B بـ n من النقاط فان:- $1 \le n \le 12$

البرهان:-

ليكن L هو قاطع لـ B ولتكن p=(x,y,z) نقطة في الفضاء الاسقاطي PG(2,q)، $p \in L/B$. ليكن L هو قاطع لـ B بثلاثة عشر نقطة وبما انه يوجد من النقطة p تسعة عشر خطا يقطع B بنقطة واحدة على الأقل فانه بتوزيع نقاط B على الخطوط التسعة عشر سيظهر خط خارجي وهذا تناقض.

(2_3) مبرهنة (كاكس):[4]

في المستوي الاسقاطي PG(2,q)، لتكن B مجموعة قالبية اصغرية ذات حجم q+k. اذا وجد L يقطع B في k-1 من النقاط بالضبط ، فانه توجد نقطة Q لا تنتمي إلى B حيث ان كل خط يصل النقطة Q بنقطة من L/B يحتوي بالضبط على نقطتين من B وان $k \ge (q+3)/2$.

(4_2) مبرهنة:

لا توجد مجموعة قالبية اصغرية ذات الحجم (30) في المستوي الاسقاطي PG(2,19) تمتلك قاطعاً أحادي عشر ولا تمتلك قاطعاً ثاني عشر.

البرهان:

لتكن p=(x,y,z) نقطة في المستوي الاسقاطي PG(2,q). وليكن L1 قاطعاً أحادي عشر . نفترض ان L1 هو خط اللانهاية (L1:Z=0) وليكن:

L1/B = {A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8}

وبحسب مبرهنة كاكس توجد نقطة Q لا تنتمي الى B. بحيث ان QAi ،i=1,2,…,8 هي قواطع ثنائية .وهذه الخطوط تحتوي على (18) نقطة من B، ولتكن U1 هي النقطة التاسعة عشر، وبما ان النقاط Ai تقع على قاطع ثنائي واحد و ثمانية عشر قاطع احادي،

فان الخطوط U1 , Ai i=1,2,…,8 هي قواطع أحادية. اما الخط U1Q فهو الخط الذي يمر خلال نقطة من نقاط L1 ∩ B. وباستخدام التحويلين الخطيين:-

T1: (x,y,z) → (y+z,x+18z,0)
T2: (x,y,z) → (18y+z,x+y,0)

فان تأثير الزمرة الخطية S3 = (T1,T2) على خط اللانهاية يؤدي إلى خمسة مدارات:-

المدار الاول:- {(1,0,0),(0,1,0),(1,18,0)}

المدار الثاني:- {(1,14,0),(1,5,0),(1,4,0),(1,15,0),(1,3,0),(1,13,0)}

المدار الثالث:- {(1,2,0),(1,6,0),(1,16,0),(1,10,0),(1,8,0),(1,12,0)}

المدار الرابع:- {(1,1,0),(1,9,0),(1,17,0)}

المدار الخامس:- {(1,11,0),(1,7,0)}

لتكن النقاط:-

A1=(1,0,0)، A2=(0,1,0)، A3=(1,18,0)، A4(1,13,0)، A5=(1,12,0) ،

A6=(1,17,0)، A7=(1,7,0)، A8=(1,5,0) .

أما نقطة المصدر الثالثة فستكون Q=(0,0,1) ونقطة المصدر الرابعة ستكون U1=(1,1,1)

ليكن: AG(2,19) = PG(2,19) / L1

باختيار الاحتمالات A1,…,A8 أعلاه فأنه سيعطينا خمسة وخمسون احتمالاً وهي:

<u>الحالة الأولى</u>:

بأختيار النقطتين (10,0)، (6,0) فان النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),(18,14)
(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (6,0) فستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة (4,10) في L348، وهذا تناقض.

الحالة الثانية:

بأختيار النقطتين (10,0)، (3,0) فان النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (3,0) ستحذف النقاط

{(9,13),(17,5),(16,17),(0,8),(12,3),(14,10),(16,4),(8,3),(2,7),(13,6),(9,7),
(7,11),(0,6)(6,2),(5,14),(11,18),(0,17),(15,8),(12,7),(10,16),(0,9),(18,12),
(16,18)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (4,10) في L348، وهذا تناقض.

الحالة الثالثة:

بأختيار النقطتين (5,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}

أما النقطة (5,0) ستحذف النقاط:

{(0,5),(3,2),(14,10),(15,9),(14,3),(0,11),(6,13),(12,8),(0,16),(16,18),
(17,14),(0,10),(10,9),(18,12),(17,5),(15,18),(8,2),(10,16),(10,6),(16,17),
(9,7),(14,11),(15,8),(17,2)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,9) في L133، وهذا تناقض.

الحالة الرابعة:

بأختيار النقطتين (15,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (15,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(0,9),(4,9),(0,11),(16,18),(2,7),(6,13),(9,6),(16,17),(14,3),(2,15),
(18,2),(17,14),(13,6),(5,6),(8,2),(0,10),(0,14),(8,11),(12,4),(11,18),
(10,16),(5,3),(3,17),(11,8),(8,3)}.

في L5 لم يتبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الخامسة:

باختيار النقطتين (18,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (18,0) ستحذف النقاط:

{(16,2),(7,11),(8,11),(15,18),(8,3),(12,4),(10,18),(9,6),(17,2),(10,16),
(16,4),(4,9),(17,12),(6,11),(0,17),(0,12),(0,8),(17,14),(0,5),(2,15),(12,8),
(2,10),(0,16),(15,9)}.

في L133 لم يبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة السادسة:

بأختيار النقطتين (8,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}

أما النقطة (8,0) ستحذف النقاط:

{(5,3),(6,2),(11,16),(12,14),(0,10),(9,13),(15,8),(0,8),(4,9),(0,16),(15,5)
(16,3),(5,6),(4,10),(9,7),(16,18),(2,15),(0,17),(13,6),(16,2),(3,13),(0,5),
(12,7),(5,9)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51، وهذا تناقض.

الحالة السابعة:

باختيار النقطتين (4,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (4,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(14,10),(2,5),(0,9),(17,5),(0,5),(6,13),(9,6),(16,17),(15,18),(15,5),
(15,8),(16,3),(12,14),(15,10),(11,16),(13,6),(0,10),(10,13),(0,8),(11,8),
(16,2)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,9) في L133 وهذا تناقض.

الحالة الثامنة:

بأختيار النقطتين (14,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}

أما النقطة (14,0) ستحذف النقاط:

{(0,9),(0,6),(0,14),(0,16),(17,2),(13,6),(10,9),(15,5),(12,4),(2,5),(4,10),
(9,13),(11,18),(2,15),(12,14),(10,18),(5,9),(3,2),(7,11),(16,17),(5,6),
(18,14)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (4,11) في L133 وهذا تناقض.

الحالة التاسعة:

بأختيارالنقطتين(7,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7)
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (7,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(15,9),(2,5),(9,7),(4,9),(0,11),(5,9),(17,9),(14,11),(17,12),(15,18),
(2,15),(16,3),(6,2),(12,14),(12,8),(5,14),(5,6),(0,14),(10,13),(12,4),(9,13),
(10,16),(2,10)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (6,11) في L5 وهذا تناقض.

الحالة العاشرة:

بأختيار النقطتين (13,0),(10,0) فأن النقطة (10,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

أما النقطة (13,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(4,9),(0,11),(17,5),(10,6),(10,18),(17,9),(12,7),(16,17),(15,5),
(6,2),(12,14),(15,10),(17,14),(10,9),(6,11),(18,14),(8,11),(8,3),(16,2),
(3,13)}.

فيL_{133} لم يبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الحاديةِ عشر:

باختيار النقطتين (3,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}

اما النقطة (3,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

فيL_{51} لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الثانية عشر:

باختيار النقطتين (5,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (5,0) ستحذف النقاط

{(0,5),(3,2),(14,10),(15,9),(14,3),(0,11),(6,13),(12,8),(0,16),(16,18),(17,4)
(16,17),(9,7),(14,11),(0,10),(10,9),(18,12),(17,5),(15,18),(8,2),(10,16),
(10,6),(15,8),(17,2)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة (9,6) في L151 وهذا تناقض.

الحالة الثالثة عشر:

باختيارالنقطتين(15,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (15,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(0,9),(4,9),(0,11),(16,18),(2,7),(6,13),(9,6),(16,17),(14,3),(2,15),
(18,2),(17,14),(13,6),(5,6),(8,2),(0,10),(0,14),(8,11),(12,4),(11,18),
(10,16),(5,3),(3,17),(11,8),(8,3)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة الرابعة عشر:

باختيار النقطتين (18,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (18,0) ستحذف النقاط:

{(16,2),(7,11),(8,11),(15,18),(8,3),(12,4),(10,18),(9,6),(17,2),(10,16),
(16,4),(4,9),(17,12),(6,11),(0,17),(0,12),(0,8),(17,14),(0,5),(2,15),(12,8),
(2,10),(0,16),(15,9)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة (11,18) في L348 وهذا تناقض.

الحالة الخامسة عشر:

باختيار النقطتين (8,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة(8,0) ستحذف النقاط:

{(5,3),(6,2),(11,16),(12,14),(0,10),(9,13),(15,8),(0,8),(4,9),(0,16),(15,5),
(16,3),(5,6),(4,10),(9,7),(16,18),(2,15),(0,17),(13,6),(16,2),(3,13),(0,5),
(12,7),(5,9)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة (5,8) في L51.

الحالة السادسة عشر:

باختيار النقطتين (4,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (4,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(14,10),(2,5),(0,9),(17,5),(0,5),(6,13),(9,6),(16,17),(15,18),(15,5),
(15,8),(16,3),(12,14),(15,10),(11,16),(13,6),(0,10),(10,13),(0,8),(11,8),
(16,2)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,9) في L133 وهذا تناقض.

الحالة السابعة عشر:

باختيار النقطتين (14,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (14,0) ستحذف النقاط:

{(0,9),(0,6),(0,14),(0,16),(17,2),(13,6),(10,9),(15,5),(12,4),(2,5),(4,10),
(9,13),(11,18),(2,15),(12,14),(10,18),(5,9),(3,2),(7,11),(16,17),(5,6),
(18,14)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (14,10) في L133 وهذا تناقض.

الحالة الثامنة عشر:

باختيار النقطتين (7,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (7,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(15,9),(2,5),(9,7),(4,9),(0,11),(5,9),(17,9),(14,11),(17,12),(15,18),
(2,15),(16,3),(6,2),(12,14),(12,8),(5,14),(5,6),(0,14),(10,13),(12,4),(9,13),
(10,16),(2,10)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة التاسعة عشر:

باختيار النقطتين (13,0),(6,0) فان النقطة (6,0) ستحذف النقاط:

{(15,10),(0,6),(14,11),(11,8),(2,5),(0,17),(5,6),(3,2),(16,18),(12,7),(14,3),
(0,12),(18,14),(9,13),(3,17),(11,16),(10,9),(12,4),(2,10),(4,9),(5,14),
(13,17),(18,2),(0,8), (5,3)}.

اما النقطة (13,0) ستحذف النقاط:

{(12,3),(4,9),(0,11),(17,5),(10,6),(10,18),(17,9),(12,7),(16,17),(15,5),
(6,2),(12,14),(15,10),(17,14),(10,9),(6,11),(18,14),(8,11),(8,3),(16,2),
(3,13)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة العشرين:

باختيار النقطتين (5,0),(3,0) فان النقطة (3,0) ستحذف النقاط:

{(0,10),(11,18),(9,6),(12,7),(15,8),(2,10),(16,2),(13,17),(14,10),(9,7),
(14,11),(15,9),(16,4),(5,3),(12,14),(0,6),(4,15),(18,2),(3,2),(11,16),
(18,14),(2,5),(0,11),(8,2)}.

اما النقطة (5,0) ستحذف النقاط:

{(0,5),(3,2),(14,10),(15,9),(14,3),(0,11),(6,13),(12,8),(0,16),(16,18),
(17,14),(0,10),(10,9),(18,12),(17,5),(15,18),(8,2),(10,16),(10,6),(16,17),
(9,7),(14,11),(15,8),(17,2)}

فيL151 لم يبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الواحد وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(15,0) نلاحظ انه في L151 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الثانية وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(18,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (8,18) في L151 وهذا تناقض.

الحالة الثالثة وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(8,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الرابعة وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(4,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (10,18) في L133 وهذا تناقض.

الحالة الخامسة وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(14,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة السادسة وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(7,0)يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (5, 8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة السابعة وعشرون:

باختيار النقطتين (3,0)،(13,0)يبقي لدينا نقطة واحدة هي (11,16) في L133 وهذا تناقض.

الحالة الثامنة وعشرون:

باختيار النقطتين (5,0)،(15,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (18,14) في L5 وهذا تناقض.

الحالة التاسعة وعشرون:

باختيار النقطتين (5,0)،(18,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (17,9) في L5 وهذا تناقض.

الحالة الثلاثون:

باختيار النقطتين (5,0)،(8,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (11,18) فيL348 وهذا تناقض.

الحالة واحد وثلاثون:

باختيار النقطتين (5,0)،(4,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (7,11) في L151 وهذا تناقض.

الحالة الثانية وثلاثون:

باختيار النقطتين (5,0)،(14,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الثالثة وثلاثون:

باختيار النقطتين (5,0)،(7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (9,6) فيL151 وهذا تناقض.

الحالة الرابعة وثلاثون:

باختيار النقطتين (5,0)،(14,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الخامسة وثلاثون:

باختيار النقطتين (15,0)،(18,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (9,13) في L348 وهذا تناقض.

الحالة السادسة وثلاثون:

باختيار النقطتين (15,0)، (8,0) نلاحظ انه في L51 لم يبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة السابعة وثلاثون:

باختيار النقطتين (15,0)،(4,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الثامنة وثلاثون:

باختيار النقطتين (15,0)، (14,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وه ذا تناقض.

الحالة التاسعة وثلاثون:

باختيار النقطتين (15,0)، (7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة الاربعون:

باختيار النقطتين (15,0)،(13,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة واحد وأربعون:

باختيار النقطتين (18,0)،(8,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (11,18) في L348 وهذا تناقض.

الحالة اثنان وأربعون:

باختيار النقطتين (18,0)،(4,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (18,2) في L133 وهذا تناقض.

الحالة ثلاثة وأربعون:

باختيار النقطتين (18,0)،(14,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (14,10) في L133 وهذا تناقض.

الحالة أربعة وأربعون:

باختيار النقطتين (18,0)،(7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (16,17) في L151 وهذا تناقض.

الحالة خمسة وأربعون:

باختيار النقطتين (18,0)،(13,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (11,16) في L133 وهذا تناقض.

الحالة السادسة وأربعون:

باختيار النقطتين (8,0)،(4,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (10,18) في L133 وهذا تناقض.

الحالة السابعة وأربعون:

باختيار النقطتين (8,0)،(14,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى أي نقطة وهذا تناقض.

الحالة الثامنة وأربعون:

باختيار النقطتين (8,0)،(7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة وهي (5,8) في L51 وهذا تناقض.

الحالة التاسعة وأربعون:

باختيار النقطتين(8,0)،(13,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (14,10) في L133 وهذا تناقض.

الحالة الخمسون:

باختيار النقطتين (4,0)، (14,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (18,2) في L133 وهذا تناقض.

الحالة واحد وخمسون:

باختيار النقطتين (4,0)،(7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (10,18) في L133 وهذا تناقض.

الحالة اثنان وخمسون:

باختيار النقطتين (4,0)،(13,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (18,2) في L133 وهذا تناقض.

الحالة ثلاثة وخمسون:

باختيار النقطتين (14,0)،(7,0) يبقي لدينا نقطة واحدة (14,10) في L133 وهذا تناقض.

الحالة اربعة وخمسون:

باختيار النقطتين (14,0)،(13,0) نلاحظ انه في L133 لم يبقى اي نقطة وهذا تناقض.

الحالة خمسة وخمسون:

باختيار النقطتين (7,0)،(13,0) يبقي لدينا نقطة واحدة هي (16,18) في L51 وهذا تناقض.

٣. المثلث الاسقاطي في المستوي PG(2,19):

تعريف : في المستوي الاسقاطي PG(2,q) حيث q عدد فردي ، يعرف المثلث الاسقاطي (Projective triangle) بانه مجموعة نقاط متكافئة اسقاطياً للنقاط الآتية:

$\{(0,-a^2,1),(-a^2,1,0),(1,0,-a^2) / a \in GF(q)\}$

أي بمعنى آخر $\{(0,-c,1),(-c,1,0),(1,0,-c)\}$

حيث c عدد مربع في الحقل GF(q).

في المستوي الاسقاطي PG(2,q)، q عدد فردي توجد مجموعة قالبيةاصغرية من النوع _ ريدي ذات حجم 3(q+1)/2 وتشكل مثلثا" اسقاطياً.

(3-1) مثال : في المستوي الاسقاطي PG(2,19) توجد مجموعة قالبية أصغرية من النوع _ ريدي ذات حجم (30) وتشكل مثلثاً اسقاطياً، ونقاطها هي:

{(0,0,1),(0,2,1),(0,3,1),(0,8,1),(0,10,1),(0,12,1),(0,13,1),(0,14,1),(0,15,1),
(0,18,1),(0,1,0),(2,1,0),(3,1,0),(8,1,0),(10,1,0),(12,1,0),(13,1,0),(14,1,0),

(15,1,0),(18,1,0)(1,0,0),(1,0,2),(1,0,3),(1,0,8),(1,0,10),(1,0,12),(1,0,13),
(1,0,14),(1,0,15),(1,0,18)}

والتي تكافئ اسقاطياً النقاط:

{(0,0,1),(0,1,10),(0,1,13),(0,1,12),(0,1,2),(0,1,8),(0,1,3),(0,1,15),(0,1,14),(
0,1,18),(0,1,0),(1,10,0),(1,13,0),(1,12,0),(1,2,0),(1,8,0),(1,3,0),(1,15,0),(1,
14,0),(1,18,0),(1,0,0),(1,0,2),(1,0,3),(1,0,8),(1,0,10),(1,0,12),(1,0,13),(1,0,
14),(1,0,15),(1,0,18)}

جدول رقم (١)

i	p_i	i	p_i	i	p_i	i	p_i	i	p_i
1	(١,٠,٠)	40	(١,١٤,٢)	٧٩	(١,٣,٩)	١١٨	(١,١١,٩)	١٥٧	(١,١,٠)
2	(٠,١,٠)	٤١	(١,٥,١٥)	٨٠	١,١٨,١٨)(	١١٩	١,١٨,١٠)(	١٥٨	(٠,١,١)
3	(٠,٠,١)	42	(١,٧,١٨)	٨١	(١,٩,١٢)	١٢٠	(١,١,١)	١٥٩	(١,٠,١٢)
4	(١,٠,٢)	43	(١,٩,٨)	٨٢	(١,٤,٠)	١٢١	١,١٠,١٢)(	١٦٠	(١,٤,٢)
5	(١,٥,٢)	44	(١,٦,١٨)	٨٣	(٠,١,٤)	١٢٢	(١,٤,٤)	١٦١	(١,٥,٣)
6	(١,٥,٨)	45	(١,٩,١٨)	٨٤	(١,٠,١٤)	١٢٣	١,١٢,١٢)(	١٦٢	(١,١٦,٦)
٧	(١,٦,١٣)	46	(١,٩,٧)	٨٥	(١,١٧,٢)	١٢٤	(١,٤,١٢)	١٦٣	(١,٨,١٦)
8	(١,١١,١١)	47	(١,١٥,٤)	٨٦	(١,٥,١١)	١٢٥	(١,٤,١٨)	١٦٤	(١,٣,٧)
9	(١,١٣,١٢)	48	١,١٢,١١)(	٨٧	١,١٣,١٠)(	١٢٦	(١,٩,٠)	١٦٥	(١,١٥,٩)
10	(١,٤,١٦)	49	(١,١٣,٦)	٨٨	(١,١,١٥)	١٢٧	(٠,١,٩)	١٦٦	(١,١٨,٦)
11	(١,٣,١٤)	50	(١,٨,١١)	٨٩	(١,٧,٩)	١٢٨	(١,٠,١)	١٦٧	(١,٨,١٣)
12	(١,١٧,١٥)	51	١,١٣,١١)(	٩٠	١,١٨,١٤)(	١٢٩	(١,١٠,٢)	١٦٨	١,١١,١٤)(
13	(١,٧,٧)	52	(١,١٣,٠)	٩١	(١,١٧,٤)	١٣	(١,٥,١٤)	١٦	١,١٧,١٨)

						٠		٩	(
14	(١,١٥,١٢)	53	(٠,١,١٣)	٩٢	١,١٢,١٦) (	١٣١	١,١٧,١١) (	١٧٠	(١,٩,٣)
15	(١,٤,٥)	54	(١,٠,١٣)	93	(١,٣,٠)	١٣٢	١,١٣,١٤) (	١٧١	١,١٦,١٣) (
16	(١,٢,١٠)	٥٥	(١,١١,٢)	٩٤	(٠,١,٣)	١٣٣	١,١٧,١٤) (	١٧٢	(١,١١,٧)
17	(١,١,٤)	٥٦	(١,٥,٠)	٩٥	(١,٠,١٨)	١٣٤	(١,١٧,٦)	١٧٣	١,١٥,١٥) (
18	(١,١٢,١٤)	٥٧	(٠,١,٥)	٩٦	(١,٩,٢)	١٣٥	(١,٨,٥)	١٧٤	(١,٧,١٢)
19	(١,١٧,١٦)	٥٨	(١,٠,٤)	٩٧	(١,٥,٩)	١٣٦	(١,٢,١٨)	١٧٥	(١,٤,١١)
20	(١,٣,١٥)	٥٩	(١,١٢,٢)	٩٨	١,١٨,١٦) (	١٣٧	(١,٩,١)	١٧٦	١,١٣,١٦) (
21	(١,٧,٤)	٦٠	(١,٥,٥)	٩٩	(١,٣,١٨)	١٣٨	١,١٠,١٦) (	١٧٧	(١,٣,٣)
22	(١,١٢,١٠)	٦١	(١,٢,١٢)	١٠٠	(١,٩,١٠)	١٣٩	(١,٣,١٣)	١٧٨	١,١٦,١٢) (
23	(١,١,١٤)	٦٢	(١,٤,١٠)	١٠١	(١,١,١١)	١٤٠	١,١١,١٦) (	١٧٩	(١,٤,٩)
24	(١,١٧,٠)	٦٣	(١,١,٦)	١٠٢	١,١٣,١٥) (	١٤١	(١,٣,١٦)	١٨٠	١,١٨,١٧) (
25	(٠,١,١٧)	٦٤	(١,٨,١٠)	١٠٣	(١,٧,١٧)	١٤٢	(١,٣,١١)	١٨١	(١,١٤,٧)
26	(١,٠,١٦)	٦٥	(١,١,١٠)	١٠٤	(١,١٤,٥)	١٤٣	(١,١٣,٣)	١٨٢	(١,١٥,٣)
27	(١,٣,٢)	٦٦	(١,١,٣)	١٠٥	(١,٢,١١)	١٤٤	(١,١٦,١)	١٨٣	١,١٦,١٤) (
28	(١,٥,١٨)	٦٧	١,١٦,١٨) (	١٠٦	١,١٣,١١) (	١٤٥	١,١٠,١٠) (	١٨٤	(١,١٧,٨)
29	(١,١٤,١٥)	٦٨	(١,٩,١٣)	١٠٧	(١,١٨,٨)	١٤٦	(١,١,١٢)	١٨٥	(١,٦,٩)
30	(١,٧,٥)	٦٩	(١,١١,٦)	١٠	(١,٦,١٥)	١٤	(١,٤,٦)	١٨	١,١٨,١٥)

(	٦		٧		٨				
(١,٧,١٤)	١٨٧	(١,٨,١٥)	١٤٨	(١,٧,٦)	١٠٩	(١,٨,١٤)	٧٠	(١,٢,١٦)	31
(١,١٧,٧)	١٨٨	(١,٧,١)	١٤٩	(١,٨,١)	١١٠	(١,١٧,٥)	٧١	(١,٣,٨)	32
١,١٥,١٠) (	١٨٩	١,١٠,١٥) (	١٥٠	(١,١٠,٦)	١١١	(١,٢,١٧)	٧٢	(١,٦,١)	33
(١,١,١٧)	١٩٠	(١,٧,١٥)	١٥١	(١,٨,٦)	١١٢	١,١٤,١١) (	٧٣	(١,١٠,٥)	34
١,١٤,١٦) (	١٩١	(١,٧,١٣)	١٥٢	(١,٨,٩)	١١٣	١,١٣,١٣) (	٧٤	(١,٢,٣)	35
(١,٣,٦)	١٩٢	(١,١١,٣)	١٥٣	١,١٨,١٤) (	١١٤	١,١١,١٢) (	٧٥	(١,١٦,١٥)	36
(١,٨,٧)	١٩٣	(١,١٦,٧)	١٥٤	١,١١,١٠) (	١١٥	(١,٤,٨)	٧٦	(١,٧,٠)	37
(١,١٥,٨)	١٩٤	١,١٥,١٤) (	١٥٥	(١,١,١٣)	١١٦	(١,٦,٧)	٧٧	(٠,١,٧)	38
(١,٦,١٦)	١٩٥	١,١٧,١٠) (	١٥٦	١,١١,١٣) (	١١٧	١,١٥,١٦) (	٧٨	(١,٠,١٧)	39
(١,١١,٥)	٣٦٠	(١,٢,٩)	٣١٩	(١,٩,٩)	٢٧٨	(١,٨,٢)	٢٣٧	(١,٣,١)	١٩٦
(١,٢,٥)	٣٦١	(١,١٨,٠)	٣٢٠	١,١٨,١٢) (	٢٧٩	(١,٥,٤)	٢٣٨	(١,١٠,١٣)	١٩٧
(١,٢,٦)	٣٦٢	(٠,١,١٨)	٣٢١	(١,٤,١٧)	٢٨٠	(١,١٢,٥)	٢٣٩	(١,١١,١٧)	١٩٨
(١,٨,١٨)	٣٦٣	(١٠,٠,١١)	٣٢٢	(١,١٤,١)	٢٨١	(١,٢,٧)	٢٤٠	(١,١٤,٤)	١٩٩
(١,٩,١٧)	٣٦٤	(١,١٣,٢)	٣٢٣	(١,١٠,٩)	٢٨٢	١,١٥,١٣) (	٢٤١	(١,١٢,١٨)	٢٠٠
١,١٤,١٤) (	٣٦٥	(١,٥,١٠)	٣٢٤	١,١٨,١١) (	٢٨٣	١,١١,١٥) (	٢٤٢	(١,٩,١٥)	٢٠١
١,١٧,١٢) (	٣٦٦	(١,١,٧)	٣٢٥	(١,١٣,٨)	٢٨٤	(١,٧,٣)	٢٤٣	(١,٧,٨)	٢٠٢
(١,٤,١٣)	٣٦	١,١٥,١٧)	٣٢	(١,٦,٤)	٢٨	(١,١٦,٠)	٢٤	(١,٦,٦)	٢٠

٣		٤		٥		٦	(	٧	
٢٠٤	(١,٨,١٢)	٢٤٥	(٠,١,١٦)	٢٨٦	١,١٢,١٧) (	٣٢٧	(١,١٤,٣)	٣٦٨	(١,١١,٨)
٢٠٥	(١,٤,١٥)	٢٤٦	(١,٠,٦)	٢٨٧	١,١٤,١٨) (	٣٢٨	١,١٦,١٧) (	٣٦٩	(١,٦,١١)
٢٠٦	(١,٧,١١)	٢٤٧	(١,٢,٢)	٢٨٨	(١,٩,١٤)	٣٢٩	١,١٤,١٧) (	٣٧٠	(١,١٣,٤)
٢٠٧	١.١٣,١٧) (	٢٤٨	(١,٥,١٢)	٢٨٩	(١,١٧,٣)	٣٣٠	(١,١٤,٨)	٣٧١	(١,١٢,٦)
٢٠٨	(١,١٤,١٣)	٢٤٩	(١,٤,٣)	٢٩٠	(١,١٦,٨)	٣٣١	(١,٦,١٠)	٣٧٢	(١,٨,٣)
٢٠٩	(١,١١,٤)	٢٥٠	(١,١٦,٩)	٢٩١	(١,٦,٣)	٣٣٢	(١,١,٨)	٣٧٣	١,١٦,١٦) (
٢١٠	(١,١٢,١)	٢٥١	(١,١٨,٥)	٢٩٢	(١,١٦,٣)	٣٣٣	(١,٦,٨)	٣٧٤	(١,٣,١٢)
٢١١	(١,١٠,٨)	٢٥٢	(١,٢,٠)	٢٩٣	١,١٦,١١) (	٣٣٤	(١,٦,٠)	٣٧٥	(١,٤,١٤)
٢١٢	(١,٦,٥)	٢٥٣	(٠,١,٢)	٢٩٤	(١,١٣,١)	٣٣٥	(٠,١,٦)	٣٧٦	١,١٧,١٣) (
٢١٣	(١,٢,١٤)	٢٥٤	(١,٠,٧)	٢٩٥	١,١٠,١٨) (	٣٣٦	(١,٠,١٠)	٣٧٧	١,١١,١٨) (
٢١٤	(١,١٧,١٧)	٢٥٥	(١,١٥,٢)	٢٩٦	(١,٩,١٦)	٣٣٧	(١,١,٢)	٣٧٨	(١,٩,٦)
٢١٥	(١,١٤,١٢)	٢٥٦	(١,٥,١)	٢٩٧	(١,٣,١٠)	٣٣٨	(١,٥,٧)	٣٧٩	(١,٨,١٧)
٢١٦	(١,٤,١)	٢٥٧	١,١٠,١٤) (	٢٩٨	(١,١,٥)	٣٣٩	(١,١٥,١)	٣٨٠	(١,١٤,٠)
٢١٧	(١,١٠,٤)	٢٥٨	(١,١٧,١)	٢٩٩	(١,٢,٤)	٣٤٠	(١,١٠,٠)	٣٨١	(٠,١,١٤)
٢١٨	(١,١٢,٨)	٢٥٩	(١,١٠,١)	٣٠٠	(١,١٢,٧)	٣٤١	(٠,١,١٠)		
٢١٩	(١,٦,١٧)	٢٦٠	(١,١٠,٧)	٣٠١	١,١٥,١١) (	٣٤٢	(١,٠,٣)		
٢٢	(١,١٤,١٠)	٢٦	(١,١٥,٠)	٣٠	(١,١٣,٧)	٣٤	(١,١٦,٢)		

				٣		٢		١		٠
		(١,٥,٦)	٣٤ ٤	(١,١٥,٧)	٣٠ ٣	(٠,١,١٥)	٢٦ ٢	(١,١,١٦)	٢٢ ١
		(١,٨,٤)	٣٤ ٥	١,١٥,١٨) (	٣٠ ٤	(١,٠,٩)	٢٦ ٣	(١,٣,٥)	٢٢ ٢
		(١,١٢,٣)	٣٤ ٦	(١,٩,٤)	٣٠ ٥	(١,١٨,٢)	٢٦ ٤	(١,٢,٨)	٢٢ ٣
		(١,١٦,٤)	٣٤ ٧	١,١٢,١٥) (	٣٠ ٦	(١,٥,١٦)	٢٦ ٥	(١,٦,١٤)	٢٢ ٤
		(١,١٢,٤)	٣٤ ٨	(١,٧,١٠)	٣٠ ٧	(١,٣,١٧)	٢٦ ٦	(١,١٧,٩)	٢٢ ٥
		١,١٢,١٣) (	٣٤ ٩	(١,١,٩)	٣٠ ٨	(١,١٤,٦)	٢٦ ٧	(١,١٨,٤)	٢٢ ٦
		(١,١١,١)	٣٥ ٠	(١,١٨,١)	٣٠ ٩	(١,٨,٠)	٢٦ ٨	(١,١٢,٩)	٢٢ ٧
		١,١٠,١٧) (	٣٥ ١	١,١٠,١١) (	٣١ ٠	(٠,١,٨)	٢٦ ٩	(١,١٨,٩)	٢٢ ٨
		(١,١٤,٩)	٣٥ ٢	١,١٣,١٨) (	٣١ ١	(١,٠,٨)	٢٧ ٠	(١,١٨,٣)	٢٢ ٩
		(١,١٨,٧)	٣٥ ٣	(١,٩,٥)	٣١ ٢	(١,٦,٢)	٢٧ ١	(١,١٦,٥)	٢٣ ٠
		(١,١٥,٦)	٣٥ ٤	(١,٢,١)	٣١ ٣	(١,٥,١٣)	٢٧ ٢	(١,٢,١٥)	٢٣ ١
		(١,٨,٨)	٣٥ ٥	(١,١٠,٣)	٣١ ٤	(١,١١,٠)	٢٧ ٣	(١,٧,١٦)	٢٣ ٢
		(١,٦,١٢)	٣٥ ٦	١,١٦,١٠) (	٣١ ٥	(٠,١,١١)	٢٧ ٤	(١,٣,٤)	٢٣ ٣
		(١,٤,٧)	٣٥ ٧	(١,١,١٨)	٣١ ٦	(١,٠,١٥)	٢٧ ٥	(١,١٢,٠)	٢٣ ٤
		(١,١٥,٥)	٣٥ ٨	(١,٩,١١)	٣١ ٧	(١,٧,٢)	٢٧ ٦	(٠,١,١٢)	٢٣ ٥
		(١,٢,١٣)	٣٥ ٩	(١,١٣,٥)	٣١ ٨	(١,٥,١٨)	٢٧ ٧	(١,٠,٦)	٢٣ ٦

جدول رقم (٢)

L1	1 2 24 37 52 56 82 93 126 157 234 244 252 261 268 273 320 334 340 380
L2	2 3 25 38 53 57 83 94 127 158 235 245 253 262 269 274 321 335 341 381
L3	3 4 26 39 54 58 84 95 128 159 236 246 254 263 270 275 322 336 342 1
L4	4 5 27 40 55 59 85 96 129 160 237 247 255 264 271 276 323 337 343 2
L5	5 6 28 41 56 60 86 97 130 161 238 248 256 265 272 277 324 338 344 3
L6	6 7 29 42 57 61 87 98 131 162 239 249 257 266 273 278 325 339 345 4
L7	7 8 30 43 58 62 88 99 132 163 240 250 258 267 274 279 326 340 346 5
L8	8 9 31 44 59 63 89 100 133 164 241 251 259 268 275 280 327 341 347 6
L9	9 10 32 45 60 64 90 101 134 165 242 252 260 269 276 281 328 342 348 7
L10	10 11 33 46 61 65 91 102 135 166 243 253 261 270 277 282 329 343 349 8
L11	11 12 34 47 62 66 92 103 136 167 244 254 262 271 278 283 330 344 350 9
L12	12 13 35 48 63 67 93 104 137 168 245 255 263 272 279 284 331 345 351 10
L13	13 14 36 49 64 68 94 105 138 169 246 256 264 273 280 285 332 346 352 11
L14	14 15 37 50 65 69 95 106 139 170 247 257 265 274 281 286 333 12
L15	15 16 38 51 66 70 96 107 140 171 248 258 266 275 282 287 334 348 354 13
. . .	
L381	381 1 23 36 51 55 81 92 125 156 233 243 251 260 267 272 333 ٣١٩339 379

References

1) Bruen, A. A. (1986), "Arcs and multiple blocking sets، combinatorica, symposia", Mathematica 28, Academic. Press, 15-29.

2) Dipaola, J.(1969), "On minimum blocking coalitions in small projective plane games", SIAMJ. Appl. Math., 17,378 – 392.

3) Hirschfeld, J. W. P. (1979), "Projective Geometries over Finite Fields", Oxford University Press, Oxford.

4) Innamorate, S. and Storm, L. (2004)," Minimal blocking sets in PG(2,8) and maximal partial spreads in PG(3,8)", Designs, Codes and Cryptography,31,15-26.

5) Richardson, M. (1956), "On finite projective games", Proc. Amer. Math, Soc., 7,458-465.

6) Younis, S. A., (2009) "The Packing Problem in Projective Plane PG(2,29) and minimal blocking sets in PG(2,11)", M.Sc. Thesis, Mosul.