تمثيل الدوال ليبشتز القياسية تحت مجهر

طاهر حسن إسماعيل   هند يقظان صالح
قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

الاستلام   القبول
١٥ / ٠٤ / ٢٠١٠   ٢١ / ٠٩ / ٢٠١٠

ABSTRACT

The aim of this paper is to provide a representation of a standard lipschitzian functions by mean of a microscope.

More precisely, under certain conditions, the following results have been obtained.

Let f be a standard function, and $^\circ G$ be the shadow of its graph G:

(i) If f is s-continuous and limited, then $^\circ G$ is the graph of a continuous function on $\boldsymbol{R}$.

(ii) If f is continuous and if $^\circ G$ is the graph of a function $^\circ f$ defined on $\boldsymbol{R}$, then $^\circ f$ is a continuous function.

The standard function f is lipschitzian at a neighbourhood of a standard point x_0 if and only if f is limited under every microscope of power ε centered at a point $(x_0, f(x_0))$ or at a point infinitely close to it.

If the standard function f is lipschitzian at a neighbourhood of a standard point x_0 ,then it's representation under a microscopic of power ε centered at the point $(x_0, f(x_0))$ or at a point infinitely close to it, is a graph of a lipschitzian function.

المستخلص

الهدف من هذا البحث هو إعطاء تمثيل للدوال القياسية الليبشتزية باستخدام مجهر .

وبدقة أكثر ، وفق شروط معينة، تم الحصول على النتائج الآتية:

لتكن f دالة قياسية و $^\circ G$ شبح بيانها G عندئذٍ:

(i) إذا كانت f دالة مستمرة–s ومحدودة، فان $^\circ G$ هو بيان لدالة مستمرة على $\boldsymbol{R}$.

(ii) إذا كانت f دالة مستمرة وكان $^{\circ}G$ بيان لدالة $^{\circ}f$ معرفة على $\boldsymbol{R}$ ، فان $^{\circ}f$ دالة مستمرة.
تكون الدالة القياسية f ليبشتزية عند جوار النقطة القياسية x_0 إذا وفقط إذا كانت f محدودة تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ أو عند نقطة متناهية القرب منها.
إذا كانت f دالة ليبشتز القياسية عند جوار نقطة قياسية x_0، فان تمثيلها تحت مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ أو عند نقطة متناهية القرب منها هو بيان دالة ليبشتز.

١. المقدمة

سوف نستخدم خلال هذا البحث التعاريف والرموز الآتية:

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$ ، فيقال بان x **متناهي الصغر** ***infinitesimal*** إذا كان $|x| < r$ لكل $r \in \boldsymbol{R}^+$.

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$ ، فيقال بان x **غير محدود (متناهي الكبر)** ***unlimited*** إذا كان $|x| > r$ لكل $r \in \boldsymbol{R}^+$ ، فيما عدا ذلك يقال أن x **محدود** ***limited*** .

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$، فيقال بان x **مُقدر** ***appreciable*** إذا كان x محدود ولكن غير متناهي الصغر، (انظر [2],[5],[6]).

إذا كان x و y عنصران في $\boldsymbol{R}$ ، فيقال بان x، y **متناهيتا القرب** ***infinitely close*** (ويرمز لذلك $x \simeq y$) إذا وفقط إذا كان $x - y$ متناهية الصغر .

إذا كان x عنصرا في $\boldsymbol{R}$ فان مجموعة النقاط في $\boldsymbol{R}$ والتي تكون متناهية القرب من x تسمى **هالة** x ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{m}(x)$.

إذا كانت A مجموعة جزئية من $\boldsymbol{R}^2$ فان **هالة** A يرمز لها $\boldsymbol{m}(A)$ وهي اتحاد هالات النقاط في A .

إذا كانت A_1 و A_2 مجموعتين جزئيتين من $\boldsymbol{R}^2$ فان A_1 و A_2 متناهيتي القرب إذا كانت لهما الهالة نفسها (أي $m(A_1) = m(A_2)$) .

إذا كانت x نقطة محدودة في $\boldsymbol{R}$ فإنها تكون متناهية القرب من نقطة قياسية وحيدة في $\boldsymbol{R}$ ، وان هذه النقطة الوحيدة تسمى شبح ***(shadow)*** x ، ويرمز لها $^{\circ}x$.

يقال لأية مجموعة معرفة في "نظرية المجموعات مع بديهية الاختيار لزيرميلو – فرانكل (ZFC)" بأنها **مجموعة قياسية** ويقال للدالة التي يكون بيانها مجموعة قياسية بأنها **دالة قياسية** [٦].

إذا كانت A مجموعة جزئية من R^2 فان الشبح أو الجزء القياسي من A يرمز له $^{\circ}A$ ويعرف بأنه المجموعة القياسية الوحيدة في R^2 وتم الحصول عليها بأخذ المقياس لحشد من النقاط المحدودة في A، (انظر [9],[7],[1]) .

إذا لم تكن للمجموعة A نقاط محدودة فيكون شبحها $^{\circ}A$ مجموعة خالية .

لتكن f دالة حقيقية فيقال بان الدالة f **محدودة limited** إذا كانت $f(x)$ محدودة لكل نقطة محدودة x.

لتكن f دالة حقيقية فيقال بان الدالة f **مستمرة−s** ، **s-continuous** إذا كان لكل نقطتين x_1 و x_2 ، $x_1 \simeq x_2$ يؤدي إلى $f(x_1) \simeq f(x_2)$.

إذا كان $\varepsilon \neq 0$ فان **ε−كلاكسي** للنقطة x_0 ، ويرمز لها $\boldsymbol{\varepsilon - gal(x_0)}$ هي مجموعة النقاط التي بعدها عن x_0 هو على الأكثر من رتبة ε ، أي أن :

$$\varepsilon - gal(x_0) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \ ; \ \frac{x - x_0}{\varepsilon} \ \text{محدودة}\right\}$$

(انظر [10],[8],[4],[3]) .

لتكن كل من M و N مجموعة قياسية و $f: M \to N$ دالة قياسية فيقال بان الدالة تدرك الكالكسيات الصغيرة للنقطة x إذا كان لكل $\varepsilon \simeq 0$ لدينا:

$$f\left(\varepsilon - gal(x)\right) \subset \varepsilon - gal(f(x))$$

يقال بان الدالة القياسية f **ليبشيتزية** عند نقطة قياسية x_0 إذا كانت f تدرك الكالكسيات الصغيرة لكل نقطة من نقاط هالة x_0. وبعبارة أخرى يقال أن الدالة ليبشتزية إذا حققت شرط ليبشتز الأتي:[3]

لكل نقطة قياسية x, y و $K > 0$ عدداُ ً قياسياً فان :

$$\forall x, y \in D_f \ ; \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

بديهية الانتقال [7]:

لكل صيغة قياسية تحتوي على متغيرات مستقلة $x, t_1, t_2, \dots, t_n$ ولا تحتوي على متغيرات مستقلة غيرها فان الصيغة التالية تتحقق :

$$\forall^{st}\, t_1, t_2, \dots, t_n\, [\forall^{st} x\, F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Longrightarrow \forall x\, F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)]$$

وكذلك

$$\exists x\, F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Longrightarrow \exists^{st} t_1, t_2, \dots, t_n \exists^{st} x\, F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

٢ . النتائج الرئيسة

لدينا التعاريف الآتية:

تعريف ٢.١

إذا كان $\varepsilon > 0$ عددا حقيقيا متناهي الصغر وكانت (x_0, y_0) نقطة في المستوي $\boldsymbol{R^2}$ فان المجهر بقوة ε والمتمركز عند النقطة (x_0, y_0) يعرف كالأتي :

$$\begin{cases} x - x_0 = \varepsilon X \\ y - y_0 = \varepsilon Y \end{cases}$$

حيث أن (X, Y) هي الإحداثيات الجديدة تحت المجهر

تعريف ٢.٢

يعرف تمثيل بيان دالة مستمرة f تحت مجهر بقوة ε متمركز عند نقطة $(x_0, f(x_0))$ على انه بيان دالة مستمرة F معرفة كالأتي:

$$F(X) = \frac{f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

تعريف ٢.٣

لتكن f دالة قياسية مستمرة و G بيانها، فان تمثيل الدالة f تحت مجهر متمركز عند نقطة من بيانها يسمى شبح البيان G ،ويرمز له $°G$ تحت هذا المجهر .

ملاحظة ٢.٤

لا يمكن تمييز تمثيل الدالة f تحت هذا المجهر عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ من بيان الدالة F (انظر [2],[6]) .

مبرهنة ٢.٥

لتكن f دالة قياسية و$°G$ شبح بيانها G عندئذٍ :

(i) إذا كانت f دالة مستمرة-S ومحدودة ، فان $°G$ هو بيان لدالة مستمرة على $\boldsymbol{R}$.

(ii) إذا كانت f دالة مستمرة وكان $°G$ بيان لدالة $°f$ معرفة على $\boldsymbol{R}$ ، فان $°f$ دالة مستمرة.

البرهان:

(i) نفرض أن f دالة مستمرة-S ومحدودة ، ولتكن x_0 نقطة قياسية وان $x \simeq x_0$ يقتضي أن يكون $f(x) \simeq f(x_0)$

إذاً لكل نقطة $x \in m(x_0)$ فان $(x, f(x)) \simeq (x_o, f(x_0))$

عليه توجد نقطة قياسية وحيدة $°x$ بحيث أن: $(°x, f(°x)) \in °G$ ، ولما كانت $°G$ مجموعة قياسية وحسب بديهية الانتقال فان لكل x توجد نقطة وحيدة y بحيث أن: $(°x, y) \in °G$ وان $°f(x) = f(°x)$ ، إذاً $y = °f(x)$

من جهة أخرى إذا كانت $({}^{\circ}x, {}^{\circ}f\ (x))$ نقطة محدودة من ${}^{\circ}G$ ، فان ${}^{\circ}({}^{\circ}x, {}^{\circ}f\ (x))$ تنتمي إلى ${}^{\circ}({}^{\circ}G) = {}^{\circ}G$. ولكن $({}^{\circ}x, {}^{\circ}f\ (x)) = {}^{\circ}\left(x, {}^{\circ}f\ (x)\right)$، وان ${}^{\circ}G$ هو بيان للدالة ${}^{\circ}f$ ، إذاً ${}^{\circ}f(x) = {}^{\circ}\left({}^{\circ}f(x)\right)$

بعبارة أخرى إذا كانت x_0 نقطة قياسية فان ${}^{\circ}f\ (x) \simeq {}^{\circ}f\ (x_0)$ لكل $x \in m(x_0)$ عليه تكون ${}^{\circ}f$ دالة قياسية مستمرة- s عند كل نقطة قياسية، إذاً ${}^{\circ}f$ هي دالة مستمرة عند كل نقطة قياسية، و(حسب بديهية الانتقال) ${}^{\circ}f$ تكون دالة مستمرة على $\boldsymbol{R}$.

(ii) نفرض أن f دالة مستمرة وان ${}^{\circ}G$ هو بيان ${}^{\circ}f$ لدالة معرفة على $\boldsymbol{R}$

للبرهنة على أن ${}^{\circ}f$ دالة مستمرة يكفي أن نبرهن أنَّ f محدودة ومستمرة-s

لنفرض انه توجد نقطة محدودة x بحيث أن $f(x)$ متناهية الكبر (غير محدودة).

بما أن $({}^{\circ}x, f({}^{\circ}x))$ نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$، إذاً توجد نقطة محدودة $(x', f(x'))$ في G بحيث أن:

$({}^{\circ}x, f({}^{\circ}x)) = {}^{\circ}\left(x', f(x')\right)$ على الفترة المغلقة $[x, x']$ او $[x', x]$ عندئذٍ f تأخذ كل القيم بين $f(x)$ و $f(x')$ علماً بان $f(x)$ متناهية الكبر و $f(x')$ محدودة.

ليكن Δ نصف المستقيم العمودي المرسوم من النقطة القياسية $({}^{\circ}x, f({}^{\circ}x))$ ويمر بالنقطة $({}^{\circ}x, f(x))$، عليه إذا كانت $({}^{\circ}x, y)$ نقطة قياسية من Δ، فانه توجد $x'' \simeq {}^{\circ}x$ بحيث أن: $f(x'') \simeq y$

إذاً $({}^{\circ}x, y) = {}^{\circ}(x'', f(x''))$، وان كل نقطة قياسية $({}^{\circ}x, y)$ من Δ هي نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$.

إذاً $\Delta \subset {}^{\circ}G$ ، فان ${}^{\circ}G$ لا يمكن أن يكون بيانا لدالة.

إذاً $f(x)$ محدودة لكل x ، إذاً f دالة محدودة.

ولتكن x و x' نقطتين محدودتين في G، بما أن $(x, f(x))^{\circ}$ و $(x', f(x'))^{\circ}$ ينتميان الى ${}^{\circ}G$ وبما أن ${}^{\circ}G$ هو بيان للدالة ${}^{\circ}f$، إذاً توجد نقطة وحيدة $({}^{\circ}x, y) \in {}^{\circ}G$ بحيث أن : $y = f({}^{\circ}x)$. وبما ان f مستمرة لذلك اذا كان ${}^{\circ}x \simeq {}^{\circ}x'$ فان $f({}^{\circ}x) \simeq f({}^{\circ}x')$ وحسب بديهية الانتقال f مستمرة-s.

وحسب (i) فان ${}^{\circ}G$ هو بيان لدالة مستمرة ${}^{\circ}f$ على $\boldsymbol{R}$.

مبرهنة ٦.٢

تكون الدالة القياسية f ليبشتزية عند جوار النقطة القياسية x_0 إذا وفقط إذا كانت f محدودة تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ او عند نقطة متناهية القرب منها.

البرهان:

نفرض أن f دالة قياسية ليبشتزية في جوار النقطة القياسية x_0 ، $I_\varepsilon(x_0)$

إذاً $\forall x,\alpha \in I_\varepsilon(x_0)\,; |f(x)-f(\alpha)| \leq K\,|x-\alpha|$

إذا كان المقدار $\frac{x-\alpha}{\varepsilon}$ محدود فان المقدار $\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varepsilon}$ يكون محدود أيضا.

بعبارة أخرى إذا ك ان $x \in \varepsilon-gal(\alpha)$ فان: $f(x) \in \varepsilon - gal(f(\alpha))$ وهذا صحيح لكل $x \in I_\varepsilon(x_0)$ ، عليه فان:

$$f\big(\varepsilon - gal(\alpha)\big) \subset \varepsilon - gal\big(f(\alpha)\big)$$

عليه فان f محدودة.

بالعكس نفرض أن f محدودة أي أن :

$$f\big(\varepsilon - gal(\alpha)\big) \subset \varepsilon - gal\big(f(\alpha)\big) \quad \text{لكل نقطة من } I_\varepsilon(x_0)$$

بما أن كلا من x و α في $I_\varepsilon(x_0)$

نختار عدد حقيقي ε متناهي الصغر موجب بحيث يكون المقدار $\frac{x-\alpha}{\varepsilon}$ محدود وغير متناهي الصغر

بما أن $x \in \varepsilon - gal(\alpha)$ ، فان $f(x) \in \varepsilon - gal(f(\alpha))$

عليه

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varepsilon}}{\frac{x-\alpha}{\varepsilon}}$$

ليكن $\omega > 0$ عدد متناهي الكبر (غير محدود).

لكل x و α في $I_\varepsilon(x_0)$ ، $x \neq \alpha$ لدينا:

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right| \leq \omega$$

باختيار $\delta > 0$ عدد متناهي الصغر، نحصل على :

$$\exists\, \omega > 0, \exists \delta > 0, (\forall x\ ,\alpha\ , |x-x_0| < \delta\ , |\alpha - x_0| < \delta;$$
$$|f(x)-f(\alpha)| \ \leq \ \omega\,|x-\alpha|$$

باستخدام بديهية الانتقال نحصل على :

$$\exists^{st} K > 0, \exists^{st} \delta > 0, (\forall x\ ,\alpha\ , |x-x_0| < \delta\ , |\alpha - x_0| < \delta;$$
$$|f(x)-f(\alpha)| \ \leq \ K\,|x-\alpha|$$

وعليه يوجد جوار للنقطة x_0 حيث f تحقق شرط ليبشيتز ■.

في نهاية هذا البحث سوف نعطي المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٢.٧

إذا كانت f دالة ليش تز القياسية عند جوار نقطة قياسية x_0، فان تمثيلها تحت مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ أو عند نقطة متناهية القرب منها هو بيان دالة ليشرتي.

البرهان :

إذا كانت f دالة ليبشتز القياسية عند جوار V للنقطة x_0 ، وإذا كان كل من f و x_0 قياسية، فإننا نختار كلا من الجوار V والعدد K قياسياً فنحصل على :

$$\forall x, y\,;\ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

إذا كان المجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(\alpha, f(\alpha))$ ، حيث $\alpha \simeq x_0$ ،(فحسب تعريف المجهر فان $F(X) = \frac{f(\varepsilon X+\alpha)-f(\alpha)}{\varepsilon}$ و $F(Y) = \frac{f(\varepsilon Y+\alpha)-f(\alpha)}{\varepsilon}$) لدينا :

$$|F(X) - F(Y)| = \left|\frac{f(\varepsilon X + \alpha) - f(\alpha)}{\varepsilon} - \frac{f(\varepsilon Y + \alpha) - f(\alpha)}{\varepsilon}\right|$$

$$= \left|\frac{f(\varepsilon X + \alpha) - f(\varepsilon Y + \alpha)}{\varepsilon}\right|$$

بما أن f دالة ليبشتز و $\varepsilon > 0$ فان :

$$\left|\frac{f(\varepsilon X + \alpha) - f(\varepsilon Y + \alpha)}{\varepsilon}\right| \leq \frac{K}{\varepsilon}|(\varepsilon X + \alpha) - (\varepsilon Y + \alpha)| = \frac{\varepsilon K}{\varepsilon}|X - Y|$$

نحصل على : $\forall X, \forall Y\,;\ |F(X) - F(Y)| \leq K\,|X - Y|$

هذه المتباينة تبين أن F دالة مستمرة (لان كل دالة ليبشتزية تكون مستمرة) وباستخدام **مبرهنة (٢.٥) (ii)** فان شبح بيان الدالة F هو بيان لدالة قياسية ومستمرة، ونرمز لها $^{\circ}F$

من جهة أخرى إذا كانت لكل من X و Y محدودة فان :

$$|F(X) - F(Y)| \leq K\,|X - Y|$$

ولكن K قياسية لذا لدينا كذلك : $|^{\circ}F(X) - {}^{\circ}F(Y)| \leq K\,|^{\circ}X - {}^{\circ}Y|$

وعليه لكل نقطتين قياسيتين فان :

$$\forall^{st} X_0\,, \forall^{st} Y_0\,;\ |^{\circ}F(X_0) - {}^{\circ}F(Y_0)| \leq K\,|X_0 - Y_0|$$

(وباستخدام بديهية الانتقال) نحصل على :

$$\forall X_0\,, \forall Y_0\,;\ |F(X_0) - F(Y_0)| \leq K\,|X_0 - Y_0|$$

وعليه فان تمثيل الدالة f تحت مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(\alpha, f(\alpha))$ هو بيان د الة ليبشتز.

المصادر

1) Davis M.: "Applied non standard analysis"; New- York, John Wiley and Sons (1977).

2) Diener M. and Van Den Berg I.: "Halos and Galaxies une extention du lemme de Robinson", compte rendus de l'acadimie de science de paris. t. 293 serie 1.(1983) p.385-388.

3) Henle J.H. and Kleinberg E.M.: "Infinitesimal Calculus", M.I.T. Press Combridge, Mass and London, England (1979).

4) Ibrahim Othman Hamad, "A non standard study of the Taylor series Development", M.Sc. thesis, University of salahaddin (2000).

5) Ibrahim Othman Hamad, "Non standard Treatment of two dimensional Taylor series with remainder formula", Al-Rafiden Journal of computer Sciences and Mathematics, Mosul University, Vol.5, No.1 (2005) .

6) Lutz R. and Goze M. "Non standard analysis, A practical guide with application", Lecture note in mathematics, No 881, Springer-Verlage, Berlin, Heidelberg ,New-York (1981).

7) Nelson E.: "Internal set theory: A new approach to non standard analysis", Bull. of Amer. Math.Soc.Vol.83.No. 6 (November 1977) p.1165-1198.

8) Rashad Rashid Haji, "Non standard approximation and successive shadow development", M.Sc. thesis, University of salahaddin (2000).

9) Robinson A. "Non standard analysis" 2nd. ed. American Elsevier New-York (1974).

10) Stroyan K. D. and Luxemburg W. A., "Introduction to the theory of infinitesimal, New-York, Academic press (1976).