تحسين القيم العظمى $m_r(2,q)$ للأقواس-(k,r) في PG(2,q)

د. ندى ياسين قاسم يحيى
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

هبة سهيل نجم عبد الله
طالبة دراسات عليا

الاستلام ٢٩ / ٠٣ / ٢٠١٠

القبول ٢٧ / ٠٦ / ٢٠١٠

ABSTRACT

In this paper we finding the maximum(k,r)-arcs and minimum values for a complete(k,r)-arcs which are unknown at yet in projective plane PG(2,31), improvement some of the maximum value $m_r(2,q)$ for $3 \le r \le 10$ by using conic equation, and for value $4 \le r \le 6$ by using incidence matrix and we get new examples **(68,4), (96,5), (128,6)**-arcs that have not been obtained previously.

Also we prove that nonexists (k,3)-arcs when $4 \le k \le 14$ in PG(2,31) theorm (1.9.1).

الملخص

في هذا البحث قمنا بإيجاد القيم العظمى للأقواس (k,r)- والقيم الصغرى للأقواس (k,r)- التامة غير معروفة حتى الان في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$، وقمنا بتحسين بعض القيم العظمى $m_r(2,q)$ عندما $3 \le r \le 10$ باستخدام معادلة المخروطي و عند ما قيمة $4 \le r \le 6$ باستخدام مصفوفة الوقوع وحصلنا على **امثلة جديدة** للاقواس -(٦٨,٤) و (٩٦,٥) و (١٢٨,٦) التي لم يتم الحصول عليها سابقا . كذلك برهنا عدم وجود الأقواس $(k,3)$- عند ما $4 \le k \le 14$ في $PG(2,31)$ مبرهنة (١.٩.١).

ملاحظة: البحث مستل من رسالة ماجستير

(١.١) مقدمة:

نرمزالى القيمة العظمى لـ k بحيث يكون القوس $-(k,r)$ موجودا في المستوي الاسقاطي PG(2,q) بـ $m_r(2,q)$. كما نرمز الى القيمة الصغرى لـ k بحيث يكون القوس $-(k,r)$ تاما في المستوي الاسقاطي PG(2,q) بـ $t_r(2,q)$.

المستوي الاسقاطي PG(2,q) المعرف على الحقل المنتهي GF(q) هو فضاء ذو بعد 2 يحوي q^2+q+1 من الخطوط وكل خط تقع عليه q+1 من النقاط و q^2+q+1 من النقاط ، وكل نقطة يمر خلالها q+1 من الخطوط . كما أن لأية نقطتين في المستوي الاسقاطي PG(2,q) يوجد خط واحد فقط يصل بينهما وكل خطين يلتقيان في نقطة واحدة فقط، وتوجد على الأقل أربع نقاط لاتوجد ثلاثة منها على استقامة واحدة.

القوس $-(k,r)$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ هو مجموعة k من النقاط في المستوي بحيث يوجد r من النقاط على خط ولا يوجد $r+1$ أو أكثر من تلك النقاط على خط ، ويقال أن القوس $-(k,r)$ **تاماً** إن لم يكن محتوى في قوس $-(k+1,r)$.

إن القيمة $m_r(2,q)$ قد شغلت حيزاً كبيراً من دراسة وبحوث الباحثين، ففي عام 1956 أثبت (*Barlotti*) [5] أن $m_r(2,q) \le (r-1)q+r-2$ عندما $r>2,(r,q)=1$.

وفي عام 1964 أثبت (*Lunelli*) و(*Sco*) [18] أن $m_r(2,q) \le (r-1)q+r-3$ عندما $4 \le r \le q$ وأن $(r,q)=1$ ، كذلك $m_r(2,q) \le (r-1)q+r-4$ عندما $9 \le r \le q$ وأن $(r,q)=1$ وكذلك أثبتو ا أن $m_r(2,q) \le (r-1)q+1$ ، $(r,q)=1$، لكن في عام 1981 أثبت (*Hill*) و(*Mason*) [13] أن هذه العلاقة خاطئة. كما وردت دراسات أخرى عن هذه القيمة في المصادر [1],[3], [7], [9], [11]،[16], [17], [21].

في عام 1982 أثبت (*Bruen*) [8] (عندما يكون q عدداً مربعاً) أن $t_r(2,q) > (r-1)(\sqrt{q}+2)$، وفي عام 1994 أثبت (*Blokhuis*) [6] أن $t_r(2,q) > \sqrt{3q}+\frac{1}{2}$.

(1.1.1) مبرهنة:[15]

ليكن K قوساً في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فان:

$$1- \sum_{i=0}^{r} T_i = q^2+q+1$$

$$2- \sum_{i=1}^{r} iT_i = n(q+1)$$

$$3- \sum_{i=2}^{r} i(i-1)T_i = n(n-1)$$

$4-\sum_{i=1}^{r} R_i = q+1$

$5-\sum_{i=2}^{r}(i-1)R_i = n-1$

$6-\sum_{i=0}^{r} S_i = q+1$

$7-\sum_{i=1}^{r} i\,S_i = n$

$8-i\,T_i = \sum_{p} R_i$

$9-(q+1-i)T_i = \sum_{Q} S_i$

حيث T_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوسK .

R_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوسK خلال نقطة p من نقاط القوسK .

S_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوسK خلال نقطة Q في PG(2,q) /K.

(1.1.2) مبرهنة:[15]

اذا كان للمعادلتين (4) و(5) في المبرهنة اعلاه L من الحلول المختلفة غير السالبة $B_j=(R_{1j},R_{2j},...,R_{nj}),\ j=1,2,...,L$ ووجدت b_j من النقاط على القوس A من النمط (k,r) تحقق الحلول B_j فان: $\sum_{j=1}^{L} b_j R_{ij} = iT_i, i=1,...,r$

$$\sum_{j=1}^{L} b_j = k$$

(1.1.3) تعريف[15]

يقال للقوس -(k,r) انه قوس تام (Complete Arc) إذا لم يوجد قوس - (k+1,r) يحويه.

(1.1.4) مبرهنة:[15]**p.335**

ليكن K قوساً تاماً في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فان:

$$(q+1-r)T_r \ge q^2+q+1-r$$

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $S_r = 1$ لكل Q في PG(2,q) /K.

(1.2) المستوي الاسقاطي PG (2,31) :_

(1.2.1) المصفوفة المرافقة (*Companion Matrix*)

لتكن $f(x)=x^3-4x^2-x-3$ متعددة حدود أحادية *(Monic Polynomial)* على الحقل المنتهي $GF(31)$وغير قابلة للتحليل مطلقا *(Absolutely irreducible)* فإن المصفوفة المرافقة لـ $f(x)$ هي:

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

وهي إسقاط دوار (*Cyclic Projectivity*) على المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ وهذا الإسقاط يجعل نقاط المستوي كلها تترتب بشكل دارة واحدة فقط.

المستوي الاسقاط ي $PG(2,31)$ المعرف على الحقل المنتهي $GF(31)$ هو فضاء ذو بعد 2- يحتوي على 993 نقطة وعلى 993 خط وكل خط يقع عليه 32 نقطة وكل نقطة يمر خلالها 32 خط.

(1.2.2) نقاط الفضاء الاسقاطي $PG\ (2,31)$:_

بإختيار النقطة $p_1=$ (0 0 1)كنقطة إبتدائية في المستوي فإن باقي نقاط المستوي يمكن إيجادها بواسطة الضرب الأيمن للنقطة p_1 بمصفوفة الإسقاط الدوار T وذلك حسب العلاقة الآتية:

$$p_i = p_{i-1}\mathrm{T}\ ,\ \forall_i = 2,3,\ldots\ldots,q^2+q+1$$

ويمثل الجدول (2.1) نقاط المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$.

جدول(2.1): نقاط المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$.

i	p_i		
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	1	21	22
.			
991	1	5	17
992	1	4	30

(1.2.3) خطوط المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$:_

خط المالانهاية سيكون هو الخط الأول في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ أي أن:

$$L_1=\{0,1,21,58,85,120,135,273,304,355,430,444,470,486,531,535,553,\\ 647,653,656,681,686,694,749,760,792,846,922,924,934,941,970\}$$

ولإيجاد باقي خطوط المستوي نطبق العلاقة الآتية :

$$L_i = L_{i-1}\mathrm{T}\ ,\ \forall_i = 2,3,\ldots\ldots,q^2+q+1$$

(1.3) ايجاد القيم العظمى للأقواس_(k,r) في $PG(2,31)$:_

إن أحدث النتائج التي حصل عليها (*Hirschfeld*) و(*Braun*) و(*Faina*) في [4,14] فضلا عن باحثين غيرهم لقيم $m_r(2,q)$ للمستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ اذ ان $11 \le q \le 31$ موضحة في الجدول الآتي:

جدول (٢.٢)

q \ n	11	13	16	17	19	23	25	27	29	31
2	12	14	18	18	20	24	26	28	30	32
3	21	23	28-33	28-35	31-39	34-47	36-51	39-55	42-59	44-?
4	32-34	38-40	52	48-52	52-58	58-70	62-77	66-83	70-89	?- ?
5	43-45	49-53	65	61-69	68-77	79-93	85-10٥	111	94-119	?- ?
6	56	64-66	78-82	78-86	86-96	102-116	126-129	114-139	126-149	?- ?
7	67	79	93-97	94-103	105-115	123-139	132-155	?-167	154-179	?- ?
8	77-78	92	120	114-120	124-134	146-162	?-181	?-159	١٦٩-209	?- ?
9	89-90	105	128-131	137	147-153	167-185	?-207	?-223	١٩٥-239	?- ?
10	100-102	118-119	142-148	154	172	192-208	?-233	?-251	221-269	?- ?
11		132-133	159-164	166-171	191	223-231	?-259	?-279	247-299	?- ?
12		145-147	180-181	182-189	204-210	254-254	?-285	?-307	273-329	?- ?
13			195-199	204-207	225-230	277	301-311	315-335	312-359	?- ?
14			210-214	221-225	242-250	278-301	326-337	351-363	338-389	?- ?
15			231	239-243	262-27١	311-325	?-363	379-391	407-419	?- ?
16				256-261	285-290	332-349	?-389	?-419	436-449	46٦
17					305-31١	335-373	?-415	?-447	?-479	49٧
18					324-330	376-397	?-441	468-475	455-509	?- ?
19						399-421	?-467	?-503	?-539	?- ?
20						420-445	480-493	?-531	?-569	?- ?
21						461-479	501-519	?-559	574-599	?- ?
22						484-503	527-545	?-587	572-629	?- ?
23							558-571	?-615	?-659	?- ?
24							576-597	624-643	637-689	?- ?
25								652-671	696-719	?- ?
26								676-699	702-749	?- ?
27									754-779	?- ?
28									784-809	?- ?
29										?- ?
30										?- ?

نلاحظ من الجدول في أعلاه أن القيم العظمى $m_r(2,q)$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ عندما تكون $3 \le r \le 30$ مجهولة باستثناء الاقواس− (466,16),(497,17) لذلك

كان هدفنا منذ البداية إيجاد هذه القيم ، اذ اننا استطعنا الحصول عليها ولأول مرة إذ إنه لا توجد قيم منشورة لحد الآن وتم ذلك باستخدام برنامج حاسوبي وهذه القيم للأقواس (k,r)-هي:

القوس _(41,3)، القوس _(66,4)، القوس _(92,5)، القوس _(120,6)، القوس _(147,7)، القوس _(175,8)، القوس _(204,9)، القوس _(234,10)، القوس _(263,11)، القوس _(294,12)، القوس _(324,13)، القوس _(357,14)،القوس _(385,15)، القوس _(415,16)، القوس _(447,17)، القوس _(478,18)، القوس _(509,19)، القوس _(541,20)،القوس _(572,21)، القوس _(604,22)، القوس _(636,23)، القوس _(670,24)، القوس _(703,25)، القوس _(736,26)،القوس _(770,27)، القوس_(804,28)، القوس_(841,29) وأخيراالقوس_(879,30)

ومثال على ذلك نقاط القوس _(66,4):−

القوس	نقاط القوس
(66,4)	379 0 1 2 3 5 89 155 423 851 246 310 337 748 729 348 88 438 261 83 441 708 138 399 299 119 389 887 467 102 29 683 170 165 284 825 331 205 670 628 171 727 792 816 604 478 965 939 28 448 662 184 658 645 755 877 326 991 283 900 192 142 464 193 355 764

(1.4) تحسين القيم العظمى للأقواس_ (k,r) باستخدام معادلة المخروطي:_

في هذا البند قمنا بتحسين بعض قيم $m_r(2,q)$ وذلك باستخدام معادلة ا لمخروطي الخاصة بالمستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ لقيم $3 \le r \le 30$.إن معادلة المخروطي الذي وقع عليه اختيارنا له هي:

$$29x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$$

وهذا المخروطي يكافئ إسقاطياً جميع المخروطيات الباقية في المستوي ، وبذلك استطعنا الحصول على الأقواس الجديدة الآتية في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$:

القوس _(44,3)، القوس _(67,4)، القوس _(93,5)، القوس _ (121,6)،القوس _(148,7)، القوس_(176,8)،القوس_(205,9) واخيرا القوس_(235,10)

ومثال على ذلك نقاط القوس _(67,4):−

القوس	نقاط القوس
(67,4)	0 1 2 4 17 100 124 130 159 164 348 354 361 372 496 504 571 638

689 701 706 742 783 855 860 862 873 903 930 943 953 955 65 3 85	
282 401 586 116 200 711 692 850 550 68 166 761 142 709 234 417	
344 818 751 390 919 376 225 785 136 187 509 897 547 406 510 577	

(1.5) بعض التعاريف المهمة :-

(1.5.1) المدار *The Orbit* [12]:-

لتكن M مصفوفة من الرتبة n عناصرها تنتمي إلى حقل $GF(31)$ ، وليكن $PG(2,q)$ مستوياً اسقاطياً ومعرف على الحقل نفسه فان المتتابعة $p, p_1, p_2, \ldots, p_n = p$ تسمى مداراً أيسر لـ p إذا كانت $p_i = pM^i$ ، وتسمى مداراً أيمن إذا كانت $p_i = M^i p$ لكل $r \le n,\ i = 1,2,\ldots,n$

(1.5.2) مصفوفة الوقوع *The Incidence Matrix* [19]:_

تعرف مصفوفة الوقوع بأنها مصفوفة مربعة $S = (s_{ij})$ ذات سعة مساوية لعدد نقاط المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ حيث أن نقاط وخطوط هذا المستوي تمثل أعمدة وأسطر هذه المصفوقة على التوالي ، حيث أن $s_{ij} = 1$ إذا كانت النقطة p_j واقعة على خط L_i و $s_{ij} = 0$ فيما عدا ذلك لكل $i, j = 1,2,3,\ldots, q^2 + q + 1$.

$$m(\ell, p) = \begin{cases} 1 & \text{if p } is \text{ a subspace of } \ell \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1.6) زمر الإسقاط *Group of the projectivity* [15] :

(1.6.1) زمرة الإسقاط *the projectivity Group* [15] :

هي زمرة كل الإسقاطات للفضاء الاسقاطي $PG(n-1,q)$ ويرمز لها بالرمز $PGL(n,q)$.

(1.6.2) زمرة الاستقامة *The Collineation Group* [15]:

هي زمرة تحوي كل الاستقامات للفضاء الاسقاطي $PG(n-1,q)$ ويرمز لها بالرمز $PTL(n,q)$.

(1.6.3) الزمرة الخطية العامة *The General Linear Group* [15]:

ليكن $V = V(n,q)$ فضاء متجهات ذا بعد n معرف على الحقل المنتهي $GF(q)$ ، الزمرة الخطية العامة *Bijective linear Transformations* لـ V والتي يرمز لها بالرمز $GL(n,q)$ ،ويمكن أن تعرف بأنها زمرة كل المصفوفات المربعة غير المنفردة المعرفة على الحقل نفسه.

(1.6.4) الزمرة TL(n,q) [15] :

تعرف الزمرة $TL(n,q)$ بأنها زمرة التحويلات التقابلية شبه الخطية (*semi linear*) لفضاء المتجهات $V(n,q)$ ذي بعد n والمعرف على الحقل المنتهي $GF(q)$.

(1.6.5) الزمرة الخطية الخاصة *The special linear Group* [15]:

تعرف الزمرة الخطية الخاصة $SL(n,q)$ بأنها الزمرة الجزئية (*Sub-group*) من زمرة التحويلات الخطية $GL(n,q)$ التي محدد عناصرها مساوٍ لواحد.

(1.6.6) مبرهنة [15]:

في الفضاء الإسقاطي $PG(n,q)$ يتحقق الآتي:

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{n},\mathrm{q})=|\mathrm{PGL}(\mathrm{n},\mathrm{q})|=\mathrm{q}^{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)/2}[2,\mathrm{n}]_{-}.$$

$$2-|\mathrm{PTL}(\mathrm{n},\mathrm{q})|=hp(\mathrm{n},\mathrm{q}).$$

$$3-|\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathrm{q})|=\mathrm{q}^{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)/2}[1,\mathrm{n}]_{-}$$

$$4-|\mathrm{TL}(\mathrm{n},\mathrm{q})|=h\mathrm{q}^{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)/2}[1,\mathrm{n}]_{-}$$

$$5-|S\mathrm{L}(\mathrm{n},\mathrm{q})|=\mathrm{P}(\mathrm{n},\mathrm{q})$$

(١.٧) تحسين القيم العظمى للأقواس_(k,r) في PG(2,q)

نظراً لكون طريقة المتبعة في البند السابق بطيئة نوعاً ما وتستغرق وقتاً طويلاً مع زيادة الأقواس المطلوب تحسينها لذلك ارتأينا إلى استخدام طريقة مصفوفة الوقوع لتحسين بعض القيم العظمى للأقواس (k,r)- كونها سريعة مقارنة بالطريقة السابقة ، حيث أنها سبق وأن استخدمت على حقول أصغر من الحقل $GF(31)$ في [19,24] كما سنوضحها لاحقاً.

(1.7.1) حل المعادلات الخطية Solving linear equation [7]:

سنبدأ بالمستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ المعرف على الحقل المنتهي $GF(q)$ مع فضاء جزئي p والذي يحوي q^2+q+1 من النقاط ذو بعد _1 في $GF(q^3)$ والفضاء الجزئي L والذي يحوي q^2+q+1 من الخطوط ذو بعد_2 في $GF(q^3)$.

الآن سنعرف مصفوفة الوقوع S للمستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ بأنها مصفوفة عدد أعمدتها بعدد نقاط الم ستوي وأسطرها بعدد خطوط المستوي وعناصرها تشير إلى الفضائيي ن الجزئيين $l\in L, p\in P$ والمعرف كما يلي:

$$m(\ell,p)=\begin{cases}1 & \text{عندما } p\in\ell\\ 0 & \text{ماعدا ذلك}\end{cases}$$

(1.7.2) مبرهنة [7] :

يوجد قوس (k,n)- في المستوي ألإسقاطي $PG(2,q)$ إذا وفقط إذا وجد حل ١/٠، $x=(x_1,x_2,...,x_{|p|})$ للنظام الآتي:

$$1-\sum_{i=1}^{i=1p1} x_i = k$$

$$2-Sx\le\begin{pmatrix}r\\ \vdots\\ r\end{pmatrix}$$

ويوجد على الأقل خط في المستوي $PG(2,q)$ يحقق المساواة في ثانياً.

اذ اننا بواسطة ألأحداثي ذات القيمة واحد في متجه الحل x يمكننا تحديد النقاط التي تنتمي إلى القوس (k,r)-، ولكي نحصل على أقواس جديدة محسنة نستخدم نظام من المعادلات ولكون هذا النظام كبيراً سنعرف تشاكلاً ذاتياً $(Automorphism)$ $\varphi\in GL(3,q)$ لتقليصه،

ومن ثم البحث عن القوس K الذي يحقق الخاصية الآتية: $p\in K\Rightarrow\varphi(p)\in K$

هذا يعني بأن المصفوفة S للنظام والتي بجمع أعمدتها هي تقابل للنقاط الواقعة في المدار نفسه . وتعريف لخاصية الوقوع للمصفوفة S تحت تعريف التشاكل الذاتي أي أن:

$$p\subseteq\ell\Rightarrow\varphi(p)\in\varphi(\ell)$$

نحصل أخيراً على اندماج للنقاط في المدارات للصفوف المتطابقة في المصفـوفة بالنسبة لمدارات الخطوط إذا طبقنا التشاكل الذاتي على الخطوط.

وبهذا يتقلص حجم مصفوفة الوقوع المربعة (لكون عدد مدارات النقاط مساوي لعدد مدارات الخطوط) من ذات سعة مساوية لعدد نقاط المستوي (993*993) إلى ذات سعة مساوية لعدد مدارات المستوي(65*65).

سنرمز لمصفو فة الوقوع الجديدة S^G حيث أن G هي الزمرة المتولدة نتيجة استخدام التشاكل الذاتي φ، إن صفوف المصفوفة الجديدة S^G هي مدارات خطوط المستوي والتي سنرمز لها بالرمز $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$، أما أعمدتها فهي مدارات نقاط المستوي ورمزها $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m$.

كما أن عناصر المصفوفة S^G يمكن تعريفها بالعلاقة الآتية

$$S^G{}_{\mu_i,\sigma_j}=\left|\{p\in\sigma_j : p \;\; is \;\; subspace \;\; of \;\; \ell\}\right|$$

حيث إنَّ ℓ تمثل σ_i.

(1.7. 3) مبرهنة [7]:

يوجد قوس $(k,r)-$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ مع زمرة التشاكل $H\,(automorphism\_group)$ حيث أن $G \le H \le GL(3,q)$ إذا وفقط إذا وجد حل ثنائي 1/0 للنظام الآتي: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$

$$1-\sum |\sigma_i| x_i = k$$

$$2-S^G x^T \le \begin{pmatrix} r \\ r \\ . \\ . \\ . \\ r \end{pmatrix}$$

ويوجد على الأقل خط واحد في $PG(2,q)$ يحقق ثانياً.

ثم نحول نظام المتراجحات في المبرهنة في أعلاه إلى نظام معادلات وذلك للضرورة الحاسوبية وكالآتي:

$$\left[\begin{array}{c|c} S^G & \begin{matrix} -1 & 0 & \cdots & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & 0 \\ \vdots & . & \ddots & . & 0 \\ \vdots & . & . & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \\ \hline |\sigma_1|\ldots\ldots\ldots|\sigma_m| & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline k \end{array}\right]$$

فالمتغيرات $(y_1,y_2,\ldots,y_m) = y$ تأخذ إحدى القيم $\{0,1,2,\ldots,r\}$ والتي تمثل τ_i ، $i=0,1,2,\ldots r$ للقوس $(k,r)-$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وبحل هذا النظام سنحصل على القوس المطلوب.

(1.7.4) خوارزمية مصفوفة الوقوع [24]:

الخطوة الأولى :

حدد الإسقاط T مع النقطة الابتدائية $p_1 = (1\ 0\ 0)$ وحدد الحقل $GF(q)$.

الخطوة الثانية :

حدد المصفوفة المولدة g من الرتبة n ، $1< n<\theta(n)$.

الخطوة الثالثة :

أدخل k,r اللازمين لإيجاد القوس $(k,r)-$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$.

الخطوة الرابعة :

أحسب نقاط المستوي $PG(2,q)$ حيث أن $p_i = p_{(i-1)}$ T لكل $i = 2,\ldots,\theta(n)$.

الخطوة الخامسة :

أحسب مدارات نقاط المستوي σ بحسب العلاقة الآتية:

$d_i = g^{i-1}p, \forall \quad i = 1,2,\cdots,16$ ثم أوجد σ_P والتي هي المدارات اليمنى للمستوي حيث إنّ: $\sigma_P = \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, \cdots, |\sigma_m|\}$.

الخطوة السادسة :

أحسب مدارات خطوط المستوي μ بحسب العلاقة الآتية:

$d_i = pg^{i-1}, \forall \quad i = 1,2,\cdots,16$ وهي المدارات اليسرى لنقاط المستوي ثم أوجد μ_L حيث أن $\mu_L = \{|\mu_1|, |\mu_2|, \cdots, |\mu_m|\}$

الخطوة السابعة :

احسب S^G حيث إنّ:

$$S^G_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} \text{the number of the point of } \eta_j \text{ which orthogonal} \\ \text{with the generator of the orbit } \mu_i \end{array} \right\}$$

الخطوة الثامنة :حول نظام المتراجحات الدايوف يني $\sum|\sigma_i|x_i = k$, $S^G X^T \le r$ إلى نظام المعادلات الدايوفيني

$$\begin{pmatrix} S^G{}_{m*m} & -I_{m*m} \\ |\sigma|_{1*m} & 0_{1*m} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \\ y \\ \vdots \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ - \\ k \end{pmatrix}$$

الخطوة التاسعة :

حل نظام المعادلات الدايوفيني بحيث أن قيمة x_i لكل $i=1,2,\ldots,m$ تتحدد بقيمتين $(1,0)$ وقيمة y_i لكل $i=1,2,\ldots,m$ تتحدد بالقيم $0,\ldots,n$.

الخطوة العاشرة :

في حالة عدم وجود حل لنظام المعادلات الدايوفيني اجعل $k = k - |\sigma_i|$ وإلا اذهب إلى الخطوة الحادية عشرة.

الخطوة الحادية عشرة :

أطبع الحل بجزئيه حيث أن $x_i=1$ ، $i=1,\ldots,m$ يعني أن نقاط المدار σ_i هو جزء من القوس المطلوب (k,r) , y_i لكل $i=1,\ldots,m$ يشير إلى قيمة القاطع للقوس.

(1.8) تحسين القيم العظمى للأقواس_(k,r) باستخدام مصفوفة الوقوع

قمنا في هذا البند بتحسين بعض القيم العظمى $m_r(2,q)$ للأقواس $(k,r)-$ التامة عندما $4 \le r \le 6$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ وذلك بحل نظام المعادلات الدايوفنتينية (*System of Diophantine Equation*) الذي أعتمد على استخدام مصفوفة الوقو ع (*Incidence Matrix*) وفيما يلي شرح مفصل لتحسين القوس_(93,5):

(1.8.1) تحسين القوس_(93,5) في المستوي الاسقاطي PG(2,31) :

في هذا البند قمنا بتحسين القوس_(93,5) في $PG(2,31)$ باستخدام طريقة مصفوفة الوقوع وذلك بتقليص هذه المصرفوفة من ذات سعة 993*993 إلى ذات سعة 65*65.

قمنا بتتقسيم نقاط المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$ إلى مدارات وذلك عن طر يق الضرب بالمصفوفة g ، اذ أن $<g>$ هي زمرة من الرتبة السادسة عشرة وعناصرها من الحقل $GF(31)$وأن عدد المدارات هي 65 مداراً والمصفوفة التي تم اختيارها هي

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

لتكون زمرة جزئية مولدة وبلختيار النقطة الابتدائية $p_1 = (1 \ \ 0 \ \ 0)$ فان نقط المدار الأيمن نحصل عليه من العلاقة الآتية: $d_i = pg^{i-1}, \forall \quad i = 1,2,\cdots,16$

وبهذا فان نقاط المدار الأول ستكون كالآتي:

$$\sigma_1 = G((1,0,0)) = \begin{Bmatrix} (1,0,0),(1,1,2),(1,17,10),(1,8,17),(1,10,19),(1,13,23),(1,10,30),(1,4,3) \\ (1,13,18),(1,19,15),(1,28,30),(1,22,3),(1,19,10),(1,22,14),(1,24,16),(1,15,23) \end{Bmatrix}$$

وان المدار الأول وباقي المدارات موضحة في الجدول (2.3).

جدول (2.3)

orbit 1	1	642	788	769	258	366	863	41	854	862	12	621	882	669	133	932
orbit 2	2	201	950	940	171	878	35	61	924	215	594	518	706	293	174	72
orbit 3	3	563	184	855	172	626	510	234	488	241	646	292	615	404	910	305
orbit 4	4	988	989	549	181	770	797	32	177	209	890	95	644	489	604	597
orbit 5	5	517	421	232	942	726	722	156	778	887	486	470	15	146	532	618
orbit 6	6	972	75	587	393	827	268	131	858	658	712	188	913	963	740	228
orbit 7	7	244	153	169	814	613	737	866	859	271	727	279	754	151	956	767
orbit 8	8	556	702	605	63	791	122	785	919	990	102	553	375	104	848	765
orbit 9	9	540	678	220	180	69	297	492	224	199	783	141	870	753	728	806
orbit 10	10	525	813	542	312	723	364	490	477	691	501	369	505	502	237	739
orbit 11	11	178	136	914	86	295	383	252	668	160	203	964	944	659	904	757
orbit 12	13	529	311	94	760	607	674	934	453	346	619	303	322	921	560	249
orbit 13	14	747	959	39	793	494	514	554	408	675	159	721	586	868	175	50

orbit 14	16	269	107	817	272	80	682	945	969	189	573	231	111	344	483	645
orbit 15	17	900	144	405	238	436	358	903	464	121	78	820	349	993	289	130
orbit 16	18	261	270	53	930	343	243	565	51	79	387	294	512	729	43	438
orbit 17	19	325	286	551	528	359	48	277	132	37	226	27	200	21	826	773
orbit 18	20	933	106	129	406	736	672	825	221	467	561	190	239	579	207	568
orbit 19	22	342	681	966	213	208	713	789	864	896	230	979	204	951	828	310
orbit 20	23	44	309	166	865	536	304	952	926	741	766	876	526	690	68	609
orbit 21	24	265	845	749	60	452	623	786	112	143	819	836	688	257	139	796
orbit 22	25	807	640	110	627	287	853	860	365	377	370	251	448	893	456	260
orbit 23	26	953	541	879	222	569	590	772	288	247	978	91	152	666	968	673
orbit 24	28	497	262	980	455	125	461	350	918	435	52	479	161	379	431	329
orbit 25	29	425	649	884	123	832	852	909	495	958	655	764	402	135	657	582
orbit 26	30	835	40	285	685	167	889	328	96	450	308	971	92	49	631	697
orbit 27	31	84	317	484	416	768	128	500	821	816	608	67	59	699	684	851
orbit 28	33	356	761	301	581	197	661	717	974	981	871	273	451	409	837	127
orbit 29	34	651	351	267	593	400	750	134	714	150	476	917	652	687	776	163
orbit 30	36	202	101	401	846	278	584	109	885	480	225	454	954	922	185	191
orbit 31	38	840	762	302	575	611	192	960	906	282	936	531	499	654	641	458
orbit 32	42	648	440	472	427	413	784	931	98	679	236	137	899	781	509	229
orbit 33	45	46	716	449	386	398	233	635	977	911	469	330	58	176	420	88
orbit 34	47	394	927	566	442	367	873	227	333	588	636	973	591	266	598	539
orbit 35	54	74	124	733	103	513	73	186	388	665	93	155	194	439	426	115
orbit 36	55	120	522	711	392	521	430	523	738	574	850	700	983	692	154	869
orbit 37	56	805	991	537	693	577	975	475	725	352	253	943	849	445	397	148
orbit 38	57	283	187	168	970	580	90	89	694	992	630	782	242	898	314	212
orbit 39	62	839	337	707	790	412	315	108	841	842	967	915	250	634	145	545
orbit 40	64	653	223	307	880	564	198	948	614	787	677	391	872	689	756	355
orbit 41	65	216	403	811	299	745	414	809	847	589	498	263	157	535	182	313
orbit 42	66	70	138	670	592	493	219	633	218	318	755	527	170	478	205	759
orbit 43	71	468	895	808	411	639	620	585	892	894	929	116	362	676	643	949
orbit 44	76	775	794	424	731	622	256	546	730	246	275	705	647	543	601	361
orbit 45	77	779	511	407	319	410	140	965	81	718	883	149	547	399	530	482
orbit 46	82	316	735	696	465	300	415	100	372	376	326	683	695	334	332	444
orbit 47	83	803	824	165	861	363	751	457	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 48	85	795	354	558	823	274	662	709	982	720	912	838	571	360	335	422
orbit 49	87	324	704	217	724	147	142	986	555	617	347	515	818	259	460	158
orbit 50	97	548	920	534	396	660	533	822	339	856	291	298	928	578	357	520
orbit 51	99	196	897	625	417	947	758	875	338	801	382	798	281	916	389	255
orbit 52	105	867	503	752	834	671	710	447	441	833	719	576	373	544	353	434
orbit 53	113	800	374	701	829	395	624	901	474	320	471	572	777	437	487	179
orbit 54	114	888	602	296	732	938	491	780	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 55	117	680	902	264	748	629	599	610	946	955	907	290	698	600	284	235
orbit 56	118	874	473	380	925	183	962	616	519	162	612	886	583	746	327	935
orbit 57	119	606	433	961	446	418	206	348	857	663	323	390	432	126	667	708
orbit 58	164	908	715	550	508	802	524	799	485	650	214	905	507	211	245	976
orbit 59	173	419	831	792	321	957	774	742	276	340	881	987	459	686	877	506
orbit 60	193	552	984	810	595	331	628	637	843	248	384	429	385	664	830	632
orbit 61	195	443	428	815	423	462	771	481	937	844	567	985	638	378	941	210
orbit 62	240	734	923	570	559	496	280	504	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 63	254	656	463	341	744	466	345	804	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 64	306	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 65	336	371	743	516	368	939	562	891	763	596	381	812	603	538	557	703

وقمنا بحساب المدارات اليسرى والتي تمثل مدارات خطوط المستوي بالطريقة نفسها وبحسب العلاقة الآتية: $d_i = pg^{i-1}, \forall \quad i = 1,2,\cdots,16$ وان أول مدار أيسر هو:

$$\mu_1 = G((1,0,0)) = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),(1,1,1),(1,9,9),(1,29,29),(1,20,20),(1,12,12) \\ (1,3,3),(1,23,23) \end{array} \right\}$$

و الجدول (2.4) يتضمن 65 مداراً أيسرا.

الجدول (2.4)

orbit 1	1	572	708	51	930	910	36	676	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 2	2	642	393	586	204	5	970	771	817	797	630	616	820	67	287	753
orbit 3	3	855	604	61	199	567	524	114	341	470	411	349	80	366	891	305
orbit 4	4	669	206	993	45	31	756	56	625	307	629	475	658	62	845	164
orbit 5	6	97	358	284	666	953	645	757	438	542	404	889	814	598	192	492
orbit 6	7	690	315	251	410	865	719	111	942	776	217	707	388	149	785	764
orbit 7	8	268	955	934	460	920	188	422	27	496	412	133	826	505	751	168
orbit 8	9	628	327	159	160	59	304	611	537	32	617	522	511	40	883	465
orbit 9	10	568	533	489	893	39	452	55	925	334	990	186	770	184	692	486
orbit 10	11	787	428	277	744	75	163	47	74	585	562	394	933	575	868	173
orbit 11	12	977	361	48	507	254	100	323	232	540	281	86	699	332	732	105
orbit 12	13	824	882	590	777	693	725	499	872	178	657	618	654	582	876	745
orbit 13	14	437	259	639	356	92	306	136	570	856	171	844	368	37	754	35
orbit 14	15	986	391	908	276	959	88	643	234	464	600	703	648	329	415	698
orbit 15	16	249	446	427	609	501	49	350	794	673	715	194	267	473	140	901
orbit 16	17	110	664	435	624	170	594	781	338	145	541	484	679	946	633	779
orbit 17	18	818	841	107	73	244	378	773	588	321	162	875	362	293	330	352
orbit 18	19	263	87	29	476	354	488	390	974	449	512	766	93	252	68	424
orbit 19	20	44	870	655	317	916	202	459	614	127	626	126	613	326	444	674
orbit 20	21	939	911	638	858	242	907	668	557	167	714	892	647	395	241	759
orbit 21	22	201	548	843	142	534	730	477	878	172	835	325	526	308	262	566
orbit 22	23	454	43	442	364	712	99	423	153	979	982	197	670	297	123	472
orbit 23	24	948	546	216	667	266	148	980	336	790	527	701	98	748	474	81
orbit 24	25	758	480	483	651	961	798	218	560	42	253	374	445	641	543	704
orbit 25	26	112	741	924	369	917	161	71	455	132	635	203	493	82	851	899
orbit 26	28	740	550	94	383	702	723	270	96	152	809	954	549	687	408	832
orbit 27	30	426	951	282	747	884	382	233	830	207	686	918	205	634	240	413
orbit 28	33	141	311	536	726	515	811	615	41	689	752	200	523	544	558	671
orbit 29	34	583	54	377	513	688	298	196	502	981	601	869	510	749	578	384
orbit 30	38	139	314	414	932	137	922	847	945	784	406	439	64	828	260	347
orbit 31	46	231	709	577	457	433	130	239	83	767	605	944	176	302	827	874
orbit 32	50	272	793	301	166	495	169	419	722	516	482	392	912	678	957	379
orbit 33	52	84	65	960	881	791	978	706	246	873	400	76	417	935	662	556
orbit 34	53	861	497	825	721	441	812	926	70	367	155	174	275	370	409	621
orbit 35	57	579	432	310	576	559	532	914	292	973	554	494	796	800	833	122
orbit 36	58	478	212	573	380	903	69	923	179	940	985	219	711	466	943	900
orbit 37	60	799	458	987	815	680	102	632	498	181	879	425	443	836	887	760
orbit 38	63	407	877	650	846	976	322	863	592	729	77	952	131	561	531	198
orbit 39	66	226	822	351	258	659	503	247	279	115	989	612	902	768	429	804

orbit 40	72	528	595	121	134	348	481	778	988	309	823	620	95	431	118	803
orbit 41	78	518	521	765	508	571	185	288	829	228	831	565	652	530	738	695
orbit 42	79	230	363	716	269	938	113	401	735	420	928	243	644	520	772	705
orbit 43	85	717	958	103	467	718	862	535	849	734	547	471	761	397	975	737
orbit 44	89	434	255	150	116	810	333	289	936	839	227	430	866	193	238	728
orbit 45	90	421	834	299	964	677	788	727	448	867	373	261	236	296	965	237
orbit 46	91	215	213	591	921	700	640	580	539	335	713	403	763	128	313	290
orbit 47	101	151	450	675	490	245	661	463	389	956	312	775	210	344	436	248
orbit 48	104	929	663	143	468	755	256	119	129	627	154	653	859	694	895	950
orbit 49	106	608	584	905	331	191	208	525	235	180	623	984	915	545	927	991
orbit 50	108	816	783	710	894	837	294	182	607	552	697	880	345	211	418	564
orbit 51	109	637	720	340	316	405	157	214	221	801	320	398	385	682	342	509
orbit 52	117	223	782	983	175	286	896	736	853	553	280	265	124	291	273	229
orbit 53	120	456	264	656	685	399	376	906	962	806	742	733	746	821	318	479
orbit 54	125	769	931	165	842	743	972	724	937	257	631	224	387	660	372	848
orbit 55	135	355	619	750	589	622	324	731	337	506	365	146	684	319	487	183
orbit 56	138	885	819	177	808	381	359	587	190	462	802	969	968	593	225	371
orbit 57	144	187	339	807	485	691	250	529	519	396	453	328	375	780	898	158
orbit 58	147	681	581	795	852	209	500	649	904	672	805	596	854	574	739	538
orbit 59	156	274	295	786	897	357	813	683	300	278	971	440	913	992	514	599
orbit 60	189	569	451	909	665	762	346	857	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 61	195	949	860	963	461	517	888	343	491	947	555	222	864	636	941	606
orbit 62	220	850	967	469	597	602	360	447	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 63	271	386	886	402	610	840	563	838	0	0	0	0	0	0	0	0
orbit 64	283	603	551	303	966	792	919	285	789	696	504	353	774	646	890	416
orbit 65	871	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ومن ثم اختيار العنصر المولد للمدار μ_i ليحل محل μ_i ليكون أسطر المصفوفة S^G مع المدارات اليمنى لتكون أعمدة المصفوفة S^G وحساب عدد نقاط المدار σ_j المتعامدة مع العنصر المولد للمدار μ_i لكل $i,j=1,2,\ldots,65$ لتكون عناصر المصفوفة S^G والتي تكون كما يأتي:

2 ٠ ٢ 0 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 2 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 2 0 2 1 0 2 2 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0
1 ١ ١ 0 0 0 0 0 2 2 0 2 0 0 1 0 0 2 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 2 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 2
1 ١ ١ 0 2 0 0 0 0 0 2 0 2 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 2 2 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 2 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 ١ ١ 0 0 1 0 0 0 2 0 0 2 2 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 2 2 2 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 2 0 0 1 0 0 0
0 ٠ ٢ 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 2 1 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 2 0 0 0 0
1 ٠ ١ 0 0 1 0 0 0 2 2 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 2 0 1 1 1 0 0 2 0 1 0 0 1 0 2 1 0 0 0 1 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 1 0 0
0 ١ ٠ 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 2 1 1 1 1 0 0 0 0 2 2 2 1 0 1 2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 2 2 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 0
1 ١ ٠ 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 2 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 2 0 2 0 0 0 0 0 1 2 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 2 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0
1 ١ ٠ 0 0 0 0 0 2 0 0 0 2 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 2 0 1 1 0 0 0 1 0 0 2 0 0 1 1 2 1 0 0 1 0 0 2 0 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 ٠ ٠ 1 1 2 1 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1
1 ٠ ٠ 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 2 0 0 0 1 0 0 2 2 0 2 0 0 0 0 0 1 2 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 2 1 1 0 0 1 1 0 0 2
2 ٠ ٢ 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 2 0 0 2 0 1 0 1 0 0 2 0 1 1 1 0 2 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 2 0 0 0 1
2 ١ ٠ 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0 2 0 0 1 0 1 2 0 2 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 1 1 1 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0
1 ٠ ٠ 2 0 0 0 1 0 1 0 0 2 0 0 0 1 2 1 1 1 0 2 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 2 1 0 0 0 1 0 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0
0 ٢ ٢ 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 2 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 2 2 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 2 0 1 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 0 2 0 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 1 0 1 0 0 1 2 1 1 1 0 2 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 2 1 1 0 2 1 0 1 0 0
0 ٠ ١ 0 0 1 2 0 2 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 2 0 1 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 2 1 0 0 2 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0
0 ٢ ٢ 0 1 0 1 2 0 1 1 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 2 0 0 1 1 1 0 0 2 0 1 0 0 0 0 0 1
0 ١ ١ 2 0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 1 1 2 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 2 0 0 1 1 2 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 2 0 0 2 0 0 1 0 0 0
0 ٠ ٠ 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 2 1 0 2 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 2 1 2 1 2 0 0 0 1 1 0 0 0 0 2 1 0 2 0 0 0 1

1 ٠ ٠ 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 2 2 0 0 0 2 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 2 1 0 1 2 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 2 0 1 1 0 0 0 0 0
0 ٢ ٠ 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 1 1 2 1 0 1 0 1 2 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 2 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 2 2 0 1 0 0 2 0 0 2 0 0 0 0 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 1 0 0 0 0 2 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
1 ٠ ١ 0 0 1 0 1 0 2 0 0 0 2 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 2 0 2 0 2 2 0 0 0 0 1 0 1 0 0
0 ١ ٠ 2 0 1 0 1 0 0 0 0 0 2 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 2 0 1 1 0 0 2 0 0 0 1 2 1 1 2 0 2 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
1 ٠ ١ 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 1 2 0 0 1 1 2 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 2 2 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 2
0 ٠ ٢ 1 0 2 1 0 1 0 0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 2 0 1 0 0 0 2 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 2 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 2 0 0 0 0 0 0 0
1 ٠ ١ 2 2 1 2 1 0 0 0 2 2 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 2 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 ١ ١ 0 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 2 2 0 0 1 0 0 2 1 0 1 0 1 2 2 2 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0
1 ١ ٠ 2 0 0 0 0 0 2 2 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 2 1 1 0 1 0 0 2 0 1 0 0 0 0 0 2 2 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0
0 ٠ ١ 0 0 1 0 0 0 0 0 0 2 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 1 0 2 0 0 1 2 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 2 0 0 1 0 2
1 ٠ ١ 2 0 0 0 1 0 0 2 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 2 0 0 1 0 0 2 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 2 0 0 0 2 1 1 1 0 1 0 1 0 2
1 ٠ ٠ 0 0 1 0 1 2 0 0 2 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 2 0 0 1 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0 1 1 2 0 1 0 1 0 0
0 ٢ ٠ 1 1 2 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 2 0 2 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 2 0 0 1 2 0 0 0 0
2 ٢ ٠ 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 2 0 0 0 1 0 1 2 2 2 1 0 0 0 1 0 0 2 1 1 0 0 0 0 1
1 ١ ٠ 2 0 0 2 0 0 0 0 0 0 2 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 2 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 1 0 0
0 ١ ٠ 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 2 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 2 2 0 2 0 0 0 2 2 1 1 0 0 2
0 ٠ ٠ 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 2 0 2 0 2 0 1 2 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 2 1 2 1 0 1 0 1 0 1 1 2 0 0 1 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 2 2 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0 1 0 0 1 0 0 2 1 0 1 0 0 2 2 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 2 0 0 0 0
2 ٠ ١ 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 2 1 0 2 0 0 0 2 0 0 0 1 0 1 2 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 2 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 2 1 1 0 0 0 0 0
1 ٠ ٠ 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 2 0 1 0 2 0 1 0 2 1 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 2 0 1 1 2 0 1 1 0 0 0
0 ٠ ٠ 0 0 0 2 1 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 2 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 2 1 1 2 0 0 0 0 0 1 1 0 0 2 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1
2 ٠ ٠ 0 1 2 0 0 1 1 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 0 2 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 0 0 0 0
0 ١ ١ 0 0 0 2 1 1 2 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 2 0 0 0 0 2 0 1 0 0 1 2 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 2 1 1 0 0 0
0 ٠ ٠ 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 2 0 0 2 2 2 0 0 2 2 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 0 1 2 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 2 0 0 0 1 0 2 2 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 2 0 1 1 0 1 0 1 0 2 1 1 0 0 0 0 0
0 ٠ ٠ 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 2 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 1 0 0 2 0 2 0 0 1 0 2 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 2 0 1 0 2 0 0 0 0 0 2 2 0 1 1 0 0 2 0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 2 1 0 2 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 1 0 1 1 2 0 0 1 0 1 0 2 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 1 2 2 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 2 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 ٠ ٢ 0 0 0 0 2 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 2 0 0 2 1 2 1 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 2 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0
1 ٠ ١ 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 2 1 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 2 0 0 0 1 0 0 0 1 2 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 1 1 0 0 0
0 ٠ ٠ 1 1 0 0 2 1 1 1 1 0 1 0 2 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0 1 2 0 1 1 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 2 0 1 0 0 0 0 0
0 ٠ ٢ 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 2 1 1 0 2 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 2 0 0 1 2 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 2 0 1 1 1 0 0 0 1
0 ٢ ٠ 0 1 0 0 2 1 1 1 0 1 0 0 2 0 1 0 0 2 0 1 0 2 0 2 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 2 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
2 ٠ ٠ 0 0 0 1 2 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 2 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 2 2 1 2 0 2 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 1 1 2 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 1 1 0 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1
0 ٠ ٠ 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 0 1 2 0 0 2 1 0 0 1 0 2 0 1 1 1 0 0 2 0 1 1 0 0 0 0 0
0 ١ ٠ 0 0 1 2 1 2 0 2 0 2 2 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 2
2 ٢ ٠ 0 0 2 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 0 2 2 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 2 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1
0 ٢ ٠ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 0 2 0 0 2 0 2 0 2 2 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 2 0 0 1 0
0 ١ ١ 0 0 1 0 0 0 0 2 2 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 2 0 0 1 0 2 0 0 1 0 0 2 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 2 1 0 1 1 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 ٠ ٠ 0 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 2 0 0 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 2 2 0 0 2 0 0 0 1 1 0
0 ٠ ٠ 2 2 0 0 0 2 0 2 2 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 0 1 2
0 ١ ١ 0 2 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 2 1 0 1 0 0 2 0 2 0 2 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 0 1 0 0
0 ٠ ٠ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 0 0 0 0 0 0 8 0 0 0 0 0 0 0 0 8 8 0 0

بواسطة مصفوفة الوقوع المقلصة وحجم مدارات النقاط $\sigma = \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, \cdots, |\sigma_{65}| \}$

(16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,
16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,8,
16,16,16,16,16,16,8,16,16,16,16,16,16,16,8,8,1,16)

وبالتعويض في (1.7.3) نحصل على :-

$$1 - \sum |\sigma_i| x_i = 96$$

$$2 - S^G x^T \le \begin{pmatrix} 5 \\ \vdots \\ 5 \end{pmatrix}$$

وباستخدام البرنامج *solve* حصلنا على الحل

x = (0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)

ومن هذا الحل نتعرف على المدارات التي اتحادها يشكل القوس المطلوب اذ ان $x_7 = 1$ في الحل أعلاه يعني أن المدار σ_7 هو جزء من القوس ،وأخيراً نحصل على القوس (96,5) الذي هو اتحاد $\{\sigma_7, \sigma_{22}, \sigma_{24}, \sigma_{29}, \sigma_{45}, \sigma_{49}\}$ ونقاطه هي موضحة في الجدول أدناه:

جدول (2.5)

نقاط القوس						القوس
87	77	34	28	25	7	(96,5)
324	779	651	497	807	244	
704	511	351	262	640	153	
217	407	267	980	110	169	
724	319	593	455	627	814	
147	410	400	125	287	613	
142	140	750	461	853	737	
986	965	134	350	860	866	
555	81	714	918	365	859	
617	718	150	435	377	271	
347	883	476	52	370	727	
515	149	917	479	251	279	
818	547	652	161	448	754	
259	399	687	379	893	151	
460	530	776	431	456	956	
158	482	163	329	260	767	

اذ ان أول ستة عشرة نقطة تشير إلى المدار السابع وللحصول على توزيع القواطع سنأخذ الجزء الثاني من الحل باستخدام برنامج *solve* للحصول على y هي :

y = [2 1 3 1 5 5 4 5 5 5 5 3 1 2 2 4 4 5 2 5 3 2 5 2 5 3 1 4 4 3 0 0 5 2 4 5 1
4 3 4 0 5 0 4 3 3 3 5 3 5 3 0 4 0 3 3 2 4 5 4 4 4 2 0 0]

مع حجم مدارات الخطوط التي هي

(8,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16
,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,
16,16,16,16,16,16,16,16,16,16,8,16,8,8,16,١)

نلاحظ أن $y_1 = 2$ يعني أن ثمانية خطوط في المدار الأول تقطع القوس بـ 2 نقطة.

وكذلك نلاحظ أن $y_{31}=0$ يعني أن ستة عشر خط في المدار الإحدى والثلاثين لايقطع القوس بأية نقطة. وبمقارنة عدد مدارات الخطوط مع الجزء الثاني من الحل يمكننا حساب عدد القواطع T_i وكالآتي:

$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5)$=(١١٣,80,128,٢٠٨,208,256)

(1.8.2) الأقواس_(k,r) المحسنة في PG(2,31) :-

باستخدام خوارزمية مصفوفة الوقوع وباستخدام البرنامج *solve* تم الحصول على الحلول الثنائية للنظام الدايوفيني في المبرهنة (1.7.3) الذي مكننا من الحصول على الأقو اس المحسنة الآتية، سنقوم بذكر الحل الثنائي وبجعل هذا الحل مدخ لا للبرنامج *point* سنحصل على نقاط القوس المبينة في الجدول أدناه.

القوس_(68,4)

x = (0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)

y = (4 2 2 1 2 0 2 0 2 3 1 0 1 2 2 1 2 0 3 3 0 0 4 3 0 3 3 3 4 0 0 2 4 1 1 3 4 2 4 2 4 4 4 3 1 3 4 4 3 4 4 4 4 3 1 1 1 1 0 4 1 3 3 4 4 3 4 4 3 4 4 0 1 2 4 0 3 1 0 1 1 4 4 1 1 3 3 1 0 4 4 3 3 4 2 3 0 2 3 2 3 1 0 2 1 0 3 4 1 1 3 2 2 0 3 1 3 2 1 4 2 4 0 3 2 0 4 2 0)

مع حجم مدارات الخطوط التي هي:

(4,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,4,8,8,8,8,8,8, 8,8,4,8,8,8,4,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,4,8,8,4,1,8,4)

جدول (2.6)

القوس	نقاط القوس								
(68,4)	3	4	14	19	٣١	٨٤	١١٦	١٥٣	١٨٦
	420	983	887	189	٩٥٠	٩٩٣	٤٠٤	٢٥٢	٥٧١
	937	385	318	240	٤٥١	٧٣٥	٨٤٤	٦٦٣	٤٣٧
	836	386	347	891	٥٩٦	٦٩٦	٦٨٦	٧٨٨	٢٧٧
	688	269	312	795	٥١٢	٨٢٠	٨٩٧		72١
	771	193	522	521	٥٧٧	٤٨٤	٧٢٥		٦٠٨
	45	319	847	77	629	461	71٣		٢٥٥
	305	485	334	278	191	٨٥٨	٦٨٠		٧٧٣

القوس_(128,6)

x = (0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1)

y = (0 6 2 5 6 1 2 4 2 5 6 5 4 4 5 5 4 4 3 5 0 3 6 0 6 5 6 6 6 6 6 6 6 4 6 5 6 3 5 1 6 6 6 1 4 6 4 4 6 6 3 2 4 3 1 6 3 2 5 4 6 2 6 4 0 0)

جدول (2.7)

القوس	نقاط القوس							
(128,6)	4	7	28	30	54	62	164	336
	988	244	497	835	74	839	908	371
	989	153	262	40	124	337	715	743
	549	169	980	285	733	707	550	516
	181	814	455	685	103	790	508	368
	770	613	125	167	513	412	802	939

	562	524	315	73	889	461	737	797
	891	799	108	186	328	350	866	32
	763	485	841	388	96	918	859	177
	596	650	842	665	450	435	271	209
	381	214	967	93	308	52	727	890
	812	905	915	155	971	479	279	95
	603	507	250	194	92	161	754	644
	538	211	634	439	49	379	151	489
	557	245	145	426	631	431	956	604
	703	976	545	115	697	329	767	597

(1.9) القيم الصغرى $t_r(2,q)$ للأقواس_(k,r) التامة في PG(2,31) :-

إن الاهتمام الكبير الذي تلقاه القيم العظمى $m_r(2,q)$ للأقواس $(k,r)-$ التامة في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ لايتناسب مع قلة الأبحاث التي تطرقت إلى إيجاد القيم الصغرى $t_r(2,q)$لهذه الأقواس ،كما أن إتباع أسلوب متسلسل للحصول على القيم العظمى يمر أولاً بالقيم الصغرى لهذا أمكن الاستفادة من المراجع ,[2],[10],[14],[20],[21],[22],[23] للحصول منها على بعض هذه القيم عندما $r = 2,3,4,5$ و $2 \le q \le 31$.

وفيما يأتي جدول يوضح القيم الصغرى $t_r(2,q)$ المضبوطة لبعض r,q .

q	2	3	4	5	7	8	9	11	13	16	17	19	23	25	27	29	31
$t_2(2,q)$	4	4	6	6	6	6	6	7	8	9	10	10	10	12	12	13	14
$t_3(2,q)$	7	7	7	9	9	11	12	14	15								
$t_4(2,q)$		13	12	13													
$t_5(2,q)$							26										

إن الاهتمام القليل الذي تلقاه قيم $t_2(2,31)$ لقيم $3 \le r \le 30$ قد دفع بنا إلى إيجاد هذه القيم وذلك من خلال برنامج حاسوبي وهذه القيم موضحة في الجدول الآتي:

r	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$t_r(2,31)$	29	48	67	87	109	131	161	179	204	228	255	280	308	334
r	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t_r(2,31)$	362	384	412	448	475	506	533	571	603	644	682	731	776	828

علماً أن القيمة $t_2(2,31)$ منشورة من قبل العالم *(Davydov)* وآخرون [10]. وبذلك استطعنا أن نثبـت عدم وجود بعض الأقواس التامة عندما *r=3* كما هو موضح في المبرهنة الآتية:

(1.9.1) مبرهنة :

إن الأقواس $-(k,r)$ التامة غير موجودة لقيم $4 \le k \le 14$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,31)$.

البرهان :

أولاً: أفرض أن $k = 14$ من المبرهنة (1.1.4) نحصل على

$\tau_3 \ge 33$ ....(A)

الآن باستخدام المعادلتين (4),(5) في المبرهنة (1.1.1) نحصل على:

$R_1+R_2+R_3 = 32$ ....(4')

$R_2+2R_3 = 13$ ....(5')

ينتج من هذا أن كل الحلول غير السالبة التي تحقق المعادلتين (4')، (5') يمكن تمثيلها بالجدول الآتي :-

نوع النقطة	R_1	R_2	R_3
α_1	١٩	13	0
α_2	٢٠	11	1
α_3	21	9	2
α_4	22	7	3
α_5	23	5	4
α_6	24	3	5
α_7	25	1	6

وبالاستفادة من المبرهنة (1.1.2) نحصل على

$$3\tau_3 = 6\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$$

$$\le \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\, 6() = 6(14)$$

$\tau_3 \le 28$ ......(B)

من (A),(B) نحصل على تناقض.

∴ لا يوجد قوس تام من النمط (14,3) في $PG(2,31)$.

ثانياً: الحالات عندما $4 \le k \le 13$ يتم البرهان بنفس الطريقة أعلاه.

المصادر

1) AL-Kilidar, A. O. (1999), Classification and construction for (K,3)-arcs in projective plane over Galois field, M.Sc. Thesis; Baghdad University.

2) Aziz, S. M. (2001), On lower bound for complete (k,n)_arc in PG(2,q), M.Sc. thesis, Mosul University.

3) Ball, S. and Blokhuis, A.(1998), An easier proof of the maximal arcs conjecture, Trans. Amer. Math. Soc. 126, 3377-3380.

4) Ball, S. and Hirschfeld, J. W. P. (2005), Bounds on (n,r)-arcs and their application to linear http://www.elsevier.com/locate/ffa codes.

5) Barlotti. A., (1965) Some topics in finite geometrical structures, Mimeo series, 439, Institute of Statistics, University of Carolina.

6) Blokhuis, A. (1994), Note on the size of a blocking set in PG(2,p), Combinatorica. 14, 111-114.

7) Braun, M.; Kohnert, A. and Wassermann, A. (2005), Constraction of (n,r)-arcs in PG(2,q), Innovations in Incidence Geometry, Vol.1, 133-141.

8) Bruen, A. A. (1982), Note: Lower bounds for complete {k,n}-arcs, J. Combinatorial theory series A33, pp. 109-111.

9) Daskalov, R. N. (2004), On the existence and the nonexistence of some (k,r)-arcs in PG(2,17), in: Proceedings of Ninth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Kranevo, Bulgaria, 95-100.

10) Davydov, A. A, Faina, G. Marcugini, S. and Pambianco, F. (2005), Computer Search in projective planes for the size of complete arcs. J of Geometry. 82, p.p. 50-62.

11) Denniston, R. H. F. (1969), Some maximal arcs in finite projective planes, J. Combin. Theory, 6, 317-319.

12) Dornhoff, L. L. and Honhn, F. E., (1977), "Applied Modern Algebra", Macmillan Puplishing Go.Inc.

13) Hill, R. and Mason, J. R. (1981), On (k,n)-arcs and the falsity of the Lunelli _Sce conjecture, in: London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 49, CUP, 153-168.

14) Hirschfeld, J. W. P. and Storme, L. (2001), The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces, update 2001, in: Finite Geometries, Developments in Mathematics 3, Kluwer, 201-246.

15) Hirschfeld, J. W. P. (1979), Projective Geometries over Finite Fields, Oxford University Press, oxford.

16) Ibrahim, A. B. (2005), "Construction of the Maximum Arcs in PG(2,13)", M.Sc.Thesis,University of Mosul.

17) Kasim, B. A. (2001), "The Maximal Value for (k,4)-arcs", M.Sc. thesis, University of Mosul.

18) L. Lunelli and M. Sce, (1964), Considerazioni arithmetiche e resultati sperimentali sui {K;n} archi, Ist. Lombardo Accad. Sci. Rend. A 98, 3-52.

19) Mohammed, H. H, (2005), The Maximum Size of (n,r)-Arc in The projective plane PG(2,q), M.Sc. thesis, University of Mosul.

20) Mohammed, M. J. Classification of (k,3)-arcs and (k,4)-arcs in projective plane over Galois field, M.Sc. Thesis. University of Mosul

21) Mohammed, F. H. (2004), Construction of (k,5)-arcs in Desrguian plane, M.Sc. Thesis, University of Mosul.

22) Thas, J. A. (1987), "Complete arcs and algebraic curves in PG(2,q)", J. Algebra. Vol. 106, No. 2, April 1, 451-464.

23) Yasin, A. L. (1986), Cubic arcs in the projective plane of order eight, Ph.D. Thesis,University of Sussex.

24) Younis, S. A. (2008), The packing problem in projective Geometry, M.Sc. Thesis, University of Mosul.