حل مسائل القيم الحدودية الخطية ذات الشروط الحدودية غير المنتهية باستخدام طريقة الفروقات المنتهية التصحيحية

احمد انتصار غثيث
قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

سوسن سامي إسماعيل
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

الاستلام
٠٦ / ١١ / ٢٠٠٩

القبول
٠٥ / ٠٥ / ٢٠١٠

ABSTRACT

The purpose of the research is to solve second order linear boundary value problems in which one of the boundary condition is infinity (∞). The research aims at finding approximate value for these problems by using finite differences method, then the problems are solved by using finite deferred correction.

الملخص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو حل مسائل القيم الحدودية الخطية ذات الشروط غير المنتهية التي يكون فيها إحدى الشروط (∞) وإيجاد قيم تقريبية لها باستخدام طريقة الفروقات المنتهية ثم حل المسألة باستخدام طريقة الفروقات المنتهية التصحيحية.

1- مقدمة

حاول L. Fox في عام (1947) إضافة الشروط من اجل ح ل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية. وعن طريق تطبيق طرائق عددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية اذ تستبدل الاشتقاقات فيها بمكافئاتها في طريقة الفروقات المنتهية (Finite Difference) وعادة ما تكون سلسلة منتهية من الفروقات . المطلوب هو الحصول على دقة افضل . وطبقت هذه الطريقة في ثمانية نماذج متضمنة معادلات تفاضلية جزئية واعتيادية ومسائل القيم الهندسية ومسائل أكثر صعوبة لمنحنيات الحدود [1] .

ولقد أيد كل من V. Pereyra و E.G. Sewell في عام (1975) ضرورة تطوير إجراءات اختبار الشبكة من اجل استخدام تقارب ا لفروقات المنتهية مع شبكات غير منتظمة في مسائل القيم الحدودية . وقام Pereyra و Sewell في دراستهما بتوسيع التقنيات التي استخدمت في متعددة الحدود التقريبية ، والتي تسمح بوجود تراكيب شبكات متساوية التوزيع . وبهذه الطريقة استخدم Pereyra و Sewell الشبكات على خطأ ا لبتر المحلي للطريقة . وان الخطأ غير المثبت (المطور) يقيم الطرائق التي تستخدم شبكات متساوية التوزيع وهو المطلوب [3].

وصف R.D. Skeel في عام (1981) التقانة العامة للنتائج الدقيقة المثبتة لحلول التصحيحات المرجعة لمعادلات تفاضلية . وهذه التقانات تطبق كذلك في التق يمات الحاسوبية لخطأ التقطيع المحلي[4].

شرح S. Gupta في عام (1985) استخدام طرائق الفروقات المنتهية التي تضم صفات كل من عمليات رانج–كوتا و Gap ومشاريعهم ومقترحاتهم كقوانين تكيفية للحل لأول معادلات تفاضلية اعتيادية ذات شروط حدودية لنقطتين . ولقد تمت المحاولة من أجل نظام ذي شروط قد تكون اقل عددا . كما وصف نظاماً متنوعاً وحلاً تفاضلياً محدداً ومتنوع الخطوة مستخدما طرائق ضمنية لهذا النوع [5].

قام JeffR.Cash و J.C.Butcher في عام (1996) بحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة باستخدام طريقة رانج – كوتا [6].

كما قام JeffR.Cash في عام (2001) بوضع خوارزمية جديدة لحل مسائل القيم الحدودية غير الخطية باستخدام continuation strategy وقد تم الحصول على نتائج جيدة [7].

2- تحسين الخطأ Deferred correction

في بداية سنة [1947] دعا Leslie Fox لتقنية تسمى (Difference Corrections). خلال السنوات اللاحقة قام بتطبيق هذه التقنية الجديدة على مجموعة منوعة من المسائل في المعادلات التفاضلية والتكاملية . وفي عام [1962] وجد Fox معلومات ثرية عن تقنية حديثة جداً في المدرسة الإنكليزية وهو موضوع (Deferred Corrections) [2].

تعد طريقة تحسين الخطأ المكررة شائعة جداً للحلول العددية لمسائل القيم الحدودية غير الخطية ذات النقطتين من الرتبة الأولى . وقد افترض فوكس الفكرة الأساسية ومن ثم تم افتراض وتحليل أشكال مختلفة وعديدة لتحسين الخطأ حيث طور Lindberg تحسين الخطأ وبشكل خاص وفيما يأتي نقدم وصفاً موجزاً لهذه الطريقة

لدينا مسائل القيم الحدودية غير الخطية ذات النقطتين من الرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), a \le x \le b, g(y(a), y(b)) = 0 \text{..........................}(1)$$

ولتكن ϕ_p صيغة من نوع Runge-Kutta من الرتبة p . وهذا يكون نظاماً من المعادلات الجبرية غير الخطية .

$$\phi_p(\eta) = 0 \text{.....................}(2)$$

على افتراض ان $\phi_p + r$ هي صيغة من نوع Runge-Kutta من الرتبة $p+r$ ، والطريقة الأساسية لتحسين الخطأ التي افترضها Lindberg هي كالأتي :

$$\phi_p(\eta) = 0 \text{.....................}(3)$$

$$\phi_p(\bar{\eta}) = -\phi_{p+r}(\eta) \text{................}(4)$$

إن مفهوم تحسين الخطأ $-\phi_{p+r}(\eta)$ في المعادلة (4) للصيغ ذات الرتب المنخفضة وببساطة يقدم مقياساً لقطع الخطأ المحلي ϕ_p. وهذه الفكرة يمكن توسيعها لتشمل الكثير من تكرارات تحسين الخطأ وخاصة الخوارزمية الأساسية ذات الرمز الشائع الاستخدام وهذا البرنامج (TWPBVP.f) والمكتوب بلغة فورتران حيث تتوفر هذه في صفحات الويب وهي

$$\begin{aligned}
&\phi_4(\eta) = 0 \\
&\phi_4(\bar{\eta}) = -\phi_6(\eta) \qquad \text{..............................}(5) \\
&\phi_4(\bar{\eta}) = -\phi_6(\eta) - \phi_8(\bar{\eta})
\end{aligned}$$

حيث إن ϕ_8, ϕ_6, ϕ_4 هي صيغ Runge-Kutta من نوع صيغ MIRK من الرتبة 8,6,4 على التوالي [8].

3- الخوارزمية

3-1 خوارزمية لحل مسائل القيم الحدودية الخطية ذات الشروط الحدودية غير المنتهية

لتكن مسألة القيم الحدودية الخطية من الرتبة الثانية

$$y'' = f(x)y(x) + g(x)$$

والشروط الحدودية

$$y(a) = A$$
$$y(\infty) = B$$

1- نقوم بتغيير الشرط الثاني عندما

$$y(\infty) \to B$$
$$b \to \infty$$

فأن

$$y(b^N) = B$$
$$b^{(N)} = a + (N+1)h$$

نقوم باختيار $\in$ذات قيمة صغيرة جداً.

2- نقوم باستخدام طريقة الفروقات المنتهية:

ولتكن

$$f_n = f_n(x), g_n = g_n(x)$$

$$\frac{y_{n+1} - 2y_2 + y_{n-1}}{h^2} = f_n y_n + g_n$$

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f_n y_n + h^2 g_n$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f_n y_n + h^2 g_n$$

$$y_{n+1} = (2 + h^2 f_n) y_n - y_{n-1} + h^2 g_n ....(6)$$

3- نقوم بالتعويض عن $n = 1,2,3................$ N+1 في المعادلة (10)

$$y_2 = (2 + h^2 f_1) y_1 - y_0 + h^2 g_1$$

وان $y_0 = A, y_{n+1} = B$

$$B = (2 + h^2 f_1) y_1 - A + h^2 g_1$$

$$B = (2 + h^2 f_1) y_1 - A + h^2 g_1$$

$$y_1 = \frac{B + A - h^2 g_1}{2 + h^2 f_1}$$

4- ونستمر إلى أن نحصل على

$$\left| y_{(n)}{}^{(N+1)} - y_{(n)}{}^{(N)} \right| < \in$$

نتوقف بعدها.

5- نأخذ قيمة n التي توصلنا إليها ونعوضها في الشرط الثاني.

3-2 خوارزمية لحل مسائل القيم الحدودية بلستخدام طريقة الفروقات المنتهية التصحيحية : [7,1]

-1

$$h = \frac{(x(b) - x(a))}{N}$$

$$k = \frac{(y(B) - y(A))}{N}$$

-2

$$x(i) = x(a) + (i-1)h$$

$$y(i) = y(A) + (i-1)k \qquad i = 1,\dots.n$$

It = 0

3- نستدعي الدالة (المسألة) F

4- $$Z(i) = y(i-1) - 2y(i) + y(i+1) - (\frac{h^2}{12})[F(i-1) + 10F(i) + F(i+1)]$$

5- نستدعي المشتقة F_y .

6- نحسب

$$m(i-1)=(\frac{5h^2}{6})F_y(i)+2$$

$$l(i)=(\frac{h^2}{12})F_y(i)-1$$

$$u(i-1)=(\frac{h^2}{12})F_y(i+1)-1 \qquad i=2,\ldots\ldots n$$

7- نستدعي الدالة المثلثية ومنها نحصل على Z جديدة.

it=it+1

8- $i=2,\ldots\ldots,n$

$$y(i)=y(i)+Z(i)$$

إذا حسبنا الدالة D مرة واحدة نتوقف.

If it < 10

اذهب إلى الخطوة (3).

-9

$$V(5)=\frac{1}{(k+1)(2k+1)}-\frac{1}{6} \quad , \ k=4$$

$$V(7)=\frac{1}{(k+1)(2k+1)}-\frac{1}{6} \quad , \ k=6$$

10- نستدعي D لكي نحصل على قيمة جديدة لـ Z(i) .

11- $Z(i)=-h^2.Z(i) \qquad i=2,\ldots\ldots,n$

اذهب إلى الخطوة (5).

3-2-1 خوارزمية الدالة D وهي عبارة عن حساب : Deferred Correction وهو

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{8}a_j\frac{y^{(j)}(x)}{j!}.h^j$$

j= 0,1,2,…..,n-7

s=0 ، m=1

$$m=m*i$$

$$s=s+\frac{\left(a(i).y(j+i)*h^i\right)}{m} \qquad i=1,\ldots,8$$

Z(k)=s k=2, ….,n

4- الجانب التطبيقي

تم في هذا الجانب اخذ مسألتين من مسائل القيم الحدودية الخطية وحل الم سألة الأولى بشكل موضح وكيفية الحصول على قيمة تقريبية لـ (∞) باستخدام الخوارزمية (3-1) ثم حل المسألة باستخدام الخوارزمية (3-2) وبواسطة برنامج (MATLAB) والحصول على نسبة خطأ صغيرة جداً بين الحل المضبوط والحل التقريبي ورسمهما.

مسألة 1 : لنكن لدينا مسألة القيم الحدودية

$$y'' = 2y - e^{-x}$$

والشروط الحدودية

$$y(0) = 1, y(\infty) = 0$$

والحل المضبوط لها

$$y(x) = e^{-x}$$

1- باستخدام الخوارزمية (3-1)

نأخذ $h = 0.5$ و $\in = 10^{-8}$

$$\frac{-y_{n+1} + 2y_2 - y_{n-1}}{h^2} + 2y_n = e^{-x_n}$$

$$-y_{n+1} + 2y_n - y_{n-1} + 0.5y_n = 0.25e^{-\frac{n}{2}}$$

$$y_{n+1} = 2.5y_n - y_{n-1} - 0.25e^{-\frac{n}{2}} \text{.................}(7)$$

وبالتعويض عن $n = 1,2,3$................ في المعادلة (7) نحصل على :

$$y_2 = 2.5y_1 - y_0 - 0.25e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = 2.5y_1 - 1 - 0.25e^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض عن $y_2 = 0$ نحصل على

$$0 = 2.5y_1 - 1 - 0.25e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_1 = (1 + 0.25e^{-\frac{1}{2}}) / 2.5$$

$$y_1 = 0.46065$$

$$y_3 = 2.5y_2 - y_1 - 0.25e^{-1}$$

$$y_3 = 2.5(2.5y_1 - 1 - 0.25e^{-0.5}) - y_1 - 0.25e^{-1}$$

$$y_3 = \frac{21}{4}y_1 - \frac{5}{2} - \frac{5}{8}e^{-0.5} - \frac{1}{4}e^{-1}$$

وبالتعويض عن $y_3 = 0$ نحصل على

$$y_1 = (\frac{5}{2} + \frac{5}{8}e^{-0.5} + \frac{1}{4}e^{-1}) / \frac{21}{4}$$

$$y_1 = 0.56591$$

$$|0.5659 - 0.4606| < 10^{-8}$$

ولكن

$$|0.1053| > 10^{-8}$$

وهكذا نستمر فنحصل على

$$y_4 = \frac{85}{8}y_1 - \frac{21}{4} - \frac{21}{16}e^{-0.5} - \frac{5}{8}e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-1.5}$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$y_{20}=\frac{3.6650387e+011}{524288}y_1\frac{9.1625968e+010}{262144}-\frac{9.1625968e+010}{262144}e^{-0.5}$$
$$-\frac{2.2906492e+010}{65536}e^{-1}-\frac{5726623061}{262144}e^{-1.5}-\frac{1431655765}{131072}e^{-2}$$
$$-\frac{357913941}{65536}e^{-2.5}-\frac{89478485}{32768}e^{-3}-\frac{22369621}{16384}e^{-3.5}-\frac{5592405}{8192}e^{-4}$$
$$-\frac{1398101}{4096}e^{-4.5}-\frac{349525}{2048}e^{-5}-\frac{87381}{1024}e^{-5.5}-\frac{21845}{512}e^{-6}-\frac{5461}{256}e^{-6.5}-\frac{1365}{128}e^{-7}$$
$$-\frac{341}{64}e^{-7.5}-\frac{85}{32}e^{-8}-\frac{21}{16}e^{-8.5}-\frac{5}{8}e^{-9}-\frac{1}{4}e^{-9.5}$$

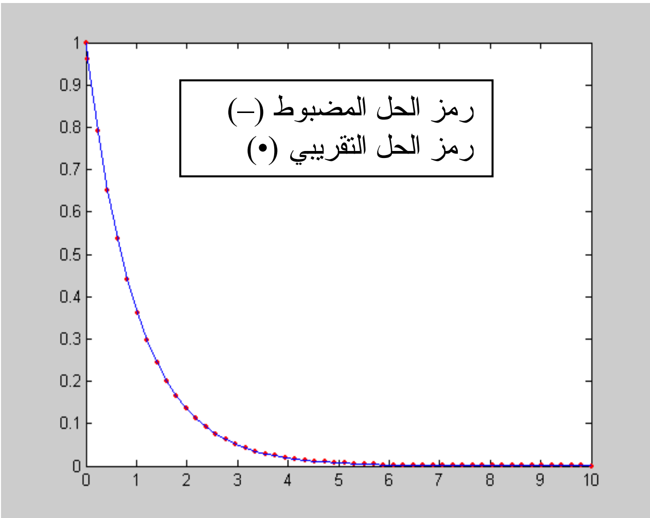
∴ توصلنا إلى n=19 فيصبح الشرط الثاني كما يأتي:

$$b^{(N+1)}=a+(n+1)h$$
$$b^{(20)}=0+(19+1)\frac{1}{2}$$
$$\therefore b^{(20)}=10$$

فتصبح الشروط الحدودية كما يأتي:

$$y(0)=1, y(10)\cong 0$$

2- الآن نقوم بحل هذا المسألة بطريقة الفروقات المنتهية التصحيحية (الخوارزمية (2-3)). وقد حصلنا على اكبر نسبة خطأ بين الحل المضبوط والحل التقريبي ومقدارها $4.54E-005$



الشكل (1): مقارنة بين الحل العددي والحل المضبوط للمسألة (1)

مسألة 2 : لتكن لدينا مسألة القيم الحدودية

$$y''=4y-8$$

والشروط الحدودية

$$y(0)=4, y(\infty)=2$$

والحل المضبوط لها

$$y(x)=2e^{-2x}+2$$

1- باستخدام الخوارزمية (3-1)

نأخذ $h=0.5$ و $\in=10^{-8}$

وبحلها بنفس الطريقة أعلاه توصلنا إلى n=21 فيصبح الشرط الثاني كما يأتي :

$$b^{(N+1)}=a+(n+1)h$$

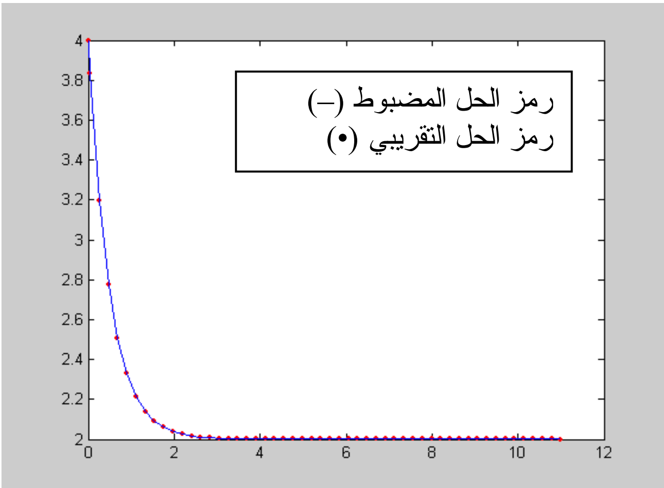
$$b^{(22)}=0+(21+1)*\frac{1}{2}$$

$$\therefore b^{(22)}=11$$

فتصبح الشروط الحدودية كما يأتي :

$$y(0)=4, y(11)\cong 2$$

2- الآن نقوم بحل هذا المسألة بطريقة الفروقات المنتهية التصحيحية (الخوارزمية(3-2)). وقد حصلنا على اكبر نسبة خطأ بين الحل المضبوط والحل التقريبي ومقدارها 8.3450E − 008



الشكل (2): مقارنة بين الحل العددي والحل المضبوط للمسألة (2)

5- الاستنتاجات:

إن أهم ما تناوله البحث هو حل مسائل القيم الحدودية الخطية من الرتبة الثانية . إذ تم استخدام طريقة الفروقات المنتهية لإيجاد قيمة تقريبية لـ (∞) الشرط الحدودي الثاني ثم استخدام طريقة الفروقات المنتهية التصحيحية لإيجاد حل المسألة وقد حصلنا على قيمة خطأ صغيرة جداً للمسالتين ورسم الحل المضبوط والحل التقريبي وقد تم استخدام برنامج (MATLAB).

المسألة	نسبة الخطأ
1	4.54E − 005
2	8.3450E − 008

المصــادر

1) Fox, L., Some improvement in the use of relaxation methods of ordinary and partial differential equations, Proc. Roy. Soc.,190, 31-59,(1947).

2) pereyra. V., high order finite difference solution of differential equations,school of humanities and sciences Stanford university April, (1973) .

3) Pereyra, V. and E. G. Sewell, Mesh selection for discrete solution of boundary problems in ordinary differential equations, Numer, Math., 23, 621-268,(1975).

4) Skeel, R. D., A theoretical framework for proving accuracy results for deferred corrections, SIAM J. Numer, Anal,. 19, 171-196, (1981).

5) Gupta, S., An adaptive boundary value Runge-Kutta solver for first order boundary value problems, SIAM J. Numer. Anal.25, 114-115., (1985).

6) J. C. Butcher, JeffR. Cash, DESI Methods for Stiff Initial-Value Problems, ACM Trans. Math. Softw. 22(4): 401-422(1996).

7) JeffR. Cash, An automatic continuation strategy for the solution of singularly perturbed nonlinear boundary value problems, ACM Trans. Math. Softw. 27(2): 245-266(2001).

8) Cash J. R.; Moore D. R.; Sumarti N.; Van Daele M. ,highly stable deferred correction scheme with interpolant for systems of nonlinear two-point boundary value problems, Department of: Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 155, Number2, 15 June, pp. 339-358(20), (2003).