إيجاد الحل العددي التقريبي لبعض مسائل القيم الحدودية الخطية الصلبة من الرتبة الثانية باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد والاندراج

محمد عبد الرزاق محمد الطائي   صهيب عبد الجبار عبد الباقي

قسم علوم الحاسبات / كلية التربية

جامعة الموصل

الاستلام   القبول

٠٨ / ٠٣ / ٢٠٠٩   ٠٥ / ٠٥ / ٢٠٠٩

Abstract

The purpose of this research combining the algorithm of superposition with multiple shooting and interpolation designing for solving Stiff linear boundary value problems in ordinary differential equations. The new Technique is used for solving Stiff linear problems with very high efficiency.

الملخص

غرض البحث هو ربط خوارزمية التطابق مع القذف المتعدد والاندراج المبتكرة لحل مسائل القيم الحدودية الخطية الصلبة في المعادلات التفاضلية الاعتيادية . استخدمت الطريقة الجديدة في حل المسائل الخطية الصلبة بكفاءة عالية جداً.

١- المقدمة:

بصورة عامة نرى بأن الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية يمكن أن تتوسع لحل نظام من المعادلات ذات الرتب العليا ولكن مجهزة بالشروط الابتدائية عند نفس نقطة النهاية للفترة [a,b] (end point) إما a أو b وهذا ما يسمى بمسألة قيمة ابتدائية (IVPs) ولكن في هذا البحث سوف نفصل كيفية الحصول على الحل التقريبي لمسائل القيم الحدودية الصلبة (Stiff BVPs) المعادلات التفاضلية بالشروط المفروضة عند نقاط مختلفة. ونلاحظ ذلك بوضوح في المسائل الفيزيائية حيث تعتمد الموقع أكثر من الزمن وفي

اغلب الأحيان توصف المسألة الفيزيائية بمعادلة تفاضلية بالشروط المفروضة عند أكثر من نقطة ويتجسم ذلك في معادلة الجريان الحراري.[6]

أما في ما يخص معنى المسائل الصلبة فأنها ظهرت المسائل الصلبة منذ نصف قرن مضى، ومضت عليها بضع سنين من الإهمال حتى قال العالم G.Dahlquist "في حوالي 1960 ... أصبح كل واحد مدركاً أن العالم مليء بالمسائل الصلبة".

استخدمت مسائل القيم الابتدائية عند دراسة حركة النابض ذات الصلابة المختلفة ومنها اشتقت المسالة اسمها.[5]

كان أول ظهور لمصطلح الصلابة في بحث لـ Gurtiss & Hirschfelder (1952) في مسالة في علم الكيمياء الحركية. إذ قاما باقتراح أول مجموعة من صيغ التكامل العددية الملائمة لمسائل القيم الابتدائية الصلبة. [١٣]

أصبح النظام الصلب مع عدد من التطبيقات المهمة مثل الكيمياء والهندسة وعلم الكيمياء الحركية وشبكة المعلومات ونظريات السيطرة ودراسة حركة النابض، وأشياء علمية مهمة والمساحة الناتجة من مسائل القيم الابتدائية أنظمة متعلقة بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تصور الظاهرة (حادثة يمكن ملاحظتها) والتي تكون معروفة بأنها متصلبة. [١١]

وفي السنوات الأخيرة ابتكرت طرائق عددية لحل المعادلة التفاضلية الصلبة وتم تطبيق قسم منها بنجاح على أنواع معينة من المعادلات التفاضلية الصلبة ومع ذلك فمن غير المعروف حتى الآن كيفية التعامل على نحو فعال مع هذه المشكلات الحسابية عموماً.

٢- مفاهيم :

- المعادلة التفاضلية الصلبة : هي المعادلة التي لها حل أسي (Exponential Solution) $e^{\lambda x}$، إذ λ تمتلك قيما مختلفة إلى حد كبير واصغر قيمة لـ λ عبارة عن عدد سالب كبير وهذا الحل يقترب من الصفر مع زيادة قيمة x، وهو ما يعرف بالمعادلة التفاضلية الصلبة (الجافة) (Stiff Differential Equation). [٨، ١٢]

- يقال عن النظام الخطي $y' = Ay + f(x)$ بأنه صلب إذا كان

1. $\lambda_i<0$

لكل $i=1,2,\ldots,n$

2. $\max\limits_{i=1,..,n} |\lambda_i| \Big/ \min\limits_{i=1,..,n} |\lambda_i| > 1$

إذ A مصفوفة ثابتة متماثلة ذات بعد n و $\lambda_i , i = 1, \cdots, n$ هي قيم ذاتية (Eigenvalues) للمصفوفة A. [١٣]

❖ تتميز المسائل الصلبة (Stiff Problems) بحقيقة أن الحلول العددية للحركات البطيئة تشوش الحلول السريعة المجاورة. [٧]

٣- طريقة التطابق الخطي مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n [٩]

$$\frac{d^n y}{dx^n} + g_{n+1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + g_0(x)y = f(x) \qquad \ldots(1)$$

التي لها n من الشروط ولها حل عام

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x) \qquad \ldots(2)$$

إذ $y_*(x)$ تكامل جزئي نحصل عليه من حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة والتي لها قيم ابتدائية صفرية وهذا يعنى

$$y = 0\,,\ y' = 0\,,\ y'' = 0\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = 0$$

عندما x = a

و

$$\sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x)$$

هو حل متمم لـ $y_*(x)$ كل من $i=1\ldots n$ $y_i(x)$ نحصل عليه بحل الجزء المتجانس من المعادلة التفاضلية والتي تنتمي إلى القيم الابتدائية

$$y_i = 0\,,\ y_i' = 0\,,\ \ldots,\ y_i^{(i-1)} = 1\,,\ y_i^{(i)} = 0\,,\ \ldots,\ y_i^{(n-1)} = 0 \quad , \qquad x = a$$

إذ يتم حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة للحصول على ($y_*(x)$) وكذلك المعادلة التفاضلية المتجانسة للحصول على ($y_i(x)$) باستخدام إحدى الطرائق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية (طريقة أويلر أو طرائق رانج كوتا أو طريقة ادم أو غيرها من الطرائق العددية).

إذ يتم تخفيض رتبة المعادلة وتحويلها إلى نظام من n من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ويتم حلها عدديا باستخدام الشروط الابتدائية سابقة الذكر.

بعد حساب $y_*(x), y_i(x)$ نستخدم الشروط الابتدائية للمسالة الآتية

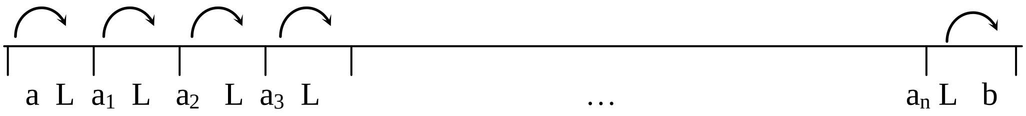
$$y'' = f(x, y, y') \quad x \in (a,b) \qquad y'(a) = \gamma \ \ y(a) = \alpha, \qquad \ldots(3)$$

لإيجاد قيم A_i $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

إذ نحصل عند تعويض الشروط الابتدائية للمسالة (3) بالمعادلة (2) على n من المعادلات الخطية و n من المجاهيل (A_i) إذ يتم حل المعادلات الخطية بإحدى طرائق حل

المعادلات الخطية (طريقة كاوس او طريقة كاوس جوردن) لنحصل على قيم A_i وهذه تمثل طريقة التطابق.

أما لتوضيح كيفية ربط التطابق (Superposition) مع القذف المتعدد فأن الطريقة تكمن في تجزئة فترة التكامل (a , b) إلى أجزاء صغيرة متماثلة في الطول (a,a_1), $(a_1,a_2),\dots,(a_n,b)$ ، حتى أن $L=a_1-a=a_2-a_1=\dots=b-a_n$ كما هو مبين في الشكل (١).



الشكل (١): يبين فيه كيفية عمل الطريقة الجديدة

إذ يتم استخدام الشروط الابتدائية في المعادلة (3) لأجراء التكامل على الفترة (a,a_1) باستخدام طريقة التطابق، إذ يتم

١) أيجاد قيم A_i $i=1\dots n$ من الشروط الابتدائية.

٢) حساب $y_*(x)$ على الجزء غير المتجانس للمعادلة على الفترة (a,a_1) .

٣) حساب $y_i(x)$ $i=1\cdots n$ على الجزء المتجانس للمعادلة على الفترة (a,a_1) .

٤) استخدام المعادلة (٢) لإيجاد قيم $y(x)$ على الفترة (a,a_1) .

٥) استخدام قيم $y(a_1)=b_1, y'(a_1)=b_2, y''(a_1)=b_3,\dots, y^{(n-1)}(a_1)=b_n$ بوضعها شروطاً ابتدائية على الفترة (a_1,a_2) .

وهكذا نعيد استخدام الخطوات من 1 إلى 5 على جميع الفترات $(a,a_1), (a_1,a_2),\dots,(a_n,b)$. إذ يتم في هذه الطريقة التخلص من تنامي الخطأ وذلك لان فترة التكامل متجزئة و سوف يتم في هذه الحالة بتر الخطأ قبل أن ينمو والبدء بتكامل جديد على الفترة الأخرى القادمة وهكذا إلى نهاية الفترات التي تعني نهاية التكامل.

٣-١ تطبيقات عددية :

سوف يتم في هذا البند استعراض النتائج العددية لبيان إمكان تطبيق الطريقة (التطابق Superposition) على مسائل القيم الابتدائية ، مع بيان مدى كفاءة الطريقة في هذه المسائل.

مثال (١):

حل مسألة القيمة الابتدائية [3]

$$y'' = 6y - 3xy' \qquad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0.1$$

نحول المعادلة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى بفرض. [٢]

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

فينتج

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0.1$$

١) نحصل على $y_*(x)$ من المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0$$

نحل النظام باستخدام إحدى الطرائق العددية لمسائل القيم الابتدائية (طريقة رانج كوتا أو طريقة ادم)

٢) نحصل على y_1 من المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0$$

٣) نحصل على y_2 من المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 1$$

٤) نعوض الشروط الابتدائية للمسالة في المعادلة (٢) فنحصل على معادلتين خطيتين بمجهولين (A_1 ,A_2) إذ يتم حلهما بإحدى طرائق حل المعادلة الخطية (طريقة كاوس مثلا) لنحصل على قيم A_1 , A_2 (يمكن حساب A_1,A_2 في هذه الحالة من البداية).

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{1=1}^{n} A_i y_i(x)$$

عندما $y(0)=1$

$$1 = 0+A_1+0A_2$$
$$0.1=0+0A_1+A_2$$
$$A_1=1$$
$$A_2=0.1$$

٥) نستخدم المعادلة(٢) للحصول على قيم $y(x)$ التي تقع بين $(0,1)$ وهى كالأتي:

الجدول (١):

حل المثال (١) يبين فيه إمكان تطبيق طريقة التطابق (Superposition) على مسائل القيم الابتدائية مع مقارنة الطريقة بطريقة رانج-كوتا

قيمة x	طريقة التطابق	طريقة رانج-كوتا
0.0	1.0000	1.0000
0.1	1.0401	1.0401
0.2	1.1404	1.1404
0.3	1.3013	1.3013
0.4	1.5231	1.5231
0.5	1.806	1.806
0.6	2.1501	2.1501
0.7	2.556	2.556
0.8	3.0234	3.0234
0.9	3.5526	3.5526
1.0	4.1437	4.1437

٤- خوارزمية التطابق مع القذف المتعدد والاندراج المبتكرة لحل مسائل القيم الحدودية:

ليكن لدينا مسألة قيم حدودية بالصيغة التالية

$$y'' = f(x, y, y') \qquad y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta \qquad x\in(a,b) \qquad \ldots (٤)$$

وبتخفيض المسألة أعلاه إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \quad y_1(a)=\alpha, \quad y_1(b)=\beta \qquad x\in(a,b) \qquad \ldots$$

(٥)

لحل النظام (٥) في الفترة (a,b) نحتاج إلى قيمة $y_2(a)$ المجهولة .للحصول على القيمة الحدودية المجهولة نتبع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى : بفرض قيمة تخمينية s_0 لـ $y_2(a)$ وحل النظام (٥) باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $(h\rangle 0), h$ في الفترة (a,b) نحصل على $y_1(b)=m_0$

الخطوة الثانية : بفرض قيمة تخمينية أخرى مختلفة s_1 لـ $y_2(a)$ وحل النظام (٥) باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h\ (h\rangle 0)$ في الفترة (a,b) نحصل على $y_1(b)=m_1$

وهكذا إلى :

الخطوة n : بفرض قيمة تخمينية أخرى مختلفة s_n لـ $y_2(a)$ وحل النظام (٥) باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h\ (h\rangle 0)$ في الفترة (a,b) نحصل على [2] $y_1(b)=m_n$.

وهكذا نحصل على جدول البيانات الأتي:

جدول (٢): القيم التخمينية والحلول المقابلة لها

$s_i=y_2(a)$	s_0	s_1	s_2	....	s_n
$m_i=y_1(b)$	m_0	m_1	m_2	....	m_n

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج باستخدام إحدى الصيغ (نيوتن النسبية ، المحدد، لاكرانج ،.....،الخ) يمكن إيجاد قيمة $y_2(a)$ التي تتوافق تبعا لـ[10] $y_1(b)=\beta$.

٤-١ تطبيقات عددية:

سوف يتم في هذا الفقرة استعراض النتائج العددية لبيان إمكان تطبيق الخوارزمية على مسائل القيم الحدودية الصلبة، مع بيان مدى كفاءة الطريقة في هذه المسائل.

مثال (٢):

حل مسألة القيمة الحدودية $y''=-1000y-1001y'$ ذات الشروط الحدودية $y(0)=2,\ y(1)=0.367879411$ ؟ (الحل المضبوط $y(x)=e^{-x}+e^{-1000x}$)

الحل:

إن فترة الاستقرارية لهذا المثال عند استخدام طريقة رانج- كوتا هي $\lambda h < 2.8$ إذ $\lambda=1000$ في هذه المسالة. [4,13]

إذا قيمة h يجب أن تكون $h < 0.0028$ أما في هذه الطريقة فقد تم التوصل إلى نتائج جيدة عندما تكون قيمة $h=0.025$.

وبتخفيض المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

ينتج لدينا

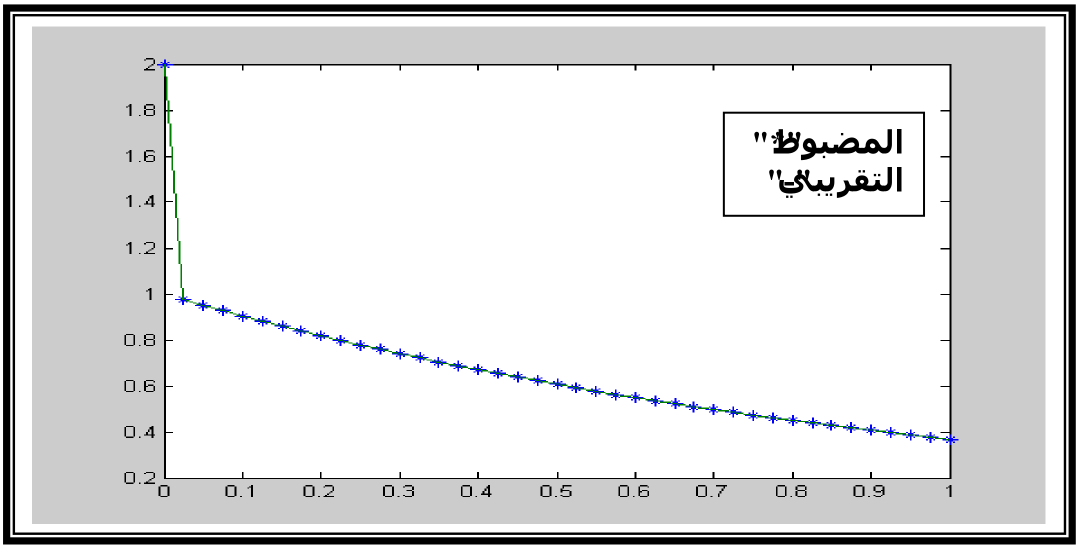
$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -1000 y_1 - 1001 y_2$$

لحل المسألة بالخوارزمية المبتكرة نفرض القيم التخمينية التالية لـ $y_2(0) = -1750, -1500, -1250, -1000, -750, -500, 0$ ونحل النظام باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h = 0.025$ نحصل على الجدول الأتي:

جدول (٣): القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (٢)

$s_i = y_2(0)$	$m_i = y_1(1)$
-1750	0.092061922
-1500	0.184123844
-1250	0.276185766
-1000	0.368247688
-750	0.460309611
-500	0.552371533
000	0.736495377

وبعكس الجدول أعلاه وعند إجراء الاندراج باستخدام صيغة الشريحة (Spline) [1] وتعويض $y_1(1) = 0.367879441$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0) = -1000.999998125$ بينما الحل المضبوط هو $y_2(0) = -1001$ أي إن مقدار الخطأ هو $1.875x10^{-6}$.



الشكل (٢): مقارنة الحل العددي بالمضبوط للمثال (٢)

مثال (٣)

حل مسألة القيمة الحدودية $y'' = -20y - 21y'$ ذات الشروط الحدودية $y(0) = 2\,,\, y(2) = 0.135335283$ ؟ (الحل المضبوط $y(x) = e^{-x} + e^{-20x}$)

الحل:

بتخفيض المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

ينتج لدينا

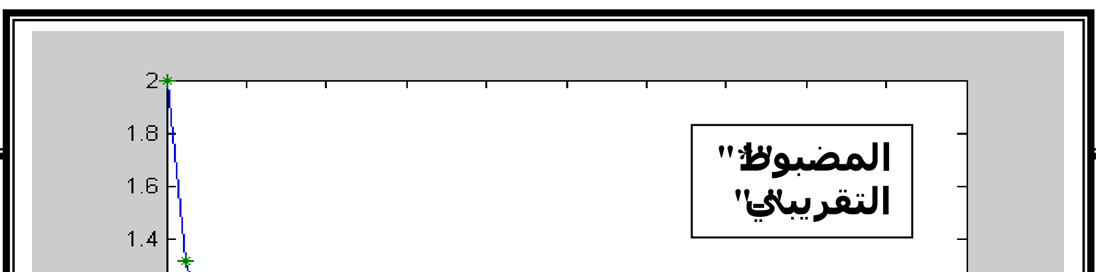
$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -20y_1 - 21y_2$$

لحل المسألة ب الخوارزمية المبتكرة نفرض القيم التخمينية التالية لـ $y_2(0) = -30,-20,-10,0,10,20,30$ ونحل النظام باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h = 0.05$ نحصل على الجدول الأتي :

جدول (٤): القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (٣)

$s_i = y_2(0)$	$m_i = y_1(2)$
-30	0.0712290964
-20	0.142458192
-10	0.213687289
00	0.284916385
10	0.356145482
20	0.427374578
30	0.498603675

وبعكس الجدول أعلاه وعند إجراء الاندراج باستخدام صيغة الشريحة (Spline) [1] وتعويض $y_1(2) = 0.135335283$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0) = -20.999999903$ بينما الحل المضبوط هو $y_2(0) = -21$ أي أن مقدار الخطأ هو $9.7\,x10^{-8}$.



الشكل (٣): مقارنة الحل العددي بالمضبوط للمثال (٣)

مثال (٤)

حل مسألة القيمة الحدودية $y''=\frac{(1+\varepsilon)y-y'}{\varepsilon}$ ذات الشروط الحدودية $y(-1)=1+e^{-2}\,,\,y(1)=1+e^{\frac{-2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}}$ عندما $\varepsilon=0.001$ ؟ (الحل المضبوط $y(x)=e^{x-1}+e^{\frac{-(1+\varepsilon)(1+x)}{\varepsilon}}$)

الحل:

بتخفيض المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y=y_1$$
$$y'=y_2$$

ينتج لدينا

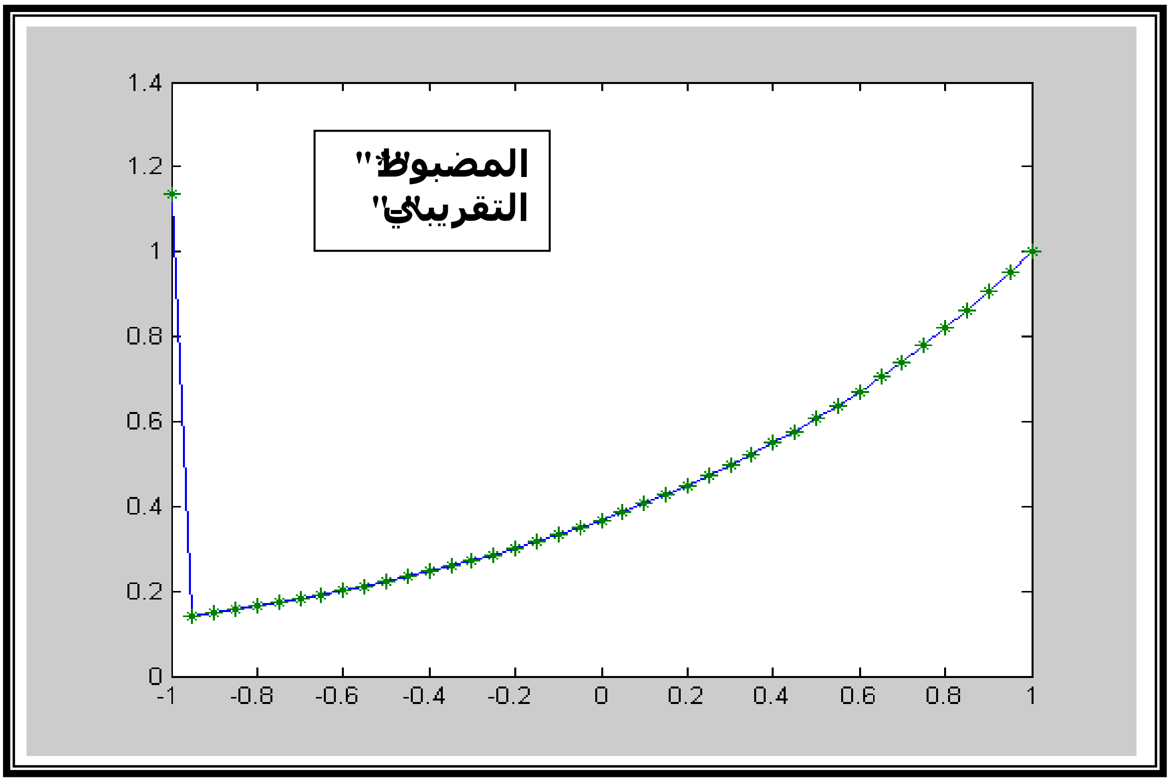
$$y_1'=y_2$$
$$y_2'=\frac{(1+\varepsilon)y_1-y_2}{\varepsilon}$$

لحل المسألة بالخوارزمية المبتكرة نفرض القيم التخمينية التالية لـ $y_2(-1)=-1750,-1500,-1250,-1000,-750,-500,-250$ ونحل النظام باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسا ئل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.05$ نحصل على الجدول الأتي:

جدول (٥): القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (٤)

$s_i = y_2(-1)$	$m_i = y_1(1)$
-1750	-4.524354309
-1500	-2.680777438
-1250	-0.837200567
-1000	1.006376303
-750	2.849953174
-500	4.693530045
-250	6.537106916

وبعكس الجدول أعلاه وعند إجراء الاندراج باستخدام صيغة الشريحة (Spline) وتعويض $y_1(1)=1$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(-1)=-1000.864664650$ بينما الحل المضبوط هو $y_2(-1)=-1000.864664716$ أي أن مقدار الخطأ هو $6.6x10^{-8}$.



الشكل (٤): مقارنة الحل العددي بالمضبوط للمثال (٤)

مثال (٥)

حل مسألة القيمة الحدودية $y''=\dfrac{-y'-1}{\varepsilon}$ ذات الشروط الحدودية $y(0)=0\,,y(2)=0$ عندما $\varepsilon=0.001$ ؟ (الحل المضبوط $y(x)=2\dfrac{1-e^{-\left(x/\varepsilon\right)}}{1-e^{-\left(2/\varepsilon\right)}}-x$)

الحل:

بتخفيض المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y=y_1$$
$$y'=y_2$$

ينتج لدينا

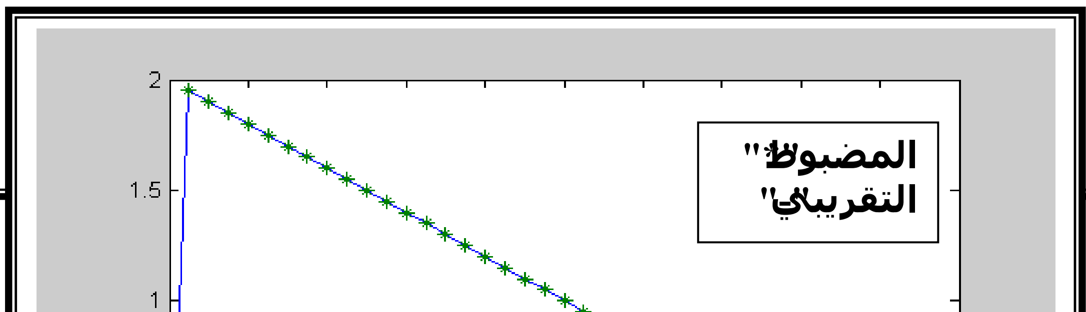
$$y_1'=y_2$$
$$y_2'=\frac{-y_2-1}{\varepsilon}$$

لحل المسألة بالخوارزمية المبتكرة نفرض القيم التخمينية التالية لـ $y_2(2)=0,500,1000,1500,2000,2500,3000,3500,4000$ ونحل النظام باستخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.05$ نحصل على الجدول الأتي:

جدول (٦): القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (٥)

$s_i=y_2(0)$	$m_i=y_1(2)$
000	-1.998999999
500	-1.498999999
1000	-0.998999999
1500	-0.498999999
2000	0.001000000
2500	0.500999999
3000	1.000999999
3500	1.500999999
4000	2.000999999

وبعكس الجدول أعلاه وعند إجراء الاندراج باستخدام صيغة الشريحة (Spline) وتعويض $y_1(2)=0$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0)=1998.999999997$ بينما الحل المضبوط هو $y_2(0)=1999$ أي أن مقدار الخطأ هو $3.0x10^{-9}$.



الشكل (٥): مقارنة الحل العددي بالمضبوط للمثال (٥)

٥- الاستنتاجات:

إن أهم ما تناوله البحث هو مسائل القيم الحدودية الصلبة الخطية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثانية التي تعد من الأمور المهمة في الرياضيات والفيزياء والكيمياء وشبكة المعلومات وغيرها مما يدخل فيه هذا النوع من المعادلات التفاضلية.

إذ تم استخدام طريقة التطابق مع القذف المتعدد وذلك بفرض قيم تخمينية للشرط الابتدائي المجهول في مسألة القيمة الحدودية الصلبة الخطية وذلك بتجزئة فترة التكامل العددي إلى فترات صغيرة ، استخدم الاندراج للحصول على الشرط وحصلنا على نتائج جيدة و بخطوات اقل عندما قيمة h اعتيادية نوعاً ما.

٦- البحوث المقترحة:

١. استخدام الخوارزمية كطريقة متوازية.
٢. دراسة إمكان تطبيق الخوارزمية في المسائل الحدودية الصلبة من الرتبة الثالثة فأكثر.

المصادر

١. حسون، حسن مجيد و محمود عطا الله شكور : "التحليل الهندسي وا لعددي التطبيقي "، الجامعة التكنولوجية –بغداد–العراق، (١٩٩٩).

2. Al-Taee, Mohammed A. M.: "Developing The Hybrid Method for Solving BVPs in ODEs", M. Sc. thesis, University of Mosul, (2006).

3. Al-Tmer, S. A. A.: "A Modified Numerical Method for Solving Linear Stiff Problems", M. Sc. thesis, University of Mosul, (2002).

4. Conte, S. D. and Carl de Boor: "Elementary numerical Analysis, an algorithmic approach", International Student Edition, London, (1981).

5. Fatunla, S. O: "Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations", Academic Press, Inc, (1988).

6. Gerald, C. F. and P. O. Wheatley: "Applied Numerical Analysis" 7th Edition, Addison-Wesley publishing company Inc, (2003).

7. Hairer, E and G. Wanner: "Stiff differential equations solved by Radau methods", (1997).

8. Jones, L. B: "Ordinary differential equations", Bradferd University Press, U. K, (1976).

9. Khalaf, B. M. S: "Parallel Numerical Algorithms for Solving Ordinary differential equations", Ph.D. Thesis, University of Leeds school of Computer Studies, U.K, (1990).

10. Khalaf, B. M. S.: "New Parallel Algorithms for BVPs in ODEs", Raf. J. Comp. & Math's, Vol.1 No.2, PP47-66, (2004).

11. Lambert, J. D: "Computational methods in ordinary differential equations", John Wileey & sons inc, (1974).

12. Maron, M. J: "Numerical analysis: a practical approach", Macmillan Publishing Co., INC, New York, (1982).

13. Murshed, A. A. A: "New Parallel Numerical Algorithms for solving stiff ODEs adapted for MIND computers", Ph.D. thesis, University of Mosul, (2000).