استخدام طريقة التشويش لإيجاد شرط الحل لمسألة قيم حدودية خاصة

لمياء حازم سعدون
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

الاستلام	القبول
٢٩ / ٠١ / ٢٠٠٨	٠٧ / ٠٥ / ٢٠٠٨

Abstract

We study in this paper, how to use the perturbation method to find the solvability condition for certain boundary value problem of fourth order which has the form:

$$y^{(4)} +((\lambda-1)+\varepsilon\, f(x))y=0 \qquad ,\varepsilon<<1$$

with $y'(a)=0$, $y'''(a)=0$, $y'(b)=0$, $y'''(b)=0$

Where λ is an eigenvalue and $f(x)$ is a continuous function defined on interval $[a,b], a\neq b.$

الملخص

يتضمن هذا البحث كيفية استخدام طريقة التشويش لإيجاد شرط الحل لمسألة قيم حدودية خاصة من الرتبة الرابعة ومن الشكل أدناه:

$$y^{(4)} +((\lambda-1)+\varepsilon\, f(x))y=0 \qquad ,\varepsilon<<1$$

مع

$$y'(a)=0,\quad y'''(a)=0,\ y'(b)=0\quad ,\ y'''(b)=0$$

حيث λ قيمة ذاتية و $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ ، $a\neq b$.

(1) المقدمة

إن معظم المسائل التي تواجه الفيزيائيين والمهندسين والرياضيين التطبيقيين في عصرنا هذا تتضمن صعوبات نتيجة احتوائها على معادلات غير خطية ومعادلات ذات معاملات متغيرة

وكذلك المسائل ذات الشروط الحدودية غير الخطية التي تحول دون الوصول إلى الحلول المضبوطة لها.

ولحل مثل هذه المسائل نلجأ إلى الحلول المحاذية أو العددية أو كلاهما ومن بين هذه التقريبات هي طريقة التشويش [6].

ففي عام 1978 قدم Berma حل تقريبي للمسألة ذات القيم الابتدائية باستخدام طريقة المقاييس المتعددة ونظرية التشويش [4].

وفي عام 1993 قام James بدراسة تقارب الحل للمعادلات التكاملية- التفاضلية لمسألة مشوشة منفردة [5]. أما في عام 1999 قام Becker.P.A. بتحليل تغاير الزمن على دالة التكامل وذلك باستخدام معادلة تكاملية –تفاضلية جزئية، حيث أن هذا التغاير يتطلب توسيع التشويشات من خلال التطبيقات على معادلة الزمن [3].

وفي وقتنا الحاضر يجري تكريس عدد من البحوث والدراسات لاستخدام طريقة التشويش ففي عام 2000 قام Mahmood. A. H. بدراسة شروط الحل لمسألة قيم حدودية معينة من الرتبة الرابعة [7] وأيضاً في عام 2006 قام الباحثان Mahmood. A. H. و Jasim. E. A. بدراسة شروط الحل لمعادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية مع شروط حدودية تحتوي على معلم صغير [2]. وفي عام 2008 استخدم الباحث Albadrany. A. A. طريقة التشويش لإيجاد شرط الحل لمعادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية ذات شروط مشوشة [1].

أما هدفنا في هذا البحث هو دراسة مسألة أخرى باستخدام الطريقة المعطاة في [8].

فمسألتنا هي إيجاد شرط الحل للمسألة من النوع التالي:

$$\left.\begin{aligned} & y^{(4)} + ((\lambda - 1) + \varepsilon\, f(x))\, y = 0 \ , \varepsilon << 1 \\ & y'(a) = 0, y'''(a) = 0, y'(b) = 0, y'''(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

حيث λ قيمة ذاتية و $f(x)$ دالة مستمرة ومعرفة على الفترة [a,b] التي تنتمي إلى R، $a \neq b$.

(2) إيجاد شرط الحل للمسألة (1.1)

يمكن تلخيص النتائج الرئيسية للبحث من خلال المبرهنة التالية:

<u>مبرهنة</u>

شرط الحل الضروري لمسألة القيم الحدودية (1.1) هو:

$$\int_a^b v(x)\,(\lambda_1 + f(x))(m \cos k(x-a))\,dx = 0 \qquad (2.1)$$

البرهان

نفرض أن y و λ لهما قيم ذات توسيع منتظم كما في الصيغة أدناه :−

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon\, y_1(x)+...... \tag{2.2}$$

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\,\lambda_1\;+...... \tag{2.3}$$

بتعويض(2.2) و(2.3) في (1.1) نجد انه:

$$y_o^{(4)}+\varepsilon\, y_1^{(4)}+......+(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+.....-1+\varepsilon\, f(x))(y_0+\varepsilon\, y_1+......)=0 \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&y_0'(a)+\varepsilon\, y_1'(a)+......=0\\
&y_0'''(a)+\varepsilon\, y_1'''(a)+......=0\\
&y_0'(b)+\varepsilon\, y_1'(b)+......=0\\
&y_0'''(b)+\varepsilon\, y_1'''(b)+......=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

بمقارنة القوى المتشابهة ل ε لطرفي (2.4) و(2.5) نحصل على :−

$$y_0^{(4)}+(\lambda_0-1)\,y_0=0 \tag{2.6}$$

و

$$y_0'(a)=0\;\;,y_0'''(a)=0\;,y_0'(b)=0\;,y_0'''(b)=0 \tag{2.7}$$

ولأجل ε^1

$$y_1^{(4)}+(\lambda_0-1)\,y_1=-(\lambda_1+f)\,y_0 \tag{2.8}$$

$$y_1'(a)=0\;\;,y_1'''(a)=0\;\;,y_1'(b)=0\;\;,y_1'''(b)=0 \tag{2.9}$$

الحل العام للمعادلة (2.6) هو :−

$$y_0=m_1\cosh kx+m_2\sinh kx+m_3\cos kx+m_4\sin kx \tag{2.10}$$

حيث

$$\lambda_0-1=-k^4\qquad,\lambda_0=1-k^4$$

وهذا الحل يحقق الشروط الحدودية (2.7) لهذا نحصل على:−

$$\left.\begin{aligned}
&m_1k\sinh ka+m_2k\cosh ka-m_3k\sin ka+m_4k\cos ka=0\\
&m_1k^3\sinh ka+m_2k^3\cosh ka+m_3k^3\sin ka-m_4k^3\cos ka=0\\
&m_1k\sinh kb+m_2k\cosh kb-m_3k\sin kb+m_4k\cos kb=0\\
&m_1k^3\sinh kb+m_2k^3\cosh kb+m_3k^3\sin kb-m_4k^3\cos kb=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

لكي يكون للنظام (2.11) حل غير صفري يجب ان يكون محدد المعاملات $m_1\,,m_2\,,m_3\,,m_4$ مساوياً للصفر، وهذا يؤدي إلى انه:

$$\sin k(b-a)=0$$

لذلك

$$k=\frac{n\pi}{(b-a)}$$

حيث . $n=1,2,3,........$ والدالة الذاتية المناظرة هي

$$y_0=m\cos k(x-a) \tag{2.12}$$

لهذا توجد دالة مستقلة ذاتياً $\cos k(x-a)$.

عندما $\lambda_0=0$ الدالة الذاتية المناظرة هي y = ثابت.

بتعويض (2.12) في (2.8) بحيث

$$\lambda_0-1=-(\frac{n\pi}{b-a})^4$$

$$\lambda_0=1-(\frac{n\pi}{b-a})^4$$

نحصل على

$$y_1^{(4)}-(\frac{n\pi}{b-a})^4 y_1=-(\lambda_1+f)(m\cos k(x-a)) \tag{2.13}$$

بما أن المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (2.8) تكافئ المعادلة (2.6) إذن لها حل غير صفري لاجل y_1.

لإيجاد شرط الحل نضرب المعادلة (2.13) في $v(x)$ ونكامل من $x=a$ إلى $x=b$

$$\int_a^b v(y_1^{(4)}-k^4 y_1)\,dx=-\int_a^b v\,(\lambda_1+f)(m\cos k(x-a))\,dx \tag{2.14}$$

$$v\,y_1'''-v'\,y_1''+v''\,y_1'-v'''\,y_1\Big|_a^b+\int_a^b y_1\,(v^{(4)}-k^4\,v)\,dx=$$

$$-\int_a^b v(\lambda_1+f)(m\cos k(x-a))\,dx \tag{2.15}$$

للحصول على صيغة المعادلة والشروط الحدودية للمسألة المتزاملة نأخذ المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (2.13). أي نضع في المعادلة (2.15) $\lambda_1=0$ و $f=0$.

المعادلة المزاملة يمكن إيجادها بوضع معامل y_1 في (2.15) مساوياً للصفر، أي انه:-

$$v^{(4)}-k^4 v=0 \tag{2.16}$$

عندئذ المعادلة (2.15) تصبح بالشكل :-

$$v(b)\,y_1'''(b)-v'(b)\,y_1''(b)+v''(b)\,y_1'(b)-v'''(b)\,y_1(b)-v(a)\,y_1'''(a)+$$

$$+\ v'(a)\,y_1''(a)-v''(a)\,y_1'(a)+v'''(a)\,y_1(a)=0 \tag{2.17}$$

باستخدام الشروط الحدودية (2.9) عندئذ المعادلة (2.17) تصبح كالآتي:

$$-v'(b)\,y_1''(b) - v'''(b)\,y_1(b) + v'(a)y_1''(a) + v'''(a)\,y_1(a) = 0 \qquad (2.18)$$

نختار الشروط الحدودية للمسألة المتزاملة بحيث ان معاملات

$y_1(a), y_1''(a), y_1(b), y_1''(b)$ تساوي صفرا وبذلك نحصل على

$$v'(b)=0\ ,v'''(b)=0\ \ ,v'(a)=0\ \ ,v'''(a)=0 \qquad (2.19)$$

لهذا فان مسألة القيم الحدودية المتجانسة المناظرة لـ (2.8) مع الشروط الحدودية (2.9) هي متزاملة ذاتياً

لذا

$$v=\cos k\,(x-a) \qquad , \qquad k=\frac{n\pi}{b-a}$$

نعرف المسألة المتزاملة باستخدام (2.16) والشروط الحدودية (2.19) نحصل على صيغة كرين [8] في الشكل:

$$\int_a^b v(x)(\lambda_1+f(x))(m\cos k\,(x-a))\,dx=0 \qquad (2.20)$$

وهذه المعادلة تمثل شرط الحل المطلوب

نتيجة

لأجل ....,n=1,2,3 وباستخدام شرط الحل (2.20) المسألة غير المتجانسة (2.13) قابلة للحل بالنسبة ل y_1 والتقريب الأولي للمسألة هو:

$$y(x,\varepsilon)=\cos\frac{n\pi}{b-a}(x-a)+o(\varepsilon)$$

$$\lambda=1-\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^4-2\varepsilon\frac{f_{11}}{b-a}+o(\varepsilon^2)$$

البرهان

لأجل ......,n=1,2,3 المسألة غير المتجانسة (2.13) قابلة للحل بالنسبة لـ y_1 فقط إذا الشرط (2.20) يتحقق عندما $v=\cos k\,(x-a)$.

نعوض عن قيمة $v(x)$ في (2.20) نجد انه

$$\frac{\lambda_1}{2}(b-a)+f_{11}=0$$

حيث

$$f_{11}=\int_a^b f(x)\cos^2 k\,(x-a)\,dx$$

و

$$\lambda_1 = -\frac{2 f_{11}}{b-a}$$

وبما أن

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + ...$$

بهذا نحصل على التقريب الأولي للمسألة

$$y(x,\varepsilon) = \cos\frac{n\pi}{b-a}(x-a) + o(\varepsilon)$$
$$\lambda = 1 - (\frac{n\pi}{b-a})^4 - 2\varepsilon \frac{f_{11}}{b-a} + o(\varepsilon^2)$$

مثال توضيحي

بتطبيق المبرهنة والنتيجة السابقتين على المثال التالي

$$y^{(4)} \quad + ((\lambda - 1) + \varepsilon\, x) y = 0 \qquad , \varepsilon << 1 \quad , 0 \le x \le 1$$
$$y_1'(0) = 0 \quad , y_1'''(0) = 0 \quad , y_1'(1) = 0 \quad , y_1'''(1) = 0$$

في هذه الحالة نجد أن

$$\lambda_0 = 1 - (n\pi)^4 \;\; , \lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

والدالة الذاتية المناظرة هي

$$y_0 = \cos n\pi\, x$$

وعليه فان شرط الحل المطلوب هو

$$\int_0^1 \cos n\pi\, x (\lambda_1 + x)(\cos n\pi\, x)\, dx \Rightarrow$$
$$\lambda_1 \int_0^1 \cos^2 n\pi\, x + \int_0^1 x \cos^2 n\pi\, x)\, dx \Rightarrow$$
$$(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = 0$$

والتقريب الأولي للمسألة أعلاه هو

$$y(x,\varepsilon) = \cos n\pi\, x + o(\varepsilon)$$
$$\lambda = 1 - (n\pi)^4 + \varepsilon(-\frac{1}{2}) + o(\varepsilon^2)$$

(3) الاستنتاجات

من خلال هذا البحث تم التوصل إلى إيجاد شرط الحل لمسألة قيم حدودية خاصة من الرتبة الرابعة (1.1) والذي هو (2.20) وان التقريب الأولي للدالة الذاتية والقيمة الذاتية هو

$$y(x,\varepsilon)=\cos\frac{n\pi}{b-a}(x-a)+o(\varepsilon)$$

$$\lambda=1-(\frac{n\pi}{b-a})^4-2\varepsilon\frac{f_{11}}{b-a}+o(\varepsilon^2)$$

وكذلك تضمن البحث مثال توضيحي

المصادر

١) البدراني، الاء احمد محمد: "شروط قابلية الحل لمسائل قيم حدودية معينة باستخدام طريقة التشويش". رسالة ماجستير، جامعة الموصل، كلية التربية، قسم الرياضيات، 2007.

٢) محمود، أكرم حسان و جاسم، إسراء عبد العالي: "شروط الحل لمسألة حدودية خاصة بطريقة التشويش" مجلة التربية والعلم، مجلد (18)، العدد (2)، ص(90-103)، 2006.

3) Becker, P. A. "A new perturbation technique for solving integro-Partial differential equations". Mathematical Physics. J. Vol.(40), No.(10), American institute of physics, 1999.

4) Fife, c. "Lecture notes in biomathematics". Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, Germmany, 1979.

5) James, h. liu,. "A singular perturbation problem in integro differential equations". Differential equations. J. Vol.(1993), No.(2). p(1-10), 1993.

6) Kato, T. "Perturbation theory for linear operators". Springer–Verlag. New York, 1966.

7) Mahmood, A. H. "Solvability conditions for certain eigenvalue problem by perturbation technique". Educ. and Sci. J. Vol. (33), 2000.

8) Nayfeh, A. H. "Introduction to Perturbation techniques". Mir Moscow, 1984.