أنواع من المقاسات التصالبية
(Kinds of crossed modules)

د. عبد العالي جاسم محمد **لمى احمد خليل**

قسم الرياضيات / كلية التربية

جامعة الموصل

الاستلام ١٤ / 06 / ٢٠٠٧ **القبول** 05 / 11 / ٢٠٠٧

Abstract

This investigate concerned with some kinds of crossed module like pre cross modules, partially crossed module and crossed squares and it relations with semi-direct products of crossed module.

الملخص :

يتضمن هذا البحث دراسة لبعض أنواع المقاسات التصالبية ومنها المقاسات المسبقة تصالبياً والمقاسات التصالبية جزئياً ، المربعات التصالبية مع علاقاتها بالجداءات شبه المباشرة للمقاسات التصالبية.

المقدمة :

لقد حظي مفهوم المقاسات التصالبية باهتمام العديد من الباحثين ، ويعد J.H.C.Whitehead من أوائل من تطرق إلى دراسة هذا المفهوم من خلال أبحاثه الخاصة بالبناء الجبري لزمرة التجانس homotopy group كما في بحثه [6] وقد استخدم في هذا البحث فعل المقاس التصالبي الذاتي لتوضيح العلاقة بين الزمر والمقاسات التصالبية وهي زمرة التشاكل التقابلي الذاتي التي تعكس علاقة تطابق بين المقاسات التصالبية وبعديها المتماثلين two dimensional analogues والمربع التصالبي من T إلى G تعطينا جداء شبه المباشر للزمرة G T بحيث نستطيع استرجاع (recover) المقاس التصالبي من أي مربع تصالبي باستخدام الجداء شبه المباشر للمقاس التصالبي.

ان فكرة فعل الزمرة على الزمر مستأصلة من دراسة زمر التبادل 1844-1900 لذا فمن الطبيعي ان نلاحظ ان مفهوم أفعال الزمر على المجموعات قد بدأ بتعريف فعل الزمرة G على المجموعة المنتهية X على انه تشاكل زمري من G إلى $S_{|X|}$ زمرة التباديل على X .

عندما تكون X مجموعة معرفةً عليها بناءً جبرياً فان $Aut(X)$ مجموعة التشاكلات التقابلية من X على X هي زمرة جزئية من زمرة التباديل $S_{|X|}$ ، وهكذا يمكن ان نطبق مفهوم أفعال الزمر على المجموعات وذلك بان نعرف فعل زمرة منتهية G على مجموعة منتهية X ذات بناء جبري على انه تشاكل زمري من G إلى $Aut(X)$ ، لذا فان دراسة أفعال الزمر على بنى جبرية تبدأ بدراسة أفعال الزمر المنتهية على زمر منتهية ويقصد بفعل الزمرة على الزمرة لتكن كل من H,G زمرة نقول ان هناك فعلا زمرياً أيسر للزمرة G على الزمرة H اذا كان لكل $h \in H$, $g \in G$ يوجد عنصر وحيد مثل ${}^{g}h \in H$ بحيث انه لكل $h, h_1, h_2 \in H$, $e, g, g_1, g_2 \in G$

i. ${}^{e}h = h$
ii. ${}^{g_2}({}^{g_1}h) = {}^{(g_2 g_1)}h$
iii. ${}^{g}(h_1 h_2) = {}^{g}h_1 \, {}^{g}h_2$

من الملاحظ ان لأية زمرة G يوجد على الأقل فعل واحد على زمرة H يعرّف بالقاعدة : ${}^{g}h = h$ لكل $g \in G$, $h \in H$ ، ويسمى بالفعل التافه (trivial action) .

٢.المقاس التصالبي Crossed Module :

نقدم في هذا البند مفهوم المقاس التصالبي، مستعرضين عدداً من الأمثلة الجبرية الأساسية للمقاس التصالبي والتي من خلالها ربطنا بين أفعال الزمر على الزمر وبين المقاس التصالبي، وفيما يأتي تذكير بتعريف المقاس التصالبي.

تعريف (2.1) : [4]

المقاس التصالبي Crossed Module (T,G,∂)، ويرمز له أيضاً بالرمز $M = (\partial : T \to G)$ يتكون من تشاكل زمري $\partial : T \to G$ يدعى بالتطبيق الحدودي boundary map مع فعل أيسر للزمرة G على الزمرة T عند تحقق الشرطين الآتيين:

$CM1.\ \ \partial\left({}^{g}t\right)=g\,\partial(t)\,g^{-1}$

$CM2.\ \ {}^{\partial(s)}t=s\ t\ s^{-1}$

لكل $s,t\in T\ \ ,g\in G$

تعريف (2.2) : [4]

ليكن $X'=(\partial':T'\to G')\ ,\ X=(\partial:T\to G)$ مقاسيين تصالبيين فان التطبيق $\langle\alpha\ ,\varphi\rangle:\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ يدعى بتشاكل مقاسي تصالبي . حيث كل من $\alpha:\mathrm{T}\to\mathrm{T}'\ \ ,\ \ \varphi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ تشاكل وان المخطط أدناه تبادلي :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial"'] & T' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & G' \end{tikzcd}$$

أي انه

i. $\partial'\alpha(t)=\varphi\partial(t)$

ii. $\alpha\left({}^{g}t\right)={}^{\varphi(g)}\ \alpha(t)$

لكل $t\in T,g\in G$.

قضية (2.3) :

ليكن $\partial:T\to G$ مقاساً تصالبياً فان $\partial(T)$ زمرة جزئية سوية من G و $\partial(T)$ فعل تافه على $\ker\partial$. بمعنى آخر $\ker\partial$ هي الزمرة $G/\partial(T)$.

البرهان :

بما ان ∂ تشاكل فان $\partial(T)$ زمرة جزئية من G .

ليكن $x\in\partial(T)$ و $g\in G$ فان $x=\partial(t)$ لبعض $t\in T$ ومنها باستخدام $CM1$ نحصل على $g\,x\,g^{-1}=g\,\partial(t)\,g^{-1}=\partial\left({}^{g}t\right)\in\partial(T)$

لذا فان $g\ x\ g^{-1}\in\partial(T)$ لكل $g\in G$ ، ومنها $\partial(\mathrm{T})$ زمرة جزئية سوية من G .

من المعلوم ان $\ker\partial$ زمرة جزئية من T .

لتكن $t \in T$ و $k \in \ker\partial$ فان من $CM2$ نحصل على $^{\partial(k)}t = k\,t\,k^{-1}$

ولكن $\partial(k) = e$ لذا فان $t = k\,t\,k^{-1}$ ومنها $tk = kt$.

وهكذا فان $\ker\partial \subset Z(T)$ اذا $Z(T)$ مركز T ومنها $k \in Z(T)$.

الآن نبرهن بان فعل $\partial(T)$ هو الفعل التافه على $\ker\partial$ حيث $\partial(T) \lhd G$ و $\ker\partial$ محتواة في $Z(T)$ فان هذا يؤدي إلى ان $\ker\partial$ هي الزمرة $G/\partial(T)$.

الآن نفرض ان $k \in \ker\partial\ ,\ t \in \partial(T)$

يوجد لبعض $t_\circ \in T$ بحيث $t = \partial(t_\circ)$

ومنها $^{t}k = {}^{\partial(t_\circ)}k = t_\circ\,k\,t_\circ^{-1} = k$

وهكذا فان $\partial(T)$ الفعل التافه على $\ker\partial$ ■

فيما يأتي عرض لبعض القضايا الجبرية الأساسية للمقاسات التصالبية.

قضية (2.4) : [1]

لتكن $T \lhd G$ (زمرة جزئية سوية) وليكن فعل G على T هو الفعل الاقتراني حيث $^{g}t = g\,t\,g^{-1}$ لكل $t \in T\ ,\ g \in G$.

ليكن $i : T \to G$ هو التطبيق الاحتوائي فان (T, G, i) هو مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الاقتراني.

قضية (2.5) : [1]

لتكن T زمرة $-G$ وليكن $0 : T \to G$ هو التشاكل الصفري المعرف بالقاعدة $0(t) = e_G$ لكل $t \in T$ فان $(T, G, 0)$ هو مقاس يدعى بالمقاس التصالبي الصفري.

قضية (2.6) : [2]

لتكن G زمرة $\rho_g : G \to G$ حيث $g \in G$ ، تطبيق بالقاعدة :

$$\rho_g(h) = ghg^{-1} \quad \text{لكل} \quad h \in G$$

هو التشاكل التقابلي الذاتي الداخلي .

ليكن التشاك ل $\lambda : G \to Aut(G)$ معرفا بالقاعدة $\lambda(g) = \rho_g$ لكل $g \in G$

وليكن فعل $Aut(G)$ على G معرفاًبالقاعدة :

$^{\rho_h} g = \rho_h(g) = hgh^{-1}$

لكل $g, h \in G$ فان $(G, Aut(G), \lambda)$ مقاساً تصالبياً يدعى بالمقاس التصالبي الداخلي.

من الواضح ان أيةٍ زمرة G مع زمرة تشاكلاتها الذاتية التقابلية $Aut(G)$ تؤديان إلى المقاس التصالبي الداخلي $(G, Aut(G), \lambda)$ حيث $\lambda : G \to Aut(G)$ معرف بالقاعدة $\lambda(g) = \rho_g$ لكل $g \in G$ وان $\rho_g(h) = ghg^{-1}$ لكل $g, h \in G$ ، وان فعل $Aut(G)$ على G معرف بالقاعدة $^{\rho_g}(h) = ghg^{-1}$. كما في القضية (2-6) ، كذلك ان اية زمرة مع نفسها تؤدي الى المقاس التصالبي الاقتراني (G, G, i) حيث i هو التطبيق الذاتي ، وفعل G على G معرف بالقاعدة $^{g}t = gtg^{-1}$ لكل $g, t \in G$. وهذا مو ضح في .(2.4)

قضية (2.7) : [1]

ليكن $\partial : T \to G$ تطبيقا شاملا $K = \ker \partial \subseteq Z(T)$ حيث $Z(T)$ هي مركز T وليكن التطبيق $S : G \to T$ حيث : $\partial(S(g)) = g$ لكل $g \in G$.
نختار $p_g \in S(g)$ (pre-image) ولتكن T زمرة $-G$ بالفعل الاقتراني المعرف بالشكل الآتي :

$^{g}t = {}^{p_g}t = p_g t p_g^{-1}$ لكل $t \in T, g \in G$.

فان (T, G, ∂) مقاس تصالبي يسمى المقاس التصالبي من النوع A central extension .

٣. أنواع من المقاسات التصالبية Kinds of crossed modules :

البند الحالي قد خصص لدراسة بعض أنماط المقاسات التصالبية، وعليه قمنا ببيان بعض خواصها الأساسية، فضلاً عن علاقتها بالمقاسات التصالبية وللمزيد من المعلومات الرجوع إلى المصادر [3] .

1. المقاس المسبق تصالبياً Pre-crossed module :

تعريف (3.1.1) :

لتكن كل من Q, R زمرة لها الفعل الاقتراني على نفسها أي انه :

$^{q}a = qaq^{-1} \quad , \quad ^{r}b = r\, b\, r^{-1}$

حيث $b,r \in R$, $a,q \in Q$ فان المقاس $R-$ المسبق تصالبياً يتكون من التشاكل الزمري $\vartheta = (\delta : Q \to R)$ بحيث ان

$$CM1. \delta({}^{r}q) = r\delta(q)r^{-1}$$

لكل $r \in R$, $q \in Q$ حيث ان ${}^{r}q = r\,q\,r^{-1}$

عندئذ سنرمز للمقاس $R-$ المسبق تصالبياً بالرمز (Q, δ) .

ملاحظة :

المقاس $R-$ المسبق تصالبياً ϑ هو مقاس $R-$ تصالبياً Crossed R-module اذا تحقق الشرط التالي

$$CM2. {}^{\delta(q)}a = {}^{q}a = qaq^{-1}$$

لكل $q, a \in Q$

لذا فان كل مقاس تصالبي هو مقاس مسبق تصالبي ولكن العكس غير صحيح . لانه ليس من الضروري تحقق $(CM2-)$.

2. المقاس التصالبي جزئياً Partially Crossed module :

تعريف (3.2.1) :

ليكن التطبيق $\delta : Q \to R$ تشاكل من الزمرة Q إلى الزمرة R فان المقاس التصالبي جزئياً هو مقاس مسبق تصالبياً على R يحقق الشرط الآتي :

$$CM2. {}^{q}a = qaq^{-1} = {}^{\delta(q)}a$$

لكل $q, a \in Q$ حيث ان $\delta(q)$ هو مبادل في R.

قضية (3.2.2) :

ليكن $\delta : Q \to R$ مقاساً تصالبياً على R فانه مقاس تصالبي جزئي إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي :

$$CM2'. {}^{xy}aq = q\left({}^{yx}a\right)$$

لكل $q \in Q$, $a \in Q$ بحيث ان $\delta(q) = xyx^{-1}y^{-1}$ لكل $x, y \in R$.

البرهان :

أولاً : نفرض ان التشاكل $\delta : Q \to R$ مقاس تصالبي جزئي على R فان الشرط :

$CM2.\ {}^{q}a = qaq^{-1} = {}^{\delta(q)}a$

يتحقق لذا سنبرهن على ان الشرط $CM2 \Rightarrow CM2'$

لتكن $a = {}^{yx}b$

بما ان $\delta(q) = xyx^{-1}y^{-1}$ فان $\delta(q)yx = xy$

لذا فان

$${}^{xy}aq = {}^{xy}\left({}^{yx}b\right)q = {}^{\delta(q)yx}\left({}^{yx}b\right)q = {}^{\delta(q)yx}(a)q$$

$$= {}^{\delta(q)}\left({}^{yx}a\right)q = \left[q\left({}^{yx}a\right)q^{-1}\right]q = q\,{}^{yx}a$$

ثانياً : نفرض تحقق الشرط $CM2'$ ونبرهن على ان $CM2' \Rightarrow CM2$

نفرض ان $q\,{}^{yx}a = {}^{xy}aq$ اذ $q, a \in Q$ و $\delta(q) = xyx^{-1}y^{-1}$

نفرض ان $b = {}^{yx}a$ فان $a = {}^{x^{-1}y^{-1}}b$

ومنها

$${}^{\delta(q)}b = {}^{\delta(q)}\left({}^{yx}a\right) = {}^{xyx^{-1}y^{-1}}\left({}^{yx}a\right) = {}^{xy}\left({}^{(yx)^{-1}(yx)}a\right)$$

$$= {}^{xy}a = q\,{}^{yx}aq^{-1} = qbq^{-1}$$

حيث b أي عنصر من Q

إذن المقاس أعلاه مقاس تصالبي جزئي.

ملاحظة :

كل مقاس تصالبي على R هو مقاس تصالبي $-R$ جزئي والعكس غير صحيح . كما في المثال الآتي :

مثال (3.2.3) : [3]

لتكن Q زمرة غير تبديلية، لنتأمل المقاس المسبق تصالبياً

$$\gamma : Q \to Q/[Q,Q] = R$$

حيث γ التشاكل الطبيعي على R ، وفعل R على Q هو الفعل التافه.

فان

$$\gamma\left({}^{x[Q,Q]}q\right) = {}^{x[Q,Q]}q[Q,Q]$$

ولكن ${}^{x[Q,Q]}q = q$ لان فعل R على Q فعل تافه

لذا فان

$$\gamma\left({}^{x[Q,Q]}q\right) = q[Q,Q]$$

ومنها

$$\begin{aligned}\gamma\left({}^{x[Q,Q]}q\right) &= {}^{x[Q,Q]}(\gamma(q)) \\ &= x[Q,Q]\gamma(q)(x[Q,Q])^{-1} \\ &= x[Q,Q]q[Q,Q]x^{-1}[Q,Q] \\ &= x\ q\ x^{-1}[Q,Q]\end{aligned}$$

ان $[Q,Q] = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in Q\}$

$${}^{\mu(a)}a' \neq aa'a^{-1} \quad \forall \quad a, a' \in Q \ , \ \mu = \gamma$$

الفعل التافه

$${}^{\gamma(a)}a' = a'$$

ولكن عندما $a' \neq e$ فان $a' \neq aa'a^{-1}$ بشكل عام

لذا فان

$${}^{\gamma(a)}a' \neq aa'a^{-1}$$

أي ان $CM2$ لا يتحقق وهذا معناه ان المقاس التصالبي جزئياً $\gamma : Q \to R$ ليس مقاس $-R$ تصالبياً .

لذا فان $\gamma : Q \to R$ مقاس تصالبي جزئي على R وهو ليس مقاساً $-R$ تصالبياً. ■

3. المربع التصالبي Crossed square :

تعريف (3.3.1) : [5]

المربع التصالبي هو المخطط التبادلي لتشاكلات الزمرة مع افعال P على N, M, L التي تحدد

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "r"'] & P \end{tikzcd}$$

بافعال M على N, L عن طريق μ

وبافعال N على M, L عن طريق r

حيث كل من N, M, L, P زمرة

والدالة $h : M \times N \to L$ تحقق الفرضيات الآتية :

١. التطبيقان λ', λ المتشاكلان يحفظان أفعال P فضلا عن ذلك تعد الطبيقات $\mu\lambda = r\lambda' = k , r , \mu , \lambda' , \lambda$ مقاسات تصالبية .

٢. $\lambda' h(m,n) = {}^m nn^{-1}$ $\quad$. $\lambda h(m,n) = m^n m^{-1}$

٣. $h(m, \lambda'\ell) = {}^m \ell\ell^{-1}$ $\quad$. $h(\lambda\ell, n) = \ell^n \ell^{-1}$

٤.

. $h(mm', n) = {}^m\left(h(m', n)\right)h(m,n)$

. $h(m, nn') = h(m,n) \;\; {}^n\left(h(m,n')\right)$

٥.

. $h\left({}^p m, {}^p n\right) = {}^p\, h(m,n)$

$\forall \;\; n, n' \in N \;,\; mm' \in M \;,\; \ell \in L \;,\; p \in P$

من فرضيات تعريف المربع التصالبي ان حدا مثل ${}^m\ell$ هو ناتج فعل m على ℓ وهكذا فان ${}^m\ell = {}^{\mu(m)}\ell$ فضلا عن ذلك من (3) نحصل على النتيجة التالية:

1 . فعل M على $\ker\lambda$ فعل تافه لان

$$ {}^m k = {}^{\mu(m)}k = m\; k\; m^{-1} = k $$

لكل $k \in \ker\lambda \;,\; m \in M$.

2. فعل N على $\ker\lambda$ فعل تافه لان

$$ {}^n k' = {}^{r(n)}k' = n\; k'\; n^{-1} = k' $$

لكل $k' \in \ker\lambda' \;,\; n \in N$.

قضية (3.3.2) : [5]

المربع التصالبي يحقق الخواص الآتية:

$i.\quad h(m,n)\,{}_{\ell} = [m,n]\,{}_{\ell}$

$ii.\quad h(m,n)\;{}^{nm}\ell = {}^{mn}\,\ell\, h(m,n)$

$\quad h(m,n)\;{}^{({}^m n)}\ell = {}^n\,\ell\, h(m,n)$

$iii.\quad {}^{\lambda'\ell}m = {}^{\lambda\ell}\, m \;,\; {}^{\lambda\ell}n = {}^{\lambda'\ell}\, n$

قضية (3.3.3) :

لتكن M زمرة و $InnM$ تشاكلاً تقابلياً ذاتياً داخلياً، وليكن α تطبيقا من M إلى التشاكل التقابلي الذاتي الداخلي حيث $B_m : M \to M$ معرف بالقاعدة

$B_m(m') = mm'm^{-1}$ لكل $m, m' \in M$

والدالة $F : InnM \times InnM \to M$ معرفة بالقاعدة

$$F(B_m, B_{m'}) = [m, m']$$

المخطط أدناه هو مربع تصالبي

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & InnM \arrow[d, "i"] \\ InnM \arrow[r, "i"'] & AutM \end{tikzcd}$$

البرهان :

1. يمكن مباشرة استنتاج ان α يحفظ أفعال $AutM$

$$\begin{aligned} \alpha\left({}^{B_m}m'\right) &= \alpha\left(m\,m'\,m^{-1}\right) = B_{m\,m'm^{-1}} \\ &= B_m\, B_{m'}\, B_{m^{-1}} \quad \text{لأنه تشاكل} \\ &= B_m\, \alpha(m')(B_m)^{-1} \\ &= {}^{B_m}(\alpha(m')) \end{aligned}$$

لكل $m, m' \in M$

فان $\alpha\left({}^{B_m}m'\right) = {}^{B_m}(\alpha(m'))$

وان كل من التطبيقين i, α مقاس تصالبي

2. $\alpha F(B_m, B_{m'}) = [m, m'] = mm'm^{-1}m'^{-1} = m\;{}^{m'}m^{-1}$

$\alpha F(B_m, B_{m'}) = [m, m'] = mm'm^{-1}m'^{-1} = {}^{m}m'\,m'^{-1}$

3. $F(\alpha B_\ell, B_{m'}) = [\ell, m'] = \ell\, m'\, \ell^{-1} m'^{-1} = \ell\;{}^{m'}\ell^{-1}$

$F(B_m, \alpha B_\ell) = [m, \ell] = m\;\ell m^{-1}\,\ell^{-1} = {}^{m}\ell\,\ell^{-1}$

4. $F\left((B_m, B_{m_1'm_1'}\right) = \left[m, m_1'\, m_2'\right] = m\left(m_1'\, m_2'\right)m^{-1}\left(m_1'\, m_2'\right)^{-1}$

$$=\left((m\, m'_1 m^{-1} m'^{\,-1}_1\right) m'_1 \left(m m'_2\; m^{-1} m'^{\,-1}_2\right) m'^{\,-1}_1$$

$$= F\left(B_m, B_{m'_1}\right)^{m'_1}\left(F\left(B_m, B_{m'_2}\right)\right)$$

$$F\left(B_{m_1 m_2}, B_{m'}\right) = \left[m_1 m_2, m'\right] = \left(m_1 m_2\right) m' \left(m_1 m_2\right)^{-1} m'^{-1}$$

$$= m_1\left(m_2\; m' m_2^{-1}\; m'^{-1}\right) m_1^{-1}\; m_1 m' m_1^{-1} m'^{\,-1}$$

$$={}^{m_1}\left(F\left(B_{m_2}, B_{m'}\right)\right) F\left(B_{m_1}, B_{m'}\right)$$

5. $$F\left({}^{p}B_m,\ {}^{p}B_{m'}\right) = \left[{}^{p}m, {}^{p}m'\right] = {}^{p}m\, {}^{p}m' \left({}^{p}m\right)^{-1}\left({}^{p}m'\right)^{-1}$$

$$= p\left(m\ m' m^{-1} m'^{-1}\right) p^{-1} = {}^{P}F\left(B_m, B_{m'}\right)$$

لكل

$$m_1, m_2 \in M,\ \ell \in M \quad , \quad m, m' \in M$$

$$p \in Aut(M) \ \ , \ \ m'_1, m'_2 \in M$$

■

4. الجداء شبه المباشر لمقاسات تصالبية :

Semi-direct product of crossed modules

سنقوم في هذا البند بدراسة مفهوم الجداء شبه المباشر لمقاس ات تصالبية الذي نوضح فيه فكرة الأفعال للمقاسات التصالبية والتي يمكن ان تستخدم في تعريف الجداء شبه المباشر للمقاسات التصالبية . [5]

تعريف (4.1)

نقول ان للمقاس التصالبي (N,V,r) فعلا على المقاس التصالبي (M,P,μ) إذا وجد تشاكل من مقاس تصالبي (N,V,r) إلى $Act(M,P,\mu)$

أي أن

$$(N,V,r) \rightarrow Act(M,P,\mu)$$

تعريف (4.2) :

نعرف المؤثر $Act(M,P,\mu)$ للمقاس التصالبي على انه المقاس التصالبي $(D(P,M), Aut(M,P,\mu),\Delta)$.

حيث $D(P,M)$ هي زمرة وايت هيد (The Whitehead group) [4]

$Aut(M,P,\mu)$ هي زمرة التشاكل التقابلي الذاتي للمقاس التصالبي (M,P,μ) ، ان للزمرة $Aut(M,P,\mu)$ فعلا على الزمرة $D(P,M)$ معرف بالقاعدة

${}^{<\alpha,\varphi>}\chi=\alpha\chi\varphi^{-1}$ ، لكل $\chi\in D(P,M)$ ، $<\alpha,\varphi>\in Aut(M,P,\mu)$

وان $\Delta: D(P,M)\rightarrow Aut(M,P,\mu)$ تشاكل معرف بالقاعدة

$\Delta(\chi)=<\alpha,\varphi>$

ليكن كل من (M,P,μ) و (N,V,r) مقاساً تصالبياً حيث ان للمقاس التصالبي (N,V,r) فعل على المقاس التصالبي (M,P,μ) لذا يوجد تشاكل

${}^{<\varepsilon,\rho>}:(N,V,r)\rightarrow Act(M,P,\mu)$

هكذا ينتج لدينا المخطط التبادلي الآتي :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "r"'] & D(P,M) \arrow[d, "\Delta"] \\
V \arrow[r, "\rho"'] & Aut(M,P,\mu)
\end{tikzcd}$$

حيث فعل V على كل من P,M يعطي التشاكلين الآتيين :

1. $\rho_1:V\rightarrow AutM$ معرف بالقاعدة

$$\rho_1(v)=\rho_V(m)={}^{v}m=vmv^{-1} \quad \text{لكل} \quad m\in M, v\in V$$

2. $\rho_2:V\rightarrow AutP$ معرف بالقاعدة

$$\rho_2(v)=\rho_V(p)={}^{v}p=v\,p\,v^{-1} \quad \text{لكل} \quad p\in P, v\in V$$

$\therefore$ فان $\rho : V \to Aut(M, P, \mu)$ معرفةً ب

$v \in V$ لكل $\rho(v) = < \rho_1(v) \, , \, \rho_2(v) >$

لتكن M هي زمرة $- N$ فان $M \rtimes N$ تمثل زمرة الجداء شبه المباشر للزمرة M بالفعل الزمري لـ N ، عن طريق ρ_1 .

ولتكن P زمرة $- V$ فان $P \rtimes V$ تمثل زمرة الجداء شبه المباشر للزمرة p بالفعل الزمري لـ V ، عن طريق ρ_2 وهذا يعني $\rho_2(v) = {}^{v}P = v\,p\,v^{-1}$ فان للزمرة $P \rtimes V$ فعلاً على الزمرة $M \rtimes N$ هي زمرة $(M \rtimes N) \rtimes (P \rtimes V)$ معرفاً بالقاعدة:

$$^{(p,v)}(m,n) = \left(^{p}\left(^{v}m\right)\left(\varepsilon\left(^{v}n\right)\right)(P)^{-1} \, , \, {}^{v}n\right)$$ حيث $$\varepsilon(n) = \varepsilon_n(p) = n \; {}^{p}n^{-1}$$

لكل $v \in V, n \in N \, , \, p \in P$

واثبات ذلك كالآتي:

1. $$^{(e,e)}(m,n) = \left(^{e}\left(^{e}m\right)\left(\varepsilon(^{e}n)\right)(e)^{-1}, e_n\right)$$
$$= \left(m(\varepsilon(n)), n\right) = \left(m n \, {}^{e}n^{-1}, n\right) = (m,n)$$

2. $$^{(p_2,v_2)(p_1,v_1)}(m,n) = {}^{\left(p_2 \, {}^{v_2}p_1, v_2 v_1\right)}(m,n)$$
$$= \left(^{p_2 \, {}^{v_2}p_1}\left(^{v_2 v_1}m\right)\left(\varepsilon\left(^{v_2 v_1}n\right)\right)\left(P_2 \, {}^{v_2}P_1\right)^{-1}, {}^{v_2 v_1}n\right)$$
$$= \left(^{p_2 v_2 p_1 v_2^{-1}}\,{}^{v_2 v_1}(m)\left(\varepsilon\left(^{v_2 v_1}n\right)\right)\left(P_2 \, {}^{v_2}P_1\right)^{-1}, {}^{v_2}\left(^{v_1}n\right)\right)$$
$$= \left(^{p_2}\left(^{v_2}\left(^{p_1}\left(^{v_1}m\right)\right)\right)\left(\varepsilon\left(^{v_2}\left(^{v_1}n\right)\right)\right)\left(P_2 \, {}^{v_2}P_1\right)^{-1}, {}^{v_2}\left(^{v_1}n\right)\right)$$
$$= {}^{(p_2,v_2)}\left(^{(p_1,v_1)}(m,n)\right)$$

3. $$^{(p,v)}\left((m_1,n_1)(m_2,n_2)\right) = {}^{(p,v)}\left(m_1 \, {}^{n}m_2, n_1 n_2\right)$$

$$=\left({}^{p}\left(v\left(m_1\,{}^{n}m_2\right)\right)\left(\varepsilon\left(v\left(n_1 n_2\right)\right)\right)(p)^{-1},\ v\left(n_1 n_2\right)\right)$$

$$=\left({}^{p}\left(v\left(m_1\right)v\left({}^{n_1}m_2\right)\right)\left(\varepsilon\left(v\left(n_1 n_2\right)\right)\right)(p)^{-1},\ v\left(n_1 n_2\right)\right)$$

$$=\left({}^{p}\left({}^{v}m_1\right){}^{p}\left({}^{v}\left(n_1 m_2 n_1{}^{-1}\right)\right)\left(\varepsilon\left({}^{v}n_1\ {}^{v}n_2\right)\right)(p)^{-1},{}^{v}n_1\ {}^{v}n_2\right)$$

$$=\left({}^{p}\left({}^{v}m_1\right)n_1\ {}^{p}\left({}^{v}m_2\right)n_1{}^{-1}\left(\varepsilon\left({}^{v}n_1\right)\right)\left(\varepsilon\left({}^{v}n_2\right)\right)(p)^{-1},{}^{v}n_1\ {}^{v}n_2\right)$$

$$=\left({}^{p}\left({}^{v}m\right)n_1\, n_1{}^{-1}\left(\varepsilon\left({}^{v}n_1\right)\right)(p)^{-1},{}^{v}n_1\right)\left({}^{p}\left({}^{v}m_2\right)\left(\varepsilon({}^{v}n_2)\right)(p)^{-1},{}^{v}n_2\right)$$

$$=(p,v)\left(m_1,n_1\right)(p,v)\left(m_2,n_2\right)$$

لذا فان $M\rtimes N$ زمرة $-P\rtimes V$

والآن ليكن التطبيق $\pi : M\rtimes N\to P\rtimes V$ تشاكلاً معرفا بالقاعدة

$$\pi(m,n)=(\mu(m),r(n))$$

لكل $m\in M\ ,\ n\in N$ فان $(M\rtimes N\ ,\ P\rtimes V\ ,\ \pi)$ هو مقاس تصالبي .

وبرهان ذلك كالآتي:

إن شرطي المقاس التصالبي يتحققان:

$$CM1.(p,v)\pi\,(m,n)(p,v)^{-1}=(p,v)(\mu(m),r(n))\left({}^{v^{-1}}\left(p^{-1}\right),v^{-1}\right)$$

$$=\left(p\,{}^{v}(\mu(m)),v\,r(n)\right)\left({}^{v^{-1}}\left(p^{-1}\right),v^{-1}\right)$$

$$=\left(p\,{}^{v}(\mu(m))\,{}^{v\,r(n)\,v^{-1}}\left(p^{-1}\right),\ v\,r(n)\,v^{-1}\right)$$

$$= \left(p^{\,v}(\mu(m))^{\,r({}^{v}n)}\left(p^{-1}\right),\ r\left({}^{v}n\right) \right)$$

$$= \left(p^{\,v}(\mu(m))\left({}^{v}n\right)p^{-1}\left({}^{v}n\right)^{-1},\ r\left({}^{v}n\right) \right)$$

$$= \left({}^{p}\left({}^{v}(\mu(m))\right)\left({}^{v}n\right)\left({}^{v}n\right)^{-1},\ r\left({}^{v}n\right) \right)$$

$$= \left({}^{p}\left({}^{v}(\mu(m))\right),\ r\left({}^{v}n\right) \right) = {}^{(p,v)}\left(\mu(m), r(n)\right)$$

$$= \pi\left({}^{(p,v)}(m,n) \right)$$

$$\therefore\ (p,v)\,\pi(m,n)\,(p,v)^{-1} = \pi\left({}^{(p,v)}(m,n) \right)$$

$CM2.\ (m',n')\,(m,n)\,(m',n')^{-1} =$

$$= \left(m'\,{}^{n}m,\ n'\,n\right)\left(\left({}^{n'^{-1}}\left(m'^{-1}\right) \right),\ n'^{-1} \right)$$

$$= \left(m'\,{}^{n}m\ {}^{n'nn'^{-1}}\left(m'^{-1}\right),\ n'\,n\,n'^{-1} \right)$$

$$= \left(m'\,{}^{n}m\ {}^{{}^{n'}n}\left(m'^{-1}\right),\ n'\ n\ n'^{-1} \right)$$

$$= \left(m'\,{}^{n}m\left({}^{n'}n\right)\left(m'^{-1}\right)\left({}^{n'}n\right)^{-1},\ n'\,n\,n'^{-1} \right)$$

$$= \left({}^{\mu(m')}\left({}^{n}m\right),\ {}^{r(n')}(n) \right)$$

$$= {}^{\mu(m'),r(n')}(m,n)$$

$$= {}^{\pi(m',n')}(m,n)$$

$$\therefore (m',n')(m,n)(m',n')^{-1} = {}^{\pi(m',n')}(m,n) \quad \blacksquare$$

References المصادر :

[1] M. Alp. (2000). Some results on derivation groups, Company TUBITAK (24). Pp. 121–128.

[2] R. Brown and C. D. Wensley (2002). Computation and Homotopical Allpication of IndMeed Crossed Module, Company Published by Esevies Science Iad, J. Symbolic Computation.

[3] H. Inassridze (1997). Higer non–abelian choomogy of group, Georgian Mathematical Journal, vol. 4, No. 4, pp. 313–331.

[4] K. J. Norrie (1987). Crossed Modules and Analogues of Group Theorems. Ph.D. Thesis. King's College, London.

[5] K. J. Norrie (1990). Action and automorphisms of crossed modules, Bull. Soc. Math. France, 118, pp. 129–146.

[6] J. H C. Whitehead, (1948), "On operators in relative homotopy group", Ann of Math., 49, 610-640.