الحدود الدنيا للمجاميع القالبية–t في PG(2,q) وإيجاد المجاميع القالبية الاصغرية ذات حجوم ١٦ و ١٧ في PG(2,9) (*)

د. عبد الخالق لازم ياسين **جنار عبد الكريم أحمد**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

القبول	الاستلام
٢٠٠٧ / 11 / 05	٢٠٠٧ / 07 / ٢٥

Abstract

A t – blocking set B in a projective plane PG(2, q) is a set of points such that each line in PG(2, q) contains at least t points of B and some line contains exactly t points of B.

A t – blocking set B is minimal or irreducible when no proper subset of it is a t – blocking set. In particular when t = 1 then B is called a blocking set.

In this paper, we find the lower bounds of the 5 – blocking set and the 6–blocking set In the projective plane PG(2, q), where q square, Then we improved the lower bound of 5– blocking set when $\sqrt{q} > 10$ in the same plane.

Specially in the projective plane PG(2, 9):

First: We show that the minimal blocking set of size 16 with a 6 – secant and the minimal blocking set of the same size of Rédei-type exist.

Second: We classify the minimal blocking sets of size 17.

الملخص

المجموعة B القالبية – t في المستوي الاسقاطي PG(2, q) هي مجموعة نقاط بحيث ان كل خط في المستوي PG(2,q) يقطع B بما لا يقل عن t من النقاط ويوجد خط يقطع B بـ t من النقاط بالضبط.

(*) بحث مستل من رسالة الماجستير المنجزة من قبل الباحث الثاني بإشراف الباحث الأول في جامعة الموصل (٢٠٠٦).

يقال للمجموعة B القالبية – t أنها أصغرية أو غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية منها تشكل مجموعة قالبية – t . بصورة خاصة عندما تكون t = 1 فان B تسمى مجموعة قالبية.

تضمن هذا البحث إيجاد القيود الدنيا للمجاميع القالبية الخماسية والسداسية في المستوي الاسقاطي PG(2,q) حيث qعدد مربع ثم قمنا بتحسين القيد الأدنى للمجموعة القالبية الخماسية في حالة $\sqrt{q}>10$ في نفس المستوي.

وبصورة خاصة في المستوي الاسقاطي PG(2, 9) :

أولاً : أثبتنا وجود مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم ١٦ تمتلك قاطعاً سداسياً ووجود مجموعة قالبية أصغرية بنفس الحجم من نوع – ريدي .

ثانياً : قمنا بتصنيف المجاميع القالبية الأصغرية ذات حجم ١٧ .

المقدمة Introduction

Richardson [11] هو أول من بحث في المستويات ذات الرتب الكبيرة، كما انه أثبت أن أصغر حجم للمجموعة القالبية في المستوي PG(2,3) هو ٦، كما لاحظ ان مستويات بير الجزئية هي أمثلة للمجاميع القالبية ذات حجم $q+\sqrt{q}+1$ في المستويات الاسقاطية ذات الرتبة q، حيث q عدد مربع. بعد ١٣ سنة قدم الباحث Di Paola [6] ، فكرة عن المثلث الاسقاطي والذي يعد مثلاً للمجموعة القالبية ذات الحجم 3(q+1)/2 في المستويات الديزاركية ذات الرتبة الفردية.

أما Bruen فانه أثبت ان $q+\sqrt{q}+1$ هو القيد الأدنى للمجموعة القالبية في المستوي الاسقاطي. كما انه أثبت في المصدر [4] ان $q\sqrt{q}+1$ هو القيد الأعلى للمجموعة القالبية الاصغرية في أي مستوي إسقاطي ذو رتبة q .

أما المجاميع القالبية المزدوجة فقد درسها الباحث Bruen [4] والمجاميع القالبية الثلاثية من نوع (3, n) تم دراستها من قبل الباحث De Resmini [5] .

(١–١) تعريف [8] :

يقال للمجموعة B انها مجموعة قالبية – t (t – blocking set) إذا كان كل خط في المستوي PG(2, q) يقطع B بما لا يقل عن t من النقاط، ويوجد خط يقطع B بـ t من النقاط بالضبط ويقال للمجموعة القالبية – t انها تافهة (Trivial) إذا احتوت على خط من الخطوط بكل نقاطه.

بصورة خاصة عندما تكون:

$t = 1$ فانها تسمى مجموعة قالبية (Blocking Set)

$t = 2$ فانها تسمى مجموعة قالبية مزدوجة (Double Blocking Set)

$t = 3$ فانها تسمى مجموعة قالبية ثلاثية (Triple Blocking Set).

(١-٢) مبرهنة [3] :

لتكن B مجموعة قالبية – t في المستوي PG(2, p) و $p > 3$ عدد أولي فان :

١. إذا كان $t \le (p-1)/2$ ، فان $|B| \ge \frac{(2t+1)(p+1)}{2}$

٢. إذا كان $t \ge (p+1)/2$ ، فان $|B| \ge (t+1)p$

(١-٣) مبرهنة [2] :

لتكن B مجموعة قالبية – t ذات حجم b في المستوي الاسقاطي PG (2, q) فان :

1. $\sum_{i=0}^{q+1} r_i = q^2 + q + 1$,
2. $\sum_{i=1}^{q+1} i\, r_i = b(q+1)$,
3. $\sum_{i=2}^{q+1} i(i-1) r_i = b(b-1)$,
4. $\sum_{i=1}^{q+1} v_i = q+1$,
5. $\sum_{i=2}^{q+1} (i-1) v_i = b-1$,
6. $\sum_{i=0}^{q} u_i = q+1$,
7. $\sum_{i=1}^{q} i\, u_i = b$,

حيث r_i : يمثل العدد الكلي للقواطع– i للمجموعة B .

v_i : يمثل العدد الكلي للقواطع– i للمجموعة B خلال النقطة P من نقاط المجموعة B.

ui : يمثل العدد الكلي للقواطع– i للمجموعة B خلال النقطة Q في PG(2, q)\B.

(١-٤) تعريف [8] :

يقال للمجموعة B القالبية – t انها أصغرية (Minimal) أو غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية منها تشكل مجموعة قالبية – t .

(١–٥) تعريف [4] :

يُعرّف مستوي بير الجزئي (Baer Sub Plane) بانه مجموعة قالبية B ذات حجم $q+\sqrt{q}+1$ في المستوي PG(2, q) ، q عدد مربع بحيث ان كل خط يصل نقطتين من B يحتوي على $\sqrt{q}+1$ من نقاط B .

الحقل $\{\infty\} \cup GF(q)$ يمكن ان يّمثل بالخط الاسقاطي (Projective Line) PG(1,q) . وهذا الحقل يحتوي على خط بير الجزئي (Baer Sub Line) $(GF(\sqrt{q}) \cup \{\infty\})$.

وفيما يأتي بعض خواص خط بير الجزئي:

١. تقاطع خط بير الجزئي الاثنيني مع خط هو خط بير الجزئي.
٢. يتقاطع خّطان لبير الجزئي على الأكثر بنقطتين.

(١–٦) تعريف [8] :

يقال للمجموعة القالبية B انها من نوع – ريدي (Rédei-type) إذا وجد خط يقع عليه k من نقاط B ، بحيث ان B مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم q + k. بمعنى آخر ، يوجد خط L بحيث ان $|B \backslash L| = q$.

(١–٧) تعريف [7] :

ليكن Π_{n-1} أولي (Prime) في الفضاء الاسقاطي PG(n,K) ، فان $AG(n,K) = PG(n,K) \setminus \Pi_{n-1}$ هو فضاء أفيني (Affine Space) ذو بعد n ومعّرف على الحقل K . عندما K = GF(q) نرمز لـ AG(n, K) بالرمز AG(n, q) .

الفضاءات الجزئية من AG(n, K) هي فضاءات جزئية من PG(n, K) بحذف نقاط Π_{n-1}.

عندما n = 2 ، فان الفضاء الافيني AG(n, q) يسمى بالمستوي الافين ي (Affine Plane) ويرمز له بـ AG(2, q) .

(٢) القيود الدنيا للمجاميع القالبية الخماسية والسداسية في المستوي الاسقاطي PG(2, q) حيث q عدد مربع.

في هذا البند تم دراسة القيود الدنيا للمجاميع القالبية الخماسية والسداسية في المستوي الاسقاطي PG(2, q) حيث q عدد مربع.

(٢−1) مبرهنة :

لتكن B مجموعة قالبية خماسية ، بحيث انه خلال اية نقطة من B يمر $\sqrt{q}+1$ من الخطوط التي تحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+5$ من نقاط B وتشكل خط بير الجزئي الاثنيني فانه:

١. إذا كان $q > 25$ ، فان B تحتوي على الأقل على $5q+2\sqrt{q}+5$ من النقاط .

٢. إذا كان $q = 16$ ، فان B تحتوي على الأقل على $5q+\sqrt{q}+8$ من النقاط .

٣. إذا كان $q = 25$ ، فان B تحتوي على الأقل على $5q+\sqrt{q}+5$ من النقاط .

برهان (١) :

نُسّمي الخطوط التي تقطع B بـ $\sqrt{q}+5$ من النقاط أو أكثر خطوطاً طويلة. إذا تقاطع خطان طويلان في نقطة خارج B، فان B تحتوي على الأقل على $2(\sqrt{q}+5)+5(q-1)=5q+2\sqrt{q}+5$ من النقاط، وبالتالي نحصل على القيد المطلوب .

الآن إفرض ان أي خطين طويلين يلتقيان في نقطة داخل B، ليكن L خطاً طويلاً و p نقطة تنتمي إلى B ولا تقع على L. فان الخطوط الطويلة المارة خلال p تحتوي على خط بير الجزئي الاثنيني وتلتقي مع L في خط بير الجزئي. لتكن Q نقطة من نقاط هذا الخط البير الجزئي، ان جميع الخطوط الطويلة المارة خلال نقطة واقعة على قاطع خماسي يمر من خلال Q تلتقي مع L في خط بير جزئي آخر لا يحتوي على Q. وبما ان أي خطين لبير الجزئي يلتقيان بنقطتين على الأكثر، عليه فان L يحتوي على الأقل على $2\sqrt{q}$ من النقاط. وبما ان L خط اختياري فان أي خط طويل يحتوي على الأقل على $2\sqrt{q}$ من النقاط . وعليه فان B تحتوي على الأقل على $1+(\sqrt{q}+1)(2\sqrt{q}-1)+4(q-\sqrt{q})=6q-3\sqrt{q}$ من النقاط وبما ان $6q-3\sqrt{q}>5q+2\sqrt{q}+5$ ، لكل $q>25$ فان $|B|\geq 5q+2\sqrt{q}+5$.

برهان (٢) :

إذا وجد خطان طويلان يلتقيان في نقطة خارج B، فان B تحتوي على الأقل على $2(\sqrt{q}+5)+5(q-1)=5q+2\sqrt{q}+5$ من النقاط. افرض ان أي خطين طويلين يلتقيان في نقطة p داخل B، فان B تحتوي على الأقل على $(\sqrt{q}+1)(\sqrt{q}+4)+1+4(q+1-(\sqrt{q}+1))=5q+\sqrt{q}+5$ من النقاط . وبذلك يكون $|B|\geq 89$ ، عندما $q=16$. عليه فان القوس – (k, 12) يحتوي على ١٨٤ نقطة وهذا غير ممكن [لاحظ الجدول الموجود في المصدر [١]. أما إذا كان $|B|=5q+\sqrt{q}+6$ فان $k=183$ ، أيضاً بالحالة نفسها عندما $|B|=5q+\sqrt{q}+7$ فان $k=182$، وهذا غير ممكن في كلتا الحالتين لان $k\leq 181$ وهذا يؤدي إلى ان $|B|\geq 5q+\sqrt{q}+8$.

برهان (٣) بطريقة مشابهة لبرهان (2) .

المبرهنة الآتية هي تحسين القيد الأدنى للمجموعة القالبية الخماسية عندما $\sqrt{q}>10$.

(2–٢) مبرهنة :

لتكن B مجموعة قالبية خماسية، بحيث انه خلال اية نقطة من B يمر على الأقل $\sqrt{q}+1$ من الخطوط التي تحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+5$ من نقاط B وتشكل خط بير الجزئي الاثنيني . فان B تحتوي على الأقل على $5q+3\sqrt{q}+5$ من النقاط عندما $\sqrt{q}>10$.

البرهان :

إفرض ان B تحتوي على أقل من $5q+3\sqrt{q}+5$ من النقاط. نُسّمي الخطوط التي تلتقي مع B في $\sqrt{q}+5$ أو أكثر من النقاط بالخطوط الطويلة. نأخذ خمسة عشر نقطة من B كلها واقعة على الخط الطويل L، وعليه فانه يوجد على الأقل $15\sqrt{q}(\sqrt{q}+4)$ من نقاط B\L واقعة على الخطوط الطويلة المارة خلال الخمسة عشر نقطة (محسوبة مع التكرار). بما ان B\L تحتوي على اقل من $5q+2\sqrt{q}$ من النقاط، فانه يوجد أكثر من $15\sqrt{q}(\sqrt{q}+4)-3(5q+2\sqrt{q})=54\sqrt{q}$ من النقاط على أربعة أو أكثر من الخطوط الطويلة المارة خلال الخمسة عشر نقطة (محسوبة مع التكرار).

لتكن p_i هي نقطة من نقاط B\L الناتجة من تلاقي الخطوط الطويلة لها مع أربعة نقاط على الأقل من الخمسة عشر نقطة الواقعة على L . ولتكن S_i مجموعة نقاط الخط L والتي عندها الخطوط الطويلة المارة خلال p_i تلتقي مع L . المجموعة S_i تحتوي على الأكثر على

$\sqrt{q}+2$ من النقاط، وإلا فان p_i تقع على الأقل على $\sqrt{q}+3$ من الخطوط الطويلة وفي هذه الحالة B تحتوي على الأقل على:

$$1+(\sqrt{q}+3)(\sqrt{q}+4)+4(q-\sqrt{q}-2)=5q+3\sqrt{q}+5$$

من النقاط، كذلك حسب الفرض المجموعة S_i تحتوي على خط بير الجزئي b_i.

بما انه يوجد $54\sqrt{q}$ من نقاط B\L (محسوبة مع التكرار) التي تلتقي على الأقل مع أربعة نقاط من الخمسة عشر نقطة . فانه يوجد $54\sqrt{q}$ من النقاط p_i المقابلة لـ b_i والتي تلتقي على الأقل مع ثلاث نقاط من الخمسة عشر نقطة.

توجد ٤٥٥ من المجموعات المختلفة المكونة من ثلاث نقاط من بين الخمسة عشر نقطة، وعليه فانه توجد نقطتان p_1 و p_2 تقابلان b_1 و b_2 اللذان يلتقيان على الأقل بثلاث نقاط. بما ان كل خطين لبير الجزئي يلتقيان على الأكثر في نقطتين فان b_1 و b_2 متطابقان.

إذا التقت ثلاثة خطوط طويلة في نقطة خارج B ، فان B تحتوي على الأقل على $3(\sqrt{q}+5)+5(q-2)=5q+3\sqrt{q}+5$ من النقاط. وعليه فانه يوجد على الأكثر خطان طويلان يلتقيان في نقطة خارج B. وهذا يؤدي إلى انه الخطوط الطويلة المارة خلال p_1 و p_2 تلتقي مع L في نقطة واحدة على الأكثر خارج B ، وهذه النقطة تقع على الخط الطويل الذي يصل p_1 و p_2 .

لتكن S مجموعة نقاط من $L \cap B$ والتي عندها $b_1 = b_2$ تلتقي مع $L \cap B$ ، فان S تحتوي على $\sqrt{q}$ او $\sqrt{q}+1$ من النقاط.

سوف نبرهن ان L يحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+7$ من نقاط B . إفرض أولاً ان L يحتوي على أقل من $\sqrt{q}+7$ من نقاط B. لتكن T مجموعة نقاط B\L التي تقع على الخطوط غير الطويلة التي تلتقي مع S. وبالأخذ بالاعتبار النقاط الواقعة على الخطوط غير الطويلة المارة خلال نقطة من S ، فانه يوجد على الأقل $4(q-\sqrt{q}-1)$ من النقاط في T .

افرض ان L يحتوي على $\sqrt{q}+5$ من نقاط B بالضبط. الخطوط الطويلة المارة خلال نقطة من T تلتقي على الأكثر مع نقطتين من S وعلى الأكثر مع سبع نقاط من $L \cap B$. وهذا يأتي حسب الفرضية التي تنص على انه كل خطين لبير الجزئي يلتقيان على الأكثر في نقطتين من B .

لتكن n أكبر عدد صحيح بحيث ان n من نقاط T تقع على إستقامة واحدة . كل نقطة من B تقع على الأقل على $\sqrt{q}+1$ من الخطوط الطويلة وعليه فان كل نقطة من T تمتلك على الأقل $\sqrt{q}-6$ من الخطوط الطويلة التي تلتقي مع L\B ويوجد $q+1-(\sqrt{q}+5)$ من

النقاط في $L\backslash B$ ، عليه فان $n(\sqrt{q}-6)\leq q-\sqrt{q}-4:$ وهذا يؤدي إلى ان $n\leq\sqrt{q}+6$ لكل $\sqrt{q}>19$.

بما ان كل نقطة من T تمتلك $\sqrt{q}-6$ من الخطوط الطويلة التي تلتقي مع $L\backslash B$ ، وعلى الأكثر $\sqrt{q}+6$ من نقاط T تقع على استقامة واحدة فان :

$4(q-\sqrt{q}-1)\dfrac{\sqrt{q}-6}{\sqrt{q}+6}\leq q-\sqrt{q}-4<q-\sqrt{q}-1$ ، وهذا تناقض في حالة $\sqrt{q}>10$. وبما ان L خط اختياري، فان كل خط طويل يحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+6$ من نقاط B. افرض ان $\sqrt{q}+2$ من هذه الخطوط الطويلة تلتقي في نقطة داخل B فان :

$|B|\geq 1+(\sqrt{q}+2)(\sqrt{q}+5)+4(q-\sqrt{q}-1)=5q+3\sqrt{q}+7$ وهذا تناقض لعدد نقاط B. عليه فان كل نقطة من B تقع بالضبط على $\sqrt{q}+1$ من الخطوط الطويلة.

افرض الان ان الخط L يحتوي على $\sqrt{q}+6$ من نقاط B . عّرف S و T و n حسب سابقاً وعليه فان $n(\sqrt{q}-6)\leq q-\sqrt{q}-4:$ حسب سابقاً

و $4(q-\sqrt{q}-1)\dfrac{\sqrt{q}-6}{\sqrt{q}+6}\leq q-\sqrt{q}-5<q-\sqrt{q}-1$ وهذا تناقض أيضاً في حال ة $\sqrt{q}>10$. وبما ان L خط اختياري، فان كل خط طويل يحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+7$ من نقاط B . وعن طريق حساب نقاط B الواقعة على الخطوط المارة خلال نقطة من B فان :

$|B|\geq 1+(\sqrt{q}+1)(\sqrt{q}+6)+4(q-\sqrt{q})=5q+3\sqrt{q}+7$ وهذا تناقض لعدد نقاط B . وعليه فان B تحتوي على الأقل على $5q+3\sqrt{q}+5$ من النقاط، إذا كان $\sqrt{q}>10$.

وبطريقة مشابهة لبرهان (١–٢) يمكن ان نبرهن:

(٣–٢) مبرهنة :

لتكن B مجموعة قالبية سداسية ، بحيث انه خلال اية نقطة من B يمر $\sqrt{q}+1$ من الخطوط التي تحتوي على الأقل على $\sqrt{q}+6$ من نقاط B وتشكل خط بير الجزئي الاثنيني فانه :

١. إذا كان $q>36$ ، فان B تحتوي على الأقل على $6q+2\sqrt{q}+6$ من النقاط.
٢. إذا كان $q=16$ ، فان B تحتوي على الأقل على $6q+\sqrt{q}+9$ من النقاط.

(3) المجاميع القالبية الاصغرية ذات حجم ١٦ في المستوي الاسقاطي PG(2, 9)

لتكن B مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم ١٦ في المستوي الاسقاطي PG(2, 9) .

(٣-١) مبرهنة [10]:

اذا كان V فضاء متجهات ذا بُعد n ومعّرف على الحقل المنتهي GF(q) ، فان أية مجموعة جزئية من V والتي تلتقي مع كل أولي من V تحتوي على الاقل على n(q – 1)+1 من النقاط .

(3–2) مبرهنة :

كل نقطة من B تقع على الاقل على ثلاثة قواطع أحادية .

البرهان :

ليكن p∈B ، وليكن L قاطعاً أحادياً لـ B عند النقطة p . وليكن AG(2, 9) = PG(2, 9)\L مستوياً أفينّياً. فان المجموعة B\L تكون ذات حجم ١٥ .

حسب المبرهنة (٣–١) المجموعة القالبية الاصغرية في المستوي AG(2,9) تحتوي على الأقل على ١٧ نقطة. وهذا يعني انه نحتاج إلى إضافة نقطتين على الأقل لـ B\L للحصول على مجموعة قالبية في المستوي AG(2, 9). بما ان الخطوط الخارجية لـ B\L في المستوي AG(2, 9) هي قواطع أحادية لـ B عند النقطة p ، وبما انه توجد نقطتان على الأقل يمكن إضافتهما لـ B\L للحصول على مجموعة قالبية في المستوي AG(2, 9) ، فانه يوجد على الأقل خطّان خارجيان لـ B\L في المستوي AG(2, 9) وعليه فان p تقع على الأقل على قاطعين أحاديين لـ B . وبما ان L هو قاطع أحادي لـ B ، عليه فان p تقع على الأقل على ثلاثة قواطع أحادية لـ B .

(3–3) مبرهنة كاكس (Gács) [9]:

في المستوي PG(2, q) ، لتكن B مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم q + k . إذا وجد خط وليكن L يقطع B في k–1 من النقاط بالضبط . فانه توجد نقطة O لا تنتمي إلى B حيث ان كل خط يصل النقطة O بنقطة من L\B يحتوي على نقطتين من B، وعليه فان $k \geq (q+3)/2$.

(٣–٤) البحث عن المجموعة القالبية الاصغرية ذات حجم ١٦ في المستوي الاسقاطيPG(2,9) وتمتلك قاطعاً سداسياً.

لتكن (x, y, z) تمثل احداثيات النقاط في المستوي الاسقاطي، وليكن L قاطعاً سداسياً لـ B و L خطاً في المالانهاية (L : Z = 0) للمستوي الافيني المقابل . ليكن

$L \setminus B=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$، حسب المبرهنة (٣-٣) إذا كانت B مجموعة قالبية أصغرية فانه توجد نقطة أفينية ولتكن O لا تنتمي إلى B ، بحيث ان الخطوط Op_i ، حيث $i = 1, \dots, 4$ هي قواطع ثنائية لـ B تحتوي على ثمانية نقاط أفينية من B، ولتكن U_1 و U_2 النقاط الافينية المتبقية. بما ان النقاط p_i تقع على قاطع ثنائي واحد وثماني قواطع أحادية ، فان الخطوط U_1p_i ، حيث $i = 1, \dots, 4$ ، هي قواطع أحادية . الخط OU_1 عبارة عن خط يمر خلال نقطة من $B \cap L$.

الآن نختار نقاط المصدر حسب الطريقة الآتية:

ليكن $p_1 = (0, 1, 0)$ ، $p_2 = (1, 0, 0)$ ، $p_3 = (1, 2\lambda^3, 0)$ ، حيث ان $\lambda^2 = \lambda + 1$ ، بما ان تأثير الزمرة الجزئية من PGL(3, 9) التي تُثّبت مجموعة النقاط $\{p_1, p_2, p_3\}$ متعّدي على النقاط السبع المتبقية من L ، فان الخط OU_1 يمر خلال النقطة $(1, 1, 0)$. سوف نأخذ $p_4 = (1, \lambda^3, 0)$ وليكن $O = (0, 0, 1)$. باستخدام المنظور من المحور L والمركز O نستطيع ان نفرض ان $U_1 = (1, 1, 1)$ ، افرض المستوي الافيني $PG(2, 9)\setminus L$. ليكن $B' = B\setminus(L \cup\{U_1, U_2\})$ ، فانه توجد نقطتان من B' تقعان على الخط $X = 0$ ونقطتان على الخط $Y = 0$ ونقطتان على الخط $Y = 2\lambda^3X$ ونقطتان على الخط $Y = \lambda^3X$، وذلك لان هذه الخطوط هي الخطوط Op_i ، حيث $i = 1, \dots, 4$.

فضلا عن ذلك يوجد على كل خط افقي $Y = k$ وخط عمودي $X = k$ وعلى كل خط $Y = 2\lambda^3X + k$ و $Y = \lambda^3X + k$ ، حيث $k \neq 0$ نقطة واحدة من B . بصورة خاصة على الخطوط $X = 1,\ Y = 1,\ Y = 2\lambda^3X + 2\lambda^2,\ Y = \lambda^3X + \lambda,\ Y = X$ التي تمر كلها من خلال النقطة U_1 لا توجد نقطة من B' . وهذا بالتالي يهمل عدد كثير من نقاط المستوي AG(2, 9) .

$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 2)$	$(0, \lambda)$	$(0, 2\lambda)$	$(0, \lambda^2)$	$(0, 2\lambda^2)$	$(0, \lambda^3)$	$(0, 2\lambda^3)$
$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, \lambda)$	$(1, 2\lambda)$	$(1, \lambda^2)$	$(1, 2\lambda^2)$	$(1, \lambda^3)$	$(1, 2\lambda^3)$
$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, \lambda)$	$(2, 2\lambda)$	$(2, \lambda^2)$	$(2, 2\lambda^2)$	$(2, \lambda^3)$	$(2, 2\lambda^3)$
$(\lambda, 0)$	$(\lambda, 1)$	$(\lambda, 2)$	(λ, λ)	$(\lambda, 2\lambda)$	(λ, λ^2)	$(\lambda, 2\lambda^2)$	(λ, λ^3)	$(\lambda, 2\lambda^3)$
$(2\lambda,0)$	$(2\lambda, 1)$	$(2\lambda,2)$	$(2\lambda,\lambda)$	$(2\lambda, 2\lambda)$	$(2\lambda,\lambda^2)$	$(2\lambda, 2\lambda^2)$	$(2\lambda,\lambda^3)$	$(2\lambda, 2\lambda^3)$
$(\lambda^2, 0)$	$(\lambda^2, 1)$	$(\lambda^2,2)$	(λ^2,λ)	$(\lambda^2, 2\lambda)$	(λ^2,λ^2)	$(\lambda^2, 2\lambda^2)$	(λ^2,λ^3)	$(\lambda^2, 2\lambda^3)$
$(2\lambda^2,0)$	$(2\lambda^2,1)$	$(2\lambda^2,2)$	$(2\lambda^2,\lambda)$	$(2\lambda^2,2\lambda)$	$(2\lambda^2,\lambda^2)$	$(2\lambda^2,2\lambda^2)$	$(2\lambda^2,\lambda^3)$	$(2\lambda^2,2\lambda^3)$
$(\lambda^3, 0)$	$(\lambda^3, 1)$	$(\lambda^3, 2)$	(λ^3, λ)	$(\lambda^3, 2\lambda)$	(λ^3, λ^2)	$(\lambda^3, 2\lambda^2)$	(λ^3, λ^3)	$(\lambda^3, 2\lambda^3)$
$(2\lambda^3,0)$	$(2\lambda^3,1)$	$(2\lambda^3,2)$	$(2\lambda^3,\lambda)$	$(2\lambda^3,2\lambda)$	$(2\lambda^3,\lambda^2)$	$(2\lambda^3,2\lambda^2)$	$(2\lambda^3,\lambda^3)$	$(2\lambda^3,2\lambda^3)$

على الخط $Y = 2\lambda^3X$ ، نحتاج إلى اختيار نقطتين من المجموعة:

$$L_1 =\{(2\lambda,\ 2),(\lambda^2,\lambda),(\lambda^3,\lambda^2),(2\lambda^3,2\lambda^2),(2,\lambda^3)\}$$

وعلى الخط $Y = \lambda^3X$ ، نحتاج إلى اختيار نقطتين من المجموعة:

$$L_2 = \{(2,2\lambda^3),(\lambda,2),(\lambda^2,2\lambda),(2\lambda^2,\lambda),(\lambda^3,2\lambda^2)\}$$

وعلى الخط $X = 0$ ، نحتاج إلى اختيار نقطتين من المجموعة:

$$L_3 = \{(0,2),(0,2\lambda),(0,\lambda^2),(0,\lambda^3),(0,2\lambda^3)\}$$

لتكون في B' . كذلك نحتاج إلى اختيار نقطتين من الخط $Y = 0$ لتكون في B' وهذا يعطينا عشرة احتمالات.

نختار $(\lambda,0)$ ، $(2\lambda,0)$ من الخط $Y = 0$ ، بما انه لا يمكن ان تقع نقطتان من B' على نفس الخط الأفقي فان النقاط $(2\lambda,2)$ من L_1 و $(\lambda,2)$ من L_2 يتم حذفها . بما انه على الخطوط $Y = \lambda^3X+1, Y = \lambda^3X+2, Y = 2\lambda^3X+1, Y = 2\lambda^3X+2$ التي تصل النقطتان $(\lambda, 0)$ و $(2\lambda, 0)$ بالنقطتين p_3 و p_4 ، لا يمكن ان نختار نقطة أخرى من B'. لان هذه الخطوط تعد قواطع أحادية لـ B ، فان النقاط $(2\lambda, 2)$ من L_1 و $(\lambda, 2)$ من L_2 و $(0, 2)$ من L_3 يتم حذفها.

وعليه فان هذا الاختيار سوف يعطينا النقطتين $(\lambda, 0)$ و $(2\lambda, 0)$ من $Y = 0$ والنقاط $(2, \lambda^3)$، (λ^2, λ)، $(2\lambda^3, 2\lambda^2)$، (λ^3, λ^2)، من L_1 والنقاط $(2, 2\lambda^3)$، $(\lambda^2, 2\lambda)$، $(2\lambda^2, \lambda)$، $(\lambda^3, 2\lambda^2)$ ، من L_2 والنقاط $(0, 2\lambda)$، $(0, \lambda^2)$، $(0, \lambda^3)$، $(0, 2\lambda^3)$ من L_3 .

فإذا قمنا باختيار نقطتين من $Y = 0$ ونقطتين من L_1 ونقطتين من L_2 ونقطتين من L_3 ، سوف نحصل على ٢١٦ احتمالاً لثماني نقاط من B' .

عليه سوف نختار النقاط $(\lambda, 0)$، $(2\lambda, 0)$ من $Y = 0$ و (λ^3, λ^2)، $(2\lambda^3, 2\lambda^2)$ من L_1 و $(\lambda^2, 2\lambda)$، $(2\lambda^2, \lambda)$ من L_2 و $(0, \lambda^3)$ ، $(0, 2\lambda^3)$ من L_3، لتكون ثماني نقاط أفينية من B'. بما ان هذه النقاط هي أفينية لهذا سوف نحولها إلى نقاط إسقاطية وذلك عن طريق التعويض عن كل نقطة (x, y) بالنقطة $(x, y, 1)$ فنحصل على النقاط الآتية:

$$\{(0,\lambda^3,1),(0,2\lambda^3,1),(\lambda,0,1),(2\lambda,0,1),(\lambda^3,\lambda^2,1),(2\lambda^3,2\lambda^2,1),(\lambda^2,2\lambda,1),(2\lambda^2,\lambda.1)\}$$

هذه النقاط مع النقاط الستة الآتية من $B \cap L$.

$$\{(1,1,0),(1,2,0),(1,\lambda,0),(1,2\lambda,0),(1,\lambda^2,0),(1,2\lambda^2,0)\}$$

إضافة إلى النقطة $U_1 = (1, 1, 1)$ تعطينا النقاط الخمسة عشر من B . ثم باستخدام البرنامج A في المصدر [1] حصلنا على النقطة $U_2 = (1, 1, 2)$ بحيث تكون B مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم ١٦ في المستوي $PG(2, 9)$ وتمتلك قاطعاً سداسياً.

(٥-3) مبرهنة :

توجد مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم ١٦ في المستوي الاسقاطي PG(2, 9) وتمتلك قاطعاً سداسياً.

(3-6) تعريف [9]:

التحويل المُثّبت α (Elation α) في المستوي الاسقاطي PG(2, q) هو عبارة عن تقابل ذاتي يُثّبت نقاط الخط L ، ويثّبت الخطوط التي تمر من نقطة معينة p واقعة على L .

<u>ملاحظات</u> :

١. التحويل المثّبت α يثّبت الخط L نقطة بنقطة والخطوط الأخرى المارة خلال p تثّبتها كمجموعة.
٢. الخط L يسمى محور التحويل المثّبت (The Axis of the Elation) والنقطة p تسمى مركز التحويل المثّبت (The Center of the Elation).
٣. رتبة التحويل المثّبت α في المستوي الاسقاطي PG(2, q) ، حيث $q = p^h$ و p عدد أولي هي p .

(٧-3) مبرهنة :

توجد مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم ١٦ من نوع – ريدي في المستوي الاسقاطي PG(2, 9) .

البرهان :

لتكن (x, y, z) تُمثّل إحداثيات النقاط الاسقاطية . ليكن L خطّاً في المالانهاية (L : Z = 0) وهو خط – ريدي . ولتكن $p_i=(x_i, y_i, 1) \equiv (x_i, y_i)$ ، حيث i = 1, … , 9 نقاطاً أفينية في المجموعة 'B حيث ان 'B هي مجموعة نقاط B التي لا تقع على L . ليكن $A_1 = (0, 1, 0)$ ، $A_2 = (1, 0, 0)$ ، $A_3 = (1, 2, 0)$ ثلاث نقاط واقعة على L\B .

بما ان كل الخطوط الافينية X = aZ خلال النقطة A_1 و Y = bZ خلال النقطة A_2 تحتوي بالضبط على نقطة أفينية واحدة في المجموعة 'B عندئذ نحصل على:

$x_i \neq x_j$ و $y_i \neq y_j$ ، إذا كان $i \neq j$.

بما ان A_3 لا تنتمي إلى B ، فان كل الخطوط الافينية X + Y + aZ = 0 المارة خلال A_3 تحتوي على نقطة واحدة $(x_i, y_i, 1)$ من 'B ، لهذا فان كل المجاميع $x_i + y_i = a$ تكون مختلفة باختلاف i . وعليه فان لكل a في الحقل GF(9) ، يوجد حل وحيد $x_i + y_i = -a$ عليه فان :

$x_i + y_i \neq x_j + y_j$ ، اذا كان $i \neq j$

سوف نستخدم الشروط الثلاثة :

١. $x_i \neq x_j$ اذا كان $i \neq j$.

٢. $y_i \neq y_j$ اذا كان $i \neq j$.

٣. $x_i + y_i \neq x_j + y_j$ اذا كان $i \neq j$.

في عملية البحث عن المجموعة القالبية الاصغرية ذات حجم ١٦ من نوع – ريدي. الآن نفرض ان B' تشكل قوس – ٩ ، فان $B' \cup \{A_1\}$ ، $B' \cup \{A_2\}$ ، $B' \cup \{A_3\}$ ، تشكل ثلاثة اقواس– ١٠، وهذا غير ممكن لانه حسب المبرهنة في المصدر [١] B' محتوى في مخروطي وهذا يعني انه يمكن توسيعه إلى قوس– ١٠ بطريقة واحدة فقط وهو بإضافة النقطة العاشرة للمخروطي . اذن B' لا تشكل قوس– ٩ وعليه فانه يوجد على الأقل ثلاث نقاط من $B\backslash L$ واقعة على خط واحد، والخط الذي يحتوي على هذه النقاط الثلاث يقطع L في نقطة من B.

افرض ان النقطة $(0, 0, 1)$ تقع في B' . وافرض ان النقاط الثلاث من $B\backslash L$ والواقعة على خط واحد من ضمنها النقطة $(0, 0, 1)$. بما ان الزمرة التي تُثّبت المجموعة $\{A_1, A_2, A_3\}$ تحتوي على الأكثر على ستة عناصر التي هي الزمرة $S_3 \cong \langle T_1, T_2\rangle$ حيث ان :

$$T_1 : (x, y, z) \to (y + z, x + 2z, 0)$$
$$T_2 : (x, y, z) \to (2y + z, x + y, 0)$$

ان تأثير هذه الزمرة على مجموعة نقاط L يؤدي الى مدارين المدار الأول هو $\{(1,\lambda,0),(1,2\lambda,0),(1,\lambda^2,0),(1,2\lambda^2,0),(1,\lambda^3,0),(1,2\lambda^3,0)\}$ ، والمدار الثاني هو $\{(1,1,0)\}$.

نختار النقطة $(1, \lambda, 0)$ من المدار الأول ونفرض ان هذه النقطة تقع على خط واحد مع النقاط الثلاث التي من ضمنها النقطة $(0, 0, 1)$.

الآن ليكن $p_1 = (0, 0)$ ، باستخدام المنظور من المحور L والمركز p_1 ، نستطيع ان نفرض ان $p_2 = (1, \lambda)$ ، وباستخدام المنظور مرة أخرى من المحور L والمركز p_2 نستطيع ان نفرض ان $p_3 = (2, 2\lambda)$.

باستخدام التحويل المثبت α مع المحور L والمركز $(1, \lambda, 0)$ حيث ان :

$$\alpha : (x, y, z) \to (x + z, y + \lambda z, z)$$

نرى ان النقاط p_1 ، p_2 ، p_3 تقع في مدار، والنقاط (λ,λ^2)، (λ^2, λ^3)، $(2\lambda^3, 1)$ تقع في مدار، والنقاط $(2\lambda,2\lambda^2)$، $(\lambda^3, 2)$، $(2\lambda^2, 2\lambda^3)$ تقع في مدار أيضاً. لهذا نفرض ان النقاط p_1 ، p_2 ، p_3 تنتمي إلى B' والنقطة (λ,λ^2) في المدار الثاني أو النقطة $(2\lambda,2\lambda^2)$ من المدار الثالث هي النقطة p_4 أي ان $p_4 \in \{(\lambda,\lambda^2), (2\lambda, 2\lambda^2)\}$.

بالبداية نختار $p_4 = (\lambda,\lambda^2)$ ونحصل على نتيجة مشابهة في حالة $p_4 = (2\lambda,2\lambda^2)$.

القاعدة التي نعتمد عليها في اختيار النقاط المتبقية $p_i = (x_i, y_i)$ ، حيث $i = 5, \ldots , 9$ ، لتكون نقاطاً في B' ، هو ان نفرض ان:

١. $x_i \notin \{x_1, \ldots , x_{i-1}\}$

٢. $y_i \notin \{y_1, \ldots , y_{i-1}\}$

٣. $x_i + y_i \notin \{x_1 + y_1, \ldots , x_{i-1} + y_{i-1}\}$

عند اختيار النقاط p_1، p_2، p_3، p_4 في B' . فان قيم x_i هي: ٠، ١، ٢، λ، قيم y_i هي: ٠، λ، ٢λ، λ^2، قيم $x_i + y_i$ هي: ٠، λ^2، ٢λ^2، λ^3 .

بالنسبة للنقطة $p_5=(2\lambda,y_5)$ لدينا $y_5\in\{1, 2, 2\lambda^2, \lambda^3, 2\lambda^3\}$ و $2\lambda + y_5\in \{\lambda^3, 2\lambda^2, 2\lambda^3, \lambda^2, 2\}$. وحسب الشروط الثلاثة المذكورة سابقاً هذا يعطينا احتمالين للنقطة p_5 وهما اما $p_5 = (2\lambda, 2\lambda^2)$ أو $p_5 = (2\lambda, 2\lambda^3)$.

نختار $p_5=(2\lambda,2\lambda^3)$ عند ذلك قيم x_i هي : ٠ ، ١ ، ٢ ، λ ، 2λ وقيم y_i هي : ٠ ، λ ، 2λ ، λ^2 ، ٢λ^3 ، قيم x_i+y_i هي : ٠ ، λ^2 ، $2\lambda^2$ ، λ^3 ، ٢ ، بالنسبة للنقطة $p_6 = (\lambda^2, y_6)$ لدينا $y_6 \in \{1, 2, 2\lambda^2, \lambda^3\}$ و $\lambda^2 + y_6\in\{2\lambda^3, \lambda, 0, 2\}$. حسب الشروط الثلاثة هذا يعطينا احتمالين للنقطة p_6 وهما اما $p_6 = (\lambda^2, 1)$ او $p_6 = (\lambda^2, 2)$.

نختار $p_6 = (\lambda^2, 2)$ ، عند ذلك قيم x_i هي: ٠ ، ١ ، ٢ ، λ ، ٢λ ، λ^2 ، قيم y_i هي: ٠ ، λ ، ٢λ ، λ^2 ، ٢λ^3 ، ٢ ، قيم $x_i + y_i$ هي: ٠ ، λ^2 ، ٢λ^2 ، λ^3 ، ٢ ، λ .

بالنسبة للنقطة $p_7 = (2\lambda^2, y_7)$ لدينا $y_7 \in \{1, 2\lambda^2, \lambda^3\}$ و $2\lambda^2 + y_7 \in \{2\lambda, \lambda^2, \lambda\}$ ، وحسب الشروط الثلاثة هذا يعطينا احتمالاً واحداً لـ p_7 وهو $p_7 = (2\lambda^2, 1)$.

عندما نأخذ $p_7 = (2\lambda^2, 1)$ فان قيم x_i هي: ٠، ١، ٢، λ، ٢λ، λ^2، ٢λ^2، قيم y_i هي: ٠، λ، ٢λ، λ^2، ٢λ^3، ٢، ١، قيم $x_i + y_i$ هي: ٠، λ^2، ٢λ^2، λ^3، ٢، λ، ٢λ. بالنسبة للنقطة $p_8 = (\lambda^3, y_8)$ لدينا $y_8\in\{2\lambda^2, \lambda^3\}$ و $\lambda^3 + y_8\in\{\lambda, 2\lambda^3\}$ وحسب الشروط الثلاثة هذا يعطينا احتمالاً واحداً لـ p_8 وهو $p_8 = (\lambda^3, \lambda^3)$.

وعندما نأخذ $p_8 = (\lambda^3, \lambda^3)$، فان قيم x_i هي: ٠، ١، ٢، λ، ٢λ، λ^2، ٢λ^2، λ^3، قيم y_i هي : ٠، λ، ٢λ، λ^2، ٢λ^3، ٢، ١، λ^3، قيم x_i+y_i هي : ٠، λ^2، ٢λ^2، λ^3، ٢، λ، ٢λ، ٢λ^3. وحسب الشروط الثلاثة فان الاحتمال الوحيد لـ p_9 وهو $p_9 = (2\lambda^3, 2\lambda^2)$.

عليه فان النقاط الافينية التسعة قد تم الحصول عليها وهي:

$p_1 = (0,0)$, $p_2 = (1,\lambda)$, $p_3 = (2,2\lambda)$, $p_4 = (\lambda,\lambda^2)$, $p_5 = (2\lambda,2\lambda^3)$, $p_6 = (\lambda^2,2)$, $p_7 = (2\lambda^2,1)$, $p_8 = (\lambda^3,\lambda^3)$, $p_9 = (2\lambda^3,2\lambda^2)$.

وباستخدام البرنامج B الموجود في المصدر [1] أتّضح ان هذه النقاط التسعة مع النقاط السبعة من B∩L تشكل مجموعة قالبية أصغرية B ذات حجم ١٦ من نوع – ريدي .

References المصادر

١. جنار عبد الكريم أحمد (2006). الحدود الدنيا للمجاميع القالبية– t في PG(2,q) وإيجاد المجاميع القالبية الاصغرية ذات حجوم ١٦ و ١٧ في PG(2,9)، رسالة ماجستير– جامعة الموصل

2. Barát, J. and Innamorati, S. (2003), "Largest minimal blocking sets in PG(2, 8)", J. Combin. Designs. 11: 162-169.

3. Blokhuis, A. (1994), "Note on the size of a blocking set in PG(2, p)", Combinatorica. 14, 111-114.

4. Bruen, A. A. (1986), "Arcs and multiple blocking sets", Combinatorica, Symposia, Mathematica 28, Academic Press, 15-29.

5. De Resmini, M. J. (1987), "On 3 –blocking sets in projective planes", Ann. Discr. Math., 34, 145-152.

6. Di Paola, J. (1969), "On minimum blocking coalitions in small projective plane games", SIAM J. Appl. Math., 17, 378-392. Vol. 49, CUP, 153-168.

7. Hirschfeld, J. W. P. (1979), "**Projective Geometries over Finite Fields**", Oxford University Press, Oxford.

8. Hirschfeld, J. W. P. and Storme, L. (1998), "The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces", J. Statistical.

9. Innamorate, S. and Storme, L. (2004), "Minimal blocking sets in PG(2,٨) and maximal partial spreads in PG(3, 8)", Designs, Codes and Cryptography, 13, 15-26.

10. Jamison, R. E. (1977), "Covering finite fields with cosets of subspaces", J. Combin. Theory, Ser. A, Vol. 22, 253-266.

11. Richardson, M. (1956), "On finite projective games", Proc. Amer. Math. Soc., 7, 458-465.