بناء الأقواس – (k,5) في مستوي ديزارك PG (2,9)(*)

د. عبد الخالق لازم ياسين   فرح حازم محمد
قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

الاستلام   القبول
٢٢ / 05 / ٢٠٠٧   05 / 11 / ٢٠٠٧

Abstract

A (k,n) – arc in the finite projective PG(2,q) is defined to be the set K which is composed of k points such that there is a line passes through n points but no line can pass through more than n points. A (k,n) – arc is called complete if there is no (k+1,n) – arc containing it. In this research we have constructed and classified all the projectively distinct (k,5) – arcs for k = 7, 8, 9 in the projective planes PG(2,9). We proved that (k,5) – arcs are not complete in the projective plane PG(2, 9) for $5 \leq k \leq 25$. We contructed and classified the (13,5) – arcs in the projective plane PG(2,9) where all of these arcs containing a conic by using a computer program .

المستخلص

يعرف القوس – (k,n) في المستوي ألإسقاطي المنتهي PG(2,q) بأنّه المجموعة K المتكونة من k من النقاط بحيث يوجد مستقيم يمر بـ n من النقاط ولا يوجد مستقيم يمر بأكثر من n من النقاط. القوس – (k,n) يسمى تاماً إذا كان من غير الممكن إيجاد قوس – (k+1,n) يحتويه. قمنا في هذا البحث ببناء وتصنيف الأقواس – (k,5) المختلفة اسقاطياً لقيم k = 7, 8, 9 في المستوي PG(2,9). بَرْهَنّا على عدم وجود الأقواس – (k,5) التامة في المستوي PG(2,9) لقيم $5 \leq k \leq 25$ كما قمنا ببناء وتصنيف الأقواس – (13,5) في المستوي ألإسقاطي PG(2,9) واستنتجنا صفات هذه الأقواس وذلك با حتوائها على المخروط ي وقد استخدمنا لهذا الغرض برنامج حاسوبي.

(*) بحث مستل من رسالة الماجستير التي أنجزها الباحث الثاني بأشراف الباحث الأول في جامعة الموصل (٢٠٠٥).

(1) المقدمة Introduction

لقد تطرق باحثون عديدون لموضوع بناء وتصنيف الأقواس منهم الباحث [9] لدراسة الأقواس – (k,3) في المستوي الاسقاطي PG(2,9) لقيم q=4,5، كما درس الباحث [13] الأقواس – (k,3) في المستوي الاسقاطي PG(2,8) متضمنة الحقل الجزئي PG(2,2) أما الباحث [10] فقد درس العلاقة بين الأقواس التامة والمنحنيات الجبرية.

(1-1) تعريف [5]

إذا كانت $F(x) = x^n - a_{n-1}\, x^{n-1} - \dots - a_o$ متعددة حدود أحادية، فإن المصفوفة المرافقة C(F) (Companion matrix) هي مصفوفة ذات بعد n x n

$$\mathbf{C(F)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots\dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots\dots & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & \dots\dots & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots\dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{a_o} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} & \dots\dots & \mathbf{a_{n-1}} \end{bmatrix}$$

(1-2) المبرهنة الأساسية في الهندسة الإسقاطية [5]

(Fundamental Theorem of Projective Geometry)

١) إذا كانت $\{p_1,\ p_2,\dots,\ p_{n+2}\}$ و $\{p'_1,\ p'_2,\dots,\ p'_{n+2}\}$ مجموعتين من n+2 من النقاط في PG(n,k)، بحيث إنه لا يوجد n+1 من النقاط المختارة من نفس المجموعة واقعة في أولي، فإن هناك إسقاطاً وحيداً S بحيث إن $P'_i = P_i\, S$ و $i \in N_{n+2}$.

٢) ليكن A = PG(n,k) فإن الدالة $S'\colon A \to A$ تسمى استقامة (Collination) إذا كانت $S' = \sigma\ S$، حيث إن σ عبارة عن تقابل ذاتي على A (Automorphism) و S هو إسقاط.

بصورة خاصة إذا كانت $K=GF(p^h)$ و $P(x')=P(x)S'$ فانه يوجد $m \in N_h$ و $t_{ij} \in K$ و $(i, j) \in \overline{N}_n^{\,2}$ و $t \in K_o$ بحيث إن

$$tX' = X^{p^m}\, T$$

حيث

$$X^{p^m} = (\, X_0^{p^m}, X_1^{p^m},\ \dots,\ X_n^{p^m}\,)$$

$$T = (t_{ij}),\ i, j \in \overline{N}_n^{\,2}$$

(1-3) مبرهنة [5]

لتكن T_i تمثل العدد الكلي للقواطع – i للقوس – (k,n) في المستوي الإسقاطي PG(2,q) ولتكن R_i تمثل عدد القواطع – i للقوس – (k,n) عند النقطة p التي تنتمي إلى

القوس – (k,n) ، ولتكن S_i تمثل عدد كل القواطع – i للقوس – (k,n) عند النقطة Q وهي نقطة خارجة عن نقاط القوس k، فان المعادلات الآتية تتحقق:

1- $\sum_{i=0}^{n} Ti = q^2 + q + 1;$

2- $\sum_{i=1}^{n} iTi = k(q+1);$

3- $\sum_{i=2}^{n} i(i-1)Ti = k(k-1);$

4- $\sum_{i=1}^{n} Ri = q+1;$

5- $\sum_{i=2}^{n} (i-1)Ri = k-1;$

6- $\sum_{i=0}^{n} Si = q+1;$

7- $\sum_{i=1}^{n} iSi = k;$

8- $i\, T_i = \sum_{p} Ri;$

9- $(q + 1 - i)\, T_i = \sum_{Q} Si;$

(1-4) مبرهنة [3]

إذا كان k عبارة عن قوس تام من النمط (k,n) فإن:

$(q + 1 - n)\, T_n \geq q^2 + q + 1 - k$

وتصح المساواة إذا وفقط إذا كان $S_n=1$ لكل نقاط المستوي PG(2,q) \ k.

(1-5) مبرهنة [5]

1) كل مخروطي في المستوي PG(2,q) هو قوس q+1.

2) عندما يكون q عدداً فردياً، فان القوس (q+1) يكون مخروطياً.

(1-6) مبرهنة [5]

في المستوي PG(2,q)، عندما يكون q عدداً فردياً كل بيضوي هو مخروطي.

(2) المستوي الإسقاطي PG (2,9)

المستوي PG(2,q) يحتوي على q^2+q+1 من النقاط وعلى نفس العدد من الخطوط، كما وان كل خط يحتوي على q+1 من النقاط وكل نقطة تمر خلالها q+1 من الخطوط وعليه فان في المستوي PG(2,9)، θ(1)=10، θ(2) = 9، حيث إن θ(1) تمثل عدد النقاط على الخط الواحد، وأن θ(2) تمثل عدد النقاط في المستوي PG(2,9).

لتكن
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$
هي المصفوفة المرافقة لمتعددة حدود
$$F(X) = X^3 - e^2 X^2 - 1$$

حيث ان e هي جذر أولي في الحقل *GF(9)* وهذه المصفوفة تمثل إسقاطاً دواراً في المستوي PG(2,9).

سنعبر عن عناصر *GF(9)* التي هي $0,1, -1, e, -e, e^2, -e^2, e^3, -e^3$ على التوالي بالأرقام 9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1. وذلك لضرورة استخدامها في البرامج الحاسوبية، وبذلك تكون المصفوفة T بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

عن طريق الضرب الأيمن لنقطة أولى مختارة $U_o = (2,1,1)$ في المصفوفة T نحصل على نقاط المستوي الحادي والتسعين وكذلك خطوط المستوي الحادي والتسعين وكما هو موضح في الجدولين (1–2) و (2-2).

الجدول (2-1): يمثل نقاط المستوي PG(2,9)

i	P_i	i	P_i	i	P_i	i	P_i
٠	(2, 1, 1)	٢٣	(2, 6, 4)	٤٦	(2, 8, 6)	٦٩	(2, 7, 7)
١	(1, 2, 1)	٢٤	(2, 5, 5)	٤٧	(2, 7, 8)	٧٠	(2, 6, 9)
٢	(1, 1, 2)	٢٥	(2, 8, 9)	٤٨	(2, 5, 3)	٧١	(2, 4, 3)
٣	(2, 1, 6)	٢٦	(2, 4, 4)	٤٩	(2, 3, 8)	٧٢	(2, 3, 2)
٤	(2, 7, 6)	٢٧	(2, 9, 9)	٥٠	(2, 5, 8)	٧٣	(2, 2, 4)
٥	(2, 7, 4)	٢٨	(2, 4, 9)	٥١	(2, 5, 7)	٧٤	(2,9, 5)
٦	(2, 9, 2)	٢٩	(2, 4, 7)	٥٢	(2, 6, 5)	٧٥	(2, 8, 7)
٧	(2, 2, 5)	٣٠	(2, 6, 3)	٥٣	(2, 8, 2)	٧٦	(2, 6, 2)
٨	(2, 8, 3)	٣١	(2, 3, 1)	٥٤	(2, 2, 3)	٧٧	(2, 2, 7)
٩	(2, 3, 5)	٣٢	(1, 2, 3)	٥٥	(2, 3, 4)	٧٨	(2, 6, 7)

١٠	(2, 8, 5)	٣٣	(2, 1, 4)	٥٦	(2, 9, 3)	٧٩	(2, 6, 4)
١١	(2, 8, 1)	٣٤	(2, 9, 6)	٥٧	(2, 3, 3)	٨٠	(2, 9, 8)
١٢	(1, 2, 8)	٣٥	(2, 7, 2)	٥٨	(2, 3, 9)	٨١	(2, 5, 4)
١٣	(2, 1, 2)	٣٦	(2, 2, 1)	٥٩	(2, 4, 2)	٨٢	(2, 9, 4)
١٤	(2, 2, 6)	٣٧	(1, 2, 2)	٦٠	(2, 2, 8)	٨٣	(2, 9, 1)
١٥	(2, 7, 1)	٣٨	(2, 1, 9)	٦١	(2, 5, 2)	٨٤	(1, 2, 9)
١٦	(1, 2, 7)	٣٩	(2, 4, 6)	٦٢	(2, 2, 2)	٨٥	(2, 1, 8)
١٧	(2, 1, 7)	٤٠	(2, 7, 5)	٦٣	(2, 2, 9)	٨٦	(2, 5, 6)
١٨	(2, 6, 6)	٤١	(2, 8, 8)	٦٤	(2, 4, ٨)	٨٧	(2, 7, 3)
١٩	(2, 7, 9)	٤٢	(2, 5, 9)	٦٥	(2, 5, 1)	٨٨	(2, 3, 7)
٢٠	(2, 4, 5)	٤٣	(2, 4, 1)	٦٦	(1, 2, 5)	٨٩	(2, 6, 1)
٢١	(2, 8, 4)	٤٤	(1, 2, 4)	٦٧	(2, 1, 3)	٩٠	(1, 2, 6)
٢٢	(2, 9, 7)	٤٥	(2, 1, 5)	٦٨	(2, 3, 6)		

الجدول (2-2): يمثل مستقيمات المستوي PG(2,9)

المستقيم	نقاط المستقيم									معادلة المستقيم
L1	٠	١	١١	١٥	٣١	٣٦	٤٣	٦٥	٨٣	٨٩	$2 X_2$
L2	١	٢	١٢	١٦	٣٢	٣٧	٤٤	٦٦	٨٤	٩٠	$2X_o$
L3	٢	٣	١٣	١٧	٣٣	٣٨	٤٥	٦٧	٨٥	٠	$3 X_1$
L٤	٣	٤	١٤	١٨	٣٤	٣٩	٤٦	٦٨	٨٦	١	$3X_o + 7 X_2$
L٥	٤	٥	١٥	١٩	٣٥	٤٠	٤٧	٦٩	٨٧	٢	$6X_o + 2X_1$
L٦	٥	٦	١٦	٢٠	٣٦	٤١	٤٨	٧٠	٨٨	٣	$8X_o +9X_1 + 5X_2$
L٧	٦	٧	١٧	٢١	٣٧	٤٢	٤٩	٧١	٨٩	٤	$2X_o +6X_1 + 7X_2$
L٨	٧	٨	١٨	٢٢	٣٨	٤٣	٥٠	٧٢	٩٠	٥	$2X_o +8X_1 + 5X_2$
L٩	٨	٩	١٩	٢٣	٣٩	٤٤	٥١	٧٣	٠	٦	$3X_1 + 9 X_2$
L١٠	٩	١٠	٢٠	٢٤	٤٠	٤٥	٥٢	٧٤	١	٧	$5X_o + 3 X_2$
L١١	١٠	١١	٢١	٢٥	٤١	٤٦	٥٣	٧٥	٢	٨	$9X_o +2X_1$
L١٢	١١	١٢	٢٢	٢٦	٤٢	٤٧	٥٤	٧٦	٣	٩	$6X_o +8X_1 + 3X_2$
L١٣	١٢	١٣	٢٣	٢٧	٤٣	٤٨	٥٥	٧٧	٤	١٠	$2X_o +8X_1 + 3 X_2$
L١٤	١٣	١٤	٢٤	٢٨	٤٤	٤٩	٥٦	٧٨	٥	١١	$2X_o +4X_1 + 3X_2$
L١٥	١٤	١٥	٢٥	٢٩	٤٥	٥٠	٥٧	٧٩	٦	١٢	$4X_o +9X_1 + 2 X_2$
L١٦	١٥	١٦	٢٦	٣٠	٤٦	٥١	٥٨	٨٠	٧	١٣	$2X_o +3X_1 + 3 X_2$
L١٧	١٦	١٧	٢٧	٣١	٤٧	٥٢	٥٩	٨١	٨	١٤	$8X_o +8X_1 + 4 X_2$
L١٨	١٧	١٨	٢٨	٣٢	٤٨	٥٣	٦٠	٨٢	٩	١٥	$8X_o +5X_1 + 5 X_2$
L١٩	١٨	19	٢٩	٣٣	٤٩	٥٤	٦١	٨٣	١٠	١٦	$5X_o +6X_1 + 2X_2$
L٢٠	19	٢٠	٣٠	٣٤	٥٠	٥٥	٦٢	٨٤	١١	١٧	$4X_o +6X_1 + 9X_2$
L٢١	٢٠	٢١	٣١	٣٥	٥١	٥٦	٦٣	٨٥	١٢	١٨	$8X_o +8X_1 + 3X_2$
L٢٢	٢١	٢٢	٣٢	٣٦	٥٢	٥٧	٦٤	٨٦	١٣	19	$6X_o +7X_1 + 7X_2$
L23	٢٢	٢٣	٣٣	٣٧	٥٣	٥٨	٦٥	٨٧	١٤	٢٠	$3X_o +8X_1 + 9 X_2$
L٢٤	٢٣	٢٤	٣٤	٣٨	٥٤	٥٩	٦٦	٨٨	١٥	٢١	$9X_o +5X_1 + 3 X_2$
L٢٥	٢٤	٢٥	٣٥	٣٩	٥٥	٦٠	٦٧	٨٩	١٦	٢٢	$3X_o +7X_1 + 3 X_2$
L٢٦	٢٥	٢٦	٣٦	٤٠	٥٦	٦١	٦٨	٩٠	١٧	٢٣	$3X_o +2X_1 + 6 X_2$
L٢٧	٢٦	٢٧	٣٧	٤١	٥٧	٦٢	٦٩	٠	١٨	٢٤	$7X_1 + 6 X_2$
L٢٨	٢٧	٢٨	٣٨	٤٢	٥٨	٦٣	٧٠	١	19	٢٥	$9X_o + 3 X_2$
L٢٩	٢٨	٢٩	٣٩	٤٣	٥٩	٦٤	٧١	٢	٢٠	٢٦	$5X_o +2X_1$

L٣٠	٢٩	٣٠	٤٠	٤٤	٦٠	٦٥	٧٢	٣	٢١	٢٧	$4X_o + 2X_1 + 8X_2$
L٣١	٣٠	٣١	٤١	٤٥	٦١	٦٦	٧٣	٤	٢٢	٢٨	$7X_o + 7X_1 + 5X_2$
L٣٢	٣١	٣٢	٤٢	٤٦	٦٢	٦٧	٧٤	٥	٢٣	٢٩	$7X_o + 7X_1 + 7X_2$
L٣٣	٣٢	٣٣	٤٣	٤٧	٦٣	٦٨	٧٥	٦	٢٤	٣٠	$9X_o + 6X_1 + 6X_2$
L٣٤	٣٣	٣٤	٤٤	٤٨	٦٤	٦٩	٧٦	٧	٢٥	٣١	$3X_o + 3X_1 + 9X_2$
L٣٥	٣٤	٣٥	٤٥	٤٩	٦٥	٧٠	٧٧	٨	٢٦	٣٢	$4X_o + 2X_1 + 2X_2$
L٣٦	٣٥	٣٦	٤٦	٥٠	٦٦	٧١	٧٨	٩	٢٧	٣٣	$7X_o + 6X_1 + 4X_2$
L٣٧	٣٦	٣٧	٤٧	٥١	٦٧	٧٢	٧٩	١٠	٢٨	٣٤	$5X_o + 4X_1 + 5X_2$
L٣٨	٣٧	٣٨	٤٨	٥٢	٦٨	٧٣	٨٠	١١	٢٩	٣٥	$9X_o + 2X_1 + 3X_2$
L٣٩	٣٨	٣٩	٤٩	٥٣	٦٩	٧٤	٨١	١٢	٣٠	٣٦	$8X_o + 9X_1 + 2X_2$
L٤٠	٣٩	٤٠	٥٠	٥٤	٧٠	٧٥	٨٢	١٣	٣١	٣٧	$3X_o + 3X_1 + 2X_2$
L٤١	٤٠	٤١	٥١	٥٥	٧١	٧٦	٨٣	١٤	٣٢	٣٨	$3X_o$
L٤٢	٤١	٤٢	٥٢	٥٦	٧٢	٧٧	٨٤	١٥	٣٣	٣٩	$4X_o + 9X_1 + 3X_2$
L٤٣	٤٢	٤٣	٥٣	٥٧	٧٣	٧٨	٨٥	١٦	٣٤	٤٠	$5X_o$
L٤٤	٤٣	٤٤	٥٤	٥٨	٧٤	٧٩	٨٦	١٧	٣٥	٤١	$3X_o + 9X_1 + 6X_2$
L٤٥	٤٤	٤٥	٥٥	٥٩	٧٥	٨٠	٨٧	١٨	٣٦	٤٢	$6X_o + 7X_1 + 4X_2$
L٤٦	٤٥	٤٦	٥٦	٦٠	٧٦	٨١	٨٨	19	٣٧	٤٣	$5X_o + 2X_1 + 3X_2$
L٤٧	٤٦	٤٧	٥٧	٦١	٧٧	٨٢	٨٩	٢٠	٣٨	٤٤	$9X_o + 4X_1 + 3X_2$
L٤٨	٤٧	٤٨	٥٨	٦٢	٧٨	٨٣	٩٠	٢١	٣٩	٤٥	$9X_o + 4X_1 + 7X_2$
L٤٩	٤٨	٤٩	٥٩	٦٣	٧٩	٨٤	٠	٢٢	٤٠	٤٦	$9X_o + 6X_1 + 3X_2$
L٥٠	٤٩	٥٠	٦٠	٦٤	٨٠	٨٥	١	٢٣	٤١	٤٧	$9X_1 + 6X_2$
L٥١	٥٠	٥١	٦١	٦٥	٨١	٨٦	٢	٢٤	٤٢	٤٨	$5X_o + 3X_2$
L٥٢	٥١	٥٢	٦٢	٦٦	٨٢	٨٧	٣	٢٥	٤٣	٤٩	$9X_o + 2X_1$
L٥٣	٥٢	٥٣	٦٣	٦٧	٨٣	٨٨	٤	٢٦	٤٤	٥٠	$7X_o + 5X_1 + 2X_2$
L٥٤	٥٣	٥٤	٦٤	٦٨	٨٤	٨٩	٥	٢٧	٤٥	٥١	$8X_o + 5X_1 + 6X_2$
L٥٥	٥٤	٥٥	٦٥	٦٩	٨٥	٩٠	٦	٢٨	٤٦	٥٢	$8X_o + 6X_1 + 3X_2$
L٥٦	٥٥	٥٦	٦٦	٧٠	٨٦	٠	٧	٢٩	٤٧	٥٣	$3X_1 + 9X_2$
L٥٧	٥٦	٥٧	٦٧	٧١	٨٧	١	٨	٣٠	٤٨	٥٤	$5X_o + 3X_2$
L٥٨	٥٧	٥٨	٦٨	٧٢	٨٨	٢	٩	٣١	٤٩	٥٥	$9X_o + 2X_1$
L٥٩	٥٨	٥٩	٦٩	٧٣	٨٩	٣	١٠	٣٢	٥٠	٥٦	$6X_o + 8X_1 + 3X_2$
L٦٠	٥٩	٦٠	٧٠	٧٤	٩٠	٤	١١	٣٣	٥١	٥٧	$5X_o + 7X_1 + 2X_2$
L٦١	٦٠	٦١	٧١	٧٥	٠	٥	١٢	٣٤	٥٢	٥٨	$5X_1 + 7X_2$
L٦٢	٦١	٦٢	٧٢	٧٦	١	٦	١٣	٣٥	٥٣	٥٩	$2X_o + 3X_2$
L٦٣	٦٢	٦٣	٧٣	٧٧	٢	٧	١٤	٣٦	٥٤	٦٠	$3X_o + 2X_1$
L٦٤	٦٣	٦٤	٧٤	٧٨	٣	٨	١٥	٣٧	٥٥	٦١	$4X_o + 9X_1 + 8X_2$
L٦٥	٦٤	٦٥	٧٥	٧٩	٤	٩	١٦	٣٨	٥٦	٦٢	$9X_o + 3X_1 + 2X_2$
L66	٦٥	٦٦	٧٦	٨٠	٥	١٠	١٧	٣٩	٥٧	٦٣	$6X_o + 4X_1 + 2X_2$
L67	٦٦	٦٧	٧٧	٨١	٦	١١	١٨	٤٠	٥٨	٦٤	$6X_o + 8X_1 + 6X_2$
L٦٨	٦٧	٦٨	٧٨	٨٢	٧	١٢	19	٤١	٥٩	٦٥	$4X_o + 2X_1 + 4X_2$
L69	٦٨	٦٩	٧٩	٨٣	٨	١٣	٢٠	٤٢	٦٠	٦٦	$2X_o + 5X_1 + 3X_2$
L٧٠	٦٩	٧٠	٨٠	٨٤	٩	١٤	٢١	٤٣	٦١	٦٧	$3X_o + 9X_1 + 3X_2$
L٧١	٧٠	٧١	٨١	٨٥	١٠	١٥	٢٢	٤٤	٦٢	٦٨	$2X_o + 7X_1 + 4X_2$
L٧٢	٧١	٧٢	٨٢	٨٦	١١	١٦	٢٣	٤٥	٦٣	٦٩	$2X_o + 4X_1 + 9X_2$
L٧٣	٧٢	٧٣	٨٣	٨٧	١٢	١٧	٢٤	٤٦	٦٤	٧٠	٧$X_o + 8X_1 + 3X_2$
L٧٤	٧٣	٧٤	٨٤	٨٨	١٣	١٨	٢٥	٤٧	٦٥	٧١	٤$X_o + 6X_1 + 5X_2$
L٧٥	٧٤	٧٥	٨٥	٨٩	١٤	19	٢٦	٤٨	٦٦	٧٢	٣$X_o + 7X_1 + 5X_2$
L٧٦	٧٥	٧٦	٨٦	٩٠	١٥	٢٠	٢٧	٤٩	٦٧	٧٣	٣$X_o + 6X_1 + 3X_2$
L٧٧	٧٦	٧٧	٨٧	٠	١٦	٢١	٢٨	٥٠	٦٨	٧٤	$6X_1 + 2X_2$
L٧٨	٧٧	٧٨	٨٨	١	١٧	٢٢	٢٩	٥١	٦٩	٧٥	٧$X_o + 3X_2$
L٧٩	٧٨	٧٩	٨٩	٢	١٨	٢٣	٣٠	٥٢	٧٠	٧٦	٧$X_o + 2X_1$
L٨٠	٧٩	٨٠	٩٠	٣	19	٢٤	٣١	٥٣	٧١	٧٧	٧$X_o + 7X_1 + 2X_2$
L٨١	٨٠	٨١	٠	٤	٢٠	٢٥	٣٢	٥٤	٧٢	٧٨	$7X_1 + 7X_2$
L٨٢	٨١	٨٢	١	٥	٢١	٢٦	٣٣	٥٥	٧٣	٧٩	٤$X_o + 3X_2$
L٨٣	٨٢	٨٣	٢	٦	٢٢	٢٧	٣٤	٥٦	٧٤	٨٠	٨$X_o + 2X_1$
L٨٤	٨٣	٨٤	٣	٧	٢٣	٢٨	٣٥	٥٧	٧٥	٨١	٨$X_o + 2X_1 + 5X_2$

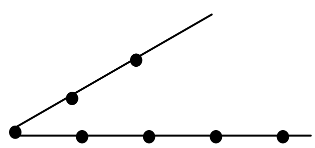
L٨٥	٨٤	٨٥	٤	٨	٢٤	٢٩	٣٦	٥٨	٧٦	٨٢	٨X_o +9X_1 + 3 X_2
L٨٦	٨٥	٨٦	٥	٩	٢٥	٣٠	٣٧	٥٩	٧٧	٨٣	٦X_o +9X_1 + 8 X_2
L٨٧	٨٦	٨٧	٦	١٠	٢٦	٣١	٣٨	٦٠	٧٨	٨٤	٩X_o +9X_1 + 3 X_2
L٨٨	٨٧	٨٨	٧	١١	٢٧	٣٢	٣٩	٦١	٧٩	٨٥	٨X_o +2X_1 + 2 X_2
L٨٩	٨٨	٨٩	٨	١٢	٢٨	٣٣	٤٠	٦٢	٨٠	٨٦	٤X_o +8X_1 + 3 X_2
L٩٠	٨٩	٩٠	٩	١٣	٢٩	٣٤	٤١	٦٣	٨١	٨٧	2X_o +6X_1 + 3 X_2
L٩١	٩٠	٠	١٠	١٤	٣٠	٣٥	٤٢	٦٤	٨٢	٨٨	4X_1 + 8 X_2

لقد تم في هذا البحث استخدام الطريقة المتسلسلة مبتدئين بـ $k=7$ لبناء وتصنيف الأقواس – (k,5)، حسب المبرهنة الأساسية (2–1) بدأنا بالقيمة $k=7$ ثم أخذنا النقاط الأربعة في المستوي $U_0=(2,1,1)$،$U_1=(1,2,1)$، $U_2=(1,1,2)$،$U_3=(2,2,2)$، ثم اخترنا أحد القواطع الثنائية لنقطتين مختارتين وليكن U_0U_1 ومن النقاط الثمانية الأخرى للقاطع U_0U_1 أخذنا المجاميع المختلفة المتكونة من ثلاث نقاط وأضفناها إلى مجموعة النقاط الأربع فتكونت لدينا الأقواس – (7,5)، وكذلك قمنا بإيجاد زمرة الإسقاطات (Group of projectivite) لكل قوس – (k,5)حيث إن $k = 7, 8, 9$. باستخدام البرنامج الحاسوبي.

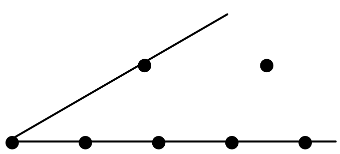
(1- 2) بناء وتصنيف الأقواس – (7,5) في PG (2,9)

لبناء الأقواس – (7,5) نبدأ بأربع نقاط هي $\{U_0,U_1,U_2,U_3\}$ وهي تمثل القوس – ٤ (4–arc) قمنا بإضافة كل ثلاث نقاط معاً من أي قاطع – 2 مختاراً للقوس المتكون من النقاط الأربع فتتكون كل الأقواس – (7,5) للمستوي والتي تمر بالنقاط الأربع أعلاه، ثم قمنا بتحويل هذه الأقواس – (7,5) إلى المتجهات الإحداثية لكي يكون بإمكان البرنامج تقبلها، وبعد تنفيذ البرنامج عليها حصلنا على الأقواس – (7,5) المختلفة إسقاطياً بدلالة المتجهات الإحداثية . وقد تبين ان عدد الأقواس – (7,5) المختلفة إسقاطياً هو (51) قوساً كما في الجدول (3-2) حيث وجد أن (8) أقواس منها تمتلك زمرة من نوع C_2 X C_4 وهي اكبر زمرة في حين وجد أن (15) قوساً تمتلك زمرة من نوع C_2 X C_2، في حين كان ظهور (28) قوساً تمتلك زمرة من نوع C_2 علماً ان جميع الأقواس – (7,5) هي أقواس غير تامة باستخدام برنامج حاسوبي.

إن جميع الأقواس المتكونة تمتلك قاطعاً خماسياً وحيداً وبذلك تكون الأشكال الهندسية المختلفة للأقواس هي إثنان أحدهما يمتلك قاطعاً ثلاثياً واحداً والآخر لا يمتلك قاطعاً ثلاثياً كما في الشكلين (1) و (2).



الشكل (1)



الشكل (2)

إن القوس (28) الذي يمتلك اكبر زمرة هي

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

وهو مكافئ للشكل (1) .

الجدول (2-3)

i	Distinct (7, 5) – arcs							G	|G|
١	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	C_2	2
٢	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	$C_2 X C_2$	4
٣	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	$C_2 X C_2$	4
٤	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٦٥	C_2	2
٥	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٨٣	C_2	2
٦	0	١	٢	٦٢	١١	١٥	٨٩	C_2	2
٧	0	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	C_2	2
٨	0	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	$C_2 X C_4$	8
٩	0	١	٢	٦٢	١١	٣١	٦٥	$C_2 X C_2$	٤
١٠	0	١	٢	٦٢	١١	٣١	٨٣	C_2	2
١١	0	١	٢	٦٢	١١	٣١	٨٩	$C_2 X C_2$	٤
١٢	0	١	٢	٦٢	١١	٣٦	٤٣	C_2	٢
١٣	0	١	٢	٦٢	١١	٣٦	٦٥	$C_2 X C_2$	٤
١٤	0	١	٢	٦٢	١١	٣٦	٨٣	$C_2 X C_4$	٨
١٥	0	١	٢	٦٢	١١	٣٦	٨٩	C_2	٢
١٦	0	١	٢	٦٢	١١	٤٣	٦٥	C_2	٢
١٧	0	١	٢	٦٢	١١	٤٣	٨٩	$C_2 X C_2$	٤
١٨	0	١	٢	٦٢	١١	٦٥	٨٣	C_2	٢
19	0	١	٢	٦٢	١١	٦٥	٨٩	C_2	٢
٢٠	0	١	٢	٦٢	١١	٨٣	٨٩	$C_2 X C_4$	٨
٢١	0	١	٢	٦٢	١٥	٣١	٣٦	C_2	٢
٢٢	0	١	٢	٦٢	١٥	٣١	٤٣	$C_2 X C_2$	٤
٢٣	0	١	٢	٦٢	١٥	٣١	٦٥	$C_2 X C_2$	٤
٢٤	0	١	٢	٦٢	١٥	٣١	٨٩	$C_2 X C_4$	٨
٢٥	0	١	٢	٦٢	١٥	٣٦	٤٣	C_2	٢
٢٦	0	١	٢	٦٢	١٥	٣٦	٦٥	C_2	٢
٢٧	0	١	٢	٦٢	١٥	٣٦	٨٣	$C_2 X C_2$	٤
٢٨	0	١	٢	٦٢	١٥	٣٦	٨٩	$C_2 X C_4$	٨
٢٩	0	١	٢	٦٢	١٥	٤٣	٦٥	$C_2 X C_4$	٨
٣٠	0	١	٢	٦٢	١٥	٤٣	٨٣	C_2	٢
٣١	0	١	٢	٦٢	١٥	٦٥	٨٣	$C_2 X C_2$	٤
٣٢	0	١	٢	٦٢	١٥	٦٥	٨٩	C_2	٢
٣٣	0	١	٢	٦٢	١٥	٨٣	٨٩	C_2	٢
٣٤	0	١	٢	٦٢	٣١	٣٦	٤٣	C_2	٢
٣٥	٠	١	٢	٦٢	٣١	٣٦	٦٥	C_2	٢
٣٦	0	١	٢	٦٢	٣١	٣٦	٨٣	C_2	٢
٣٧	0	١	٢	٦٢	٣١	٣٦	٨٩	C_2	٢
٣٨	0	١	٢	٦٢	٣١	٤٣	٨٣	$C_2 X C_2$	٤
٣٩	0	١	٢	٦٢	٣١	٤٣	٨٩	C_2	٢
٤٠	0	١	٢	٦٢	٣١	٦٥	٨٣	$C_2 X C_4$	٨

٤١	0	١	٢	٦٢	٣١	٦٥	٨٩	C_2	٢
٤٢	0	١	٢	٦٢	٣١	٨٣	٨٩	$C_2 X C_2$	٤
٤٣	0	١	٢	٦٢	٣٦	٤٣	٦٥	$C_2 X C_4$	٨
٤٤	0	١	٢	٦٢	٣٦	٤٣	٨٣	$C_2 X C_2$	٤
٤٥	0	١	٢	٦٢	٣٦	٦٥	٨٣	C_2	٢
٤٦	0	١	٢	٦٢	٣٦	٦٥	٨٩	$C_2 X C_2$	٤
٤٧	0	١	٢	٦٢	٣٦	٨٣	٨٩	C_2	٢
٤٨	0	١	٢	٦٢	٤٣	٦٥	٨٣	C_2	٢
٤٩	0	١	٢	٦٢	٤٣	٦٥	٨٩	C_2	٢
٥٠	0	١	٢	٦٢	٤٣	٨٣	٨٩	C_2	٢
٥١	0	١	٢	٦٢	٦٥	٨٣	٨٩	$C_2 X C_4$	٤

(2-٢) بناء وتصنيف الأقواس – (8,5) في PG(2,9)

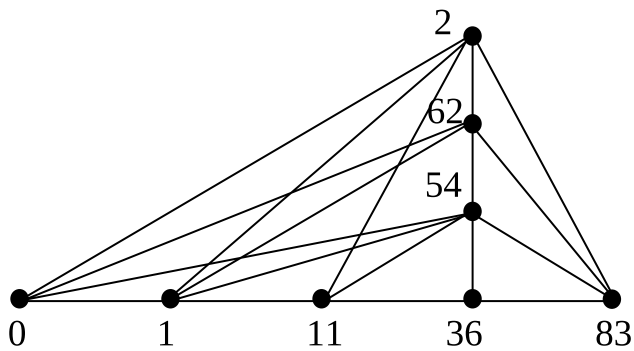
لبناء الأقواس – (8,5) نحتاج إلى تطبيق برنامج حاسوبي على الأقواس – (7،5) المختلفة إسقاطياً وتحويل الناتج بدلالة المتجهات الإحداثية لكي تستخدم في البرنامج لنحصل على (١٦٢) قوساً مختلفة إسقاطياً ومن النمط – (8,5) كما في الجدول (2-4) حيث وجد أن (٣٣) قوساً تمتلك زمرة من نوع C_2 على حين يوجد قوسان يمتلكان زمرة من نوع C_4، والباقي هي زمرة تافهة I (Identity).

الجدول (2-4)

i	Distinct (8, 5) - arcs							G	|G|
١٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	C_2	٢
٣٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٤٨	C_2	٢
٤٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٦١	C_2	٢
٥٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧	C_2	٢
٦٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	C_2	٢
٦٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٠	C_2	٢
٦٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٧	C_2	٢
٦٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٢	C_2	٢
٦٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٣	C_2	٢
٧١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣٠	C_2	٢
٧٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣٥	C_2	٢
٧٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣٧	C_2	٢
٧٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٤٤	C_2	٢
٨١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥٣	C_2	٢
٨٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥٨	C_2	٢
٨٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧٢	C_2	٢
٩٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧٣	C_2	٢
٩١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧٤	C_2	٢
٩٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧٩	C_2	٢
٩٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨٦	C_2	٢
٩٨	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٦	C_2	٢
٩٩	٠	١	٢	٦٢	11	15	٤٣	7	C_2	2
١٠١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٩	C_2	٢
١٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	١٤	C_2	٢

٣										
١٠٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٢٣	C_2	٢
١١١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٣٥	C_2	٢
١١٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٤٤	C_2	٢
١٢١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٥٦	C_2	٢
١٢٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٥٨	C_2	٢
١٢٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٧٣	C_2	٢
١٣٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٨٠	C_2	٢
١٣٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٨٦	C_2	٢
١٥٥	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	٧	$C_{٤}$	٤
١٥٨	٠	١	٢	٦٢	١١	٣٦	٨٣	٧	$C_{٤}$	٤

وفيما يأتي الشكل (٣) يوضح القوس –(٨,٥) الذي يمتلك اكبر زمرة .



الشكل (٣)

(٣-٢) بناء وتصنيف الأقواس – (9,5) في PG(2,9)

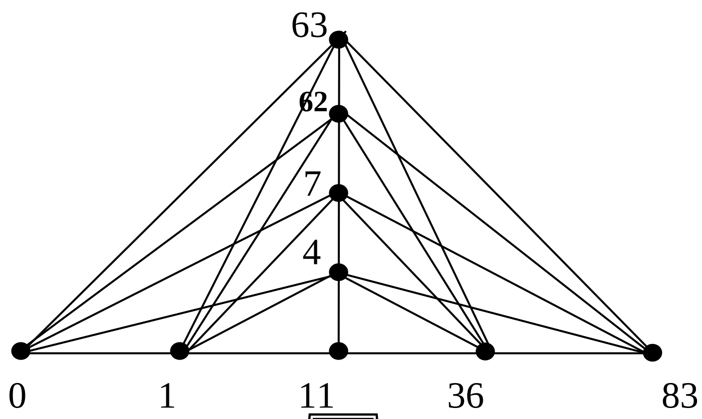
بإتباع نفس الطريقة التي تم بها بناء الأقواس – (8,5) حيث نقوم بتطبيق برنامج على الأقواس – (8,5) التي عددها (١٦٢) قوساً ومن ثم برنامج حاسوبي لكي نحصل على (١٢٩٠) قوساً مختلفة إسقاطياً ومن النمط – (9,5) كما في الجدول (5-2) حيث وجدان (٧٩) قوساً تمتلك زمرة من نوع C_2، ووجد ان (٤) أقواس تمتلك زمرة من نوع $C_2 \times C_2$ في حين وجد أن هناك قوسين يمتلكان زمرة من نوع C_4 وقوس واحد يمتلك زمرة من نوع C_8 وكذلك قوس واحد يمتلك زمرة من نوع $C_2 \times C_8$ والباقي هي زمرة تافهة.

الجدول (2-5)

i	Distinct (9, 5) – arcs									G	$\lvert G \rvert$
٢٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣	٢٦	C_2	٢
١٣٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٤	٨١	C_2	٢
١٨٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٥	٦٨	C_2	٢
٢٢٨	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٦	٤٨	C_2	٢
٢٣٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٦	٥٦	C_2	٢
٢٤١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٦	٦١	C_2	٢
٣١٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٨	٣٠	C_2	٢
٣٣٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٨	٧٦	C_2	٢
٣٣٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٨	٨٤	C_2	٢
٣٤٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٠	١٩	C_2	٢
٣٩٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٢	٤٨	C_2	٢
٤١٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٣	١٨	C_2	٢
٤٢٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٣	٣٨	C_2	٢
٤٢٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٣	٤٦	C_2	٢
٤٣٨	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٣	٦٩	C_2	٢
٤٣٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٣	٧٢	C_2	٢
٤٤٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٢٣	C_2	٢
٤٤٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٣٣	C_2	٢
٤٥٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٤٧	C_2	٢
٤٥٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٤٩	C_2	٢
٤٥٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٥١	C_2	٢
٤٥٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٦	٥٨	$C_2 \times C_2$	٤
٤٩٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	١٨	٣٣	C_2	٢
٥٢٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٢١	٣٤	C_2	٢
٥٥١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٢٢	٤٧	C_2	٢
٥٦٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٢٤	٣٨	C_2	٢
٥٧٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٢٧	٤٥	C_2	٢
٥٨٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٢	٣٥	C_2	٢
٥٩٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٢	٤٨	C_2	٢
٥٩٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٢	٥٧	C_2	٢
٥٩٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٢	٧٢	C_2	٢
٥٩٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٥	٤٤	C_2	٢
٦٠٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٣٥	٥٦	C_2	٢
٦١٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٤٦	٥٥	C_2	٢
٦٢٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٤٨	٨٤	C_2	٢
٦٢٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣١	٥٧	٦٧	C_2	٢
٦٤٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣	٢٣	C_2	٢
٦٤٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣	٢٥	C_2	٢
٦٤٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣	٣٢	C_2	٢
٦٦٨	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣	٥٤	C_2	٢
٧٠٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٤	١٢	C_2	٢
٧٣٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٤	٦١	C_2	٢
٧٣٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٤	٦٩	C_2	٢
٧٤٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥	٦	C_2	٢
٧٥٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥	١٣	C_2	٢
٧٧٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥	٦٨	C_2	٢
٧٨٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥	٩٠	C_2	٢
٧٩٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧	٥٤	C_2	٢
٨٠١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٢٤	C_2	٢
٨٠٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٣٢	C_2	٢

٨٠٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٣٧	C_2	٢
٨٠٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٣٨	C_2	٢
٨٠٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٤٤	C_2	٢
٨١١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٨	٨٤	$C_2 X C_2$	٤
٨١٧	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٩	٣٧	C_2	٢
٨٣٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٩	٧٨	C_2	٢
٨٣٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٩	٨٠	C_2	٢
٨٤٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٠	٣٩	C_2	٢
٨٤١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٠	٤٥	C_2	٢
٨٤٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٠	٤٨	C_2	٢
٨٤٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٠	٥٨	C_2	٢
٨٥٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٨	٥٠	C_2	٢
٨٥٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	١٨	٧٢	C_2	٢
865	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٣	٤٨	C_2	٢
٨٦٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٣	٥٣	C_2	٢
٨٧٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٥٢	C_2	٢
٨٨٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٦٤	C_2	٢
٨٨٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٨٤	C_2	٢
٨٨٤	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٣٩	C_2	٢
٨٨٥	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٤٩	C_2	٢
٨٨٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٢٨	٥٤	C_2	٢
٨٨٩	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٣٥	٥٨	$C_2 X C_2$	٤
٨٩٠	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥٨	٧٤	C_2	٢
٨٩١	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥٨	٧٩	C_2	٢
٨٩٢	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٥٨	٨٦	C_2	٢
٨٩٣	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٣٦	٧٩	٨٦	$C_2 X C_2$	٤
٨٩٦	٠	١	٢	٦٢	١١	١٥	٤٣	٧	٥٤	C_2	٢
٨٩٨	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	٩	٧٨	C_2	٢
٩٠٥	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	٣	٤١	$C_{٤}$	٤
٩٢٢	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	٧	٥٤	C_2	٢
٩٥٧	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	١٣	٣٢	C_2	٢
٩٦٢	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	١٣	٥٧	$C_{٤}$	٤
١١١٧	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٣٦	٧١	٦٦	C_2	٢
١١٦٩	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	٧	١٤	C_8	٨
١١٧٠	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	٧	٥٤	$C_{٤}$	٤
١١٧١	٠	١	٢	٦٢	١١	٣١	٤٣	٧	٦٣	$C_2 X C_8$	١٦
١٢٦٠	0	١	٢	٦٢	١١	36	٨٣	٥٦	٩٠	C_2	٢

وفيما يأتي الشكل (٤) يوضح القوس – (9,5) الذي يمتلك اكبر زمرة.



الشكل (٤)

(٣) الحدود الدنيا للأقواس التامة

(١- ٣) مبرهنة :

إن الأقواس − (k,5) التامة غير موجودة كل $٢٥ \le k \le 5$ في PG(2,9) .

البرهان :

أولاً : عندما يكون k = 5, ..., 21 هي أقواس غير تامة، البرهان مباشرة باستخدام المبرهنة (٤−١).

ثانياً : عندما يكون k = 22

من المبرهنة (٤−١) نحصل على $T_5 \ \geq\ 14$ .... (A)

باستخدام المبرهنة (٣−١) المعادلات (٤)، (٥) منها نحصل على

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 10$ .... (4′)

$R_2 + 2\,R_3 + 3\,R_4 + 4\,R_5 = 21$ ....(5′)

$$\Longrightarrow \quad R_3 - R_1 + 2\,R_4 + 3\,R_5 = 11$$

ان كل الحلول غير السالبة التي تحقق (4′) و (5′) يمكن تمثيلها بالجدول الآتي

نوع النقطة	R١	R٢	R٣	R٤	R5
a_1	٠	٦	٠	١	٣
a_2	١	٣	٣	٠	٣
a_3	٣	٠	٣	١	٣
a_4	٤	٠	٠	٣	٣
a_5	٠	٥	١	٢	٢
a_6	٣	١	٠	٤	٢
a_7	٢	٢	٠	٥	١
a_8	١	٣	٠	٦	٠
a_9	٣	٠	٠	٧	٠

وبالاستفادة من المبرهنة (٣–١) المعادلة (٨)

$$5T_5 = 3\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2\,(a_5 + a_6) + a_7$$

$$\leq 3\,(\sum_{i=1}^{9} a_i) \Longrightarrow \qquad T_5 \leq 13 \;\ldots\ldots\; (B)$$

من (A) و (B) نحصل على التناقض.

∴ لا يوجد قوس تام من النمط (22,5) في PG(2,9)

ثالثاً : عندما يكون k = 23, 24, 25

باستخدام برنامج الحاسوبي أثبتنا عدم وجود الأقواس التامة لقيم $25 \leq k \leq 23$

رابعاً : عندما يكون k = 26 فإن القوس الذي نقاطه

١٣	١٢	١١	١٠	٩	٣	٢	٠
٤٣	٤٠	٣٩	٣٤	٣١	٢٩	٢٥	٢١
٨٣	٧٧	٧٦	٧٣	٧٠	٦١	٥٨	٥١
						٨٧	٨٥

هو قوس تام

(٤) المخروطيات

(٤–١) مبرهنة [2]

في المستوي PG(2,q) عدد التربيعات المختلفة إسقاطياً إما واحد أو اثنان بالاعتماد على قيمة q فيما إذا كانت زوجية أو فردية. هذه التربيعات تكون بالصيغ الآتية:

1) $n = 2j,\ j \geq 0 :\ \alpha_{2j} = V\,(X^2{}_0 + X_1 X_2 + X_{2j-1} X_{2j})$

2) $n = 2j - 1;\ j \geq 1 :\ \beta_{2j-1} = V\,(X_0 X_1 + XX_{2j-2} X_{2j-1})$

$\gamma_{2j-1} = V\,(f\ (X_0, X_1) + X_2 X_3 + X_4 X_5 + \ldots + X_{2j-2j-1})$

حيث أن f متعدد ة حدود غير القابلة للتحليل ذات صيغة ثنائية تربيعية وان α_{2j}، β_{2j-1}، γ_{2j-1} تسمى على التوالي قطعاً مكافئاً، قطعاً زائداً، قطعاً ناقصاً.

(٤ –٢) مبرهنة [5]

المخروطي في المستوي PG(2,q) يكون بالصيغ العامة الآتية

1) $V(X_o^2 + X_1X_2)$ all q;

2) $V(X_o^2 - X_1X_2)$ all q;

3) $V(a_0 X^2_0 + a_1 X^2_1 + a_2 X^2_2)$ $a_0 a_1 a_2 \neq 0$, q odd;

4) $V(X^2_0 + X^2_1 + X^2_2)$ q odd;

(٣- ٤) بناء وتصنيف الأقواس – (13,5) المحتوية على المخروطي

ان المخروطي الذي وقع عليه اختيارنا له معادلة

$C = V(-2X_0X_1+X_0X_2+X_1X_2)$

وهذا المخروطي يكافئ إسقاطياً جميع المخروطيات الباقية في المستوي PG(2,q) (مبرهنة (٢- ٤) – أولاً) وهو بالتحديد يسهل علينا تصنيف الأقواس التي تحتويه فيما بع د وذلك لاحتوائه على الأربع نقاط الأساسية (U_0,U_1,U_2,U_3) والتي تسمح للبرنامج بالعمل على أيجاد الأقواس المختلفة إسقاطياً.

لكي نقوم ببناء الأقواس – (13,5) المحتوية على المخروطي لابد بالبداية إيجاد كل نقاط هذا المخروطي وهي النقاط {0, 1, 2, 62, 21, 34, 40, 51, 64, 70} وبعد ذلك تأشيرها في الجدول (2-2) ومن ثم القيام بالعملية الآتية:

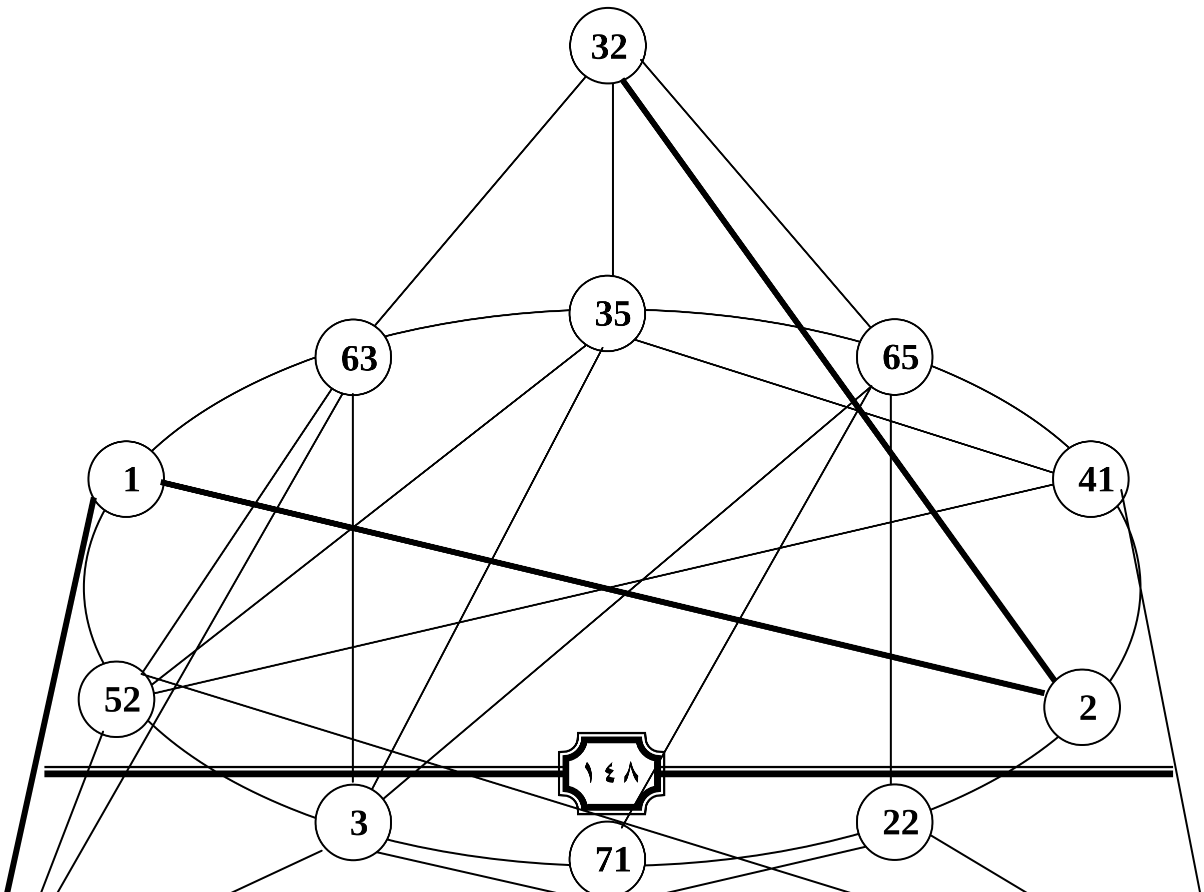
وهي إضافة ثلاث نقاط لا تنتمي للمخروطي من كل خط من نوع قاطع – 2 ، بأخذ كل الأزواج غير المرتبة من النقاط العشرة الباقية من كل خط وإضافتها على حدة إلى نسخة من المخروطي ستتكون لدينا كل الأق واس– (١٣,٥) المحتوية على المخروطي قيد البحث ولكي نستخرج الأقواس – (13,5)المختلفة إسقاطياً نحولها إلى متجهات إحداثية لكي يتم استخدام البرنامج وبذلك نحصل على (٥٦) قوساً مختلفة إسقاطياً من النمط – (13,5) كما في الجدول (2-6) حيث وجد ان (٣١) قوساً تمتلك زمرة من نوع C_2 وكذلك وجد ان (٦) أقواس تمتلك زمرة من نوع $C_2 X C_2$ والباقي هي زمرة تافهة I.

الجدول (2-6)

i	Distinct (13, 5) – arcs containing group conic												G	|G|
١	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	١٥	٣١	C_2	٢
٤	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	١٥	٣٦	C_2	٢
٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	١٥	٨٣	C_2	٢
٦	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	١٥	٨٩	C_2	٢
٧	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣١	٣٦	C_2	٢
٨	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣١	٤٣	C_2	٢
٩	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣١	٦٥	C_2XC_2	٤
١٠	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣١	٨٣	C_2	٢
١٣	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣٦	٦٥	C_2XC_2	٤

١٤	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣٦	٨٣	C_2	٢
١٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٣٦	٨٩	C_2	٢
٢٠	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٦٥	٨٩	C_2	٢
٢١	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١١	٨٣	٨٩	C_2	٢
٢٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٣١	٨٣	C_2	٢
٢٦	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٣١	٨٩	C_2XC_2	٤
٢٧	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٣٦	٤٣	C_2	٢
٢٨	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٣٦	٦٥	C_2	٢
٣٠	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٣٦	٨٩	C_2XC_2	٤
٣١	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٤٣	٦٥	C_2	٢
٣٢	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٤٣	٨٣	C_2	٢
٣٣	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٤٣	٨٩	C_2	٢
٣٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٦٥	٨٩	C_2	٢
٣٦	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	١٥	٨٣	٨٩	C_2	٢
٣٧	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٣٦	٤٣	C_2	٢
٣٨	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٣٦	٦٥	C_2	٢
٣٩	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٣٦	٨٣	C_2	٢
٤١	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٤٣	٦٥	C_2XC_2	٤
٤٢	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٤٣	٨٣	C_2	٢
٤٣	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٤٣	٨٩	C_2	٢
٤٤	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٦٥	٨٣	C_2	٢
٤٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣١	٦٥	٨٩	C_2	٢
٤٧	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣٦	٤٣	٦٥	C_2	٢
٤٨	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣٦	٤٣	٨٣	C_2XC_2	٤
٥٠	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣٦	٦٥	٨٣	C_2	٢
٥٢	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٣٦	٨٣	٨٩	C_2	٢
٥٤	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٤٣	٦٥	٨٩	C_2	٢
٥٥	٠	١	٢	٦٢	٢١	٣٤	٤٠	٥١	٦٤	٧٠	٦٥	٨٣	٨٩	C_2	٢

وفيما يأتي الشكل (٥) يوضح القوس – (13,5) الذي يمتلك اكبر زمرة حيث أن هذا القوس يمتلك قاطعاً خماسياً وحيداً الممثل بالون الغامق ولا يمتلك قواطع رباعية أما القواطع -i حيث i = 0, 1, 2, 3 فهي موجودة.



الشكل (٥)

Reference المصادر

[1] Aziz, S. M. (2001), "On lower bound for complete (k,n) – arcs in PG(2, q)," M. Sc. Thesis. University of Mosul.

[2] Bruen, A. A. (1982), "Note: Lower bounds for complete (k, n) – arcs," J. Combin theory series A 33, P. P. 109 – 111.

[3] Burton, D. M. (1967), "Introduction to Modren abstract Algebra," Addison Wesley Publishing company.

[4] Hasan, F. A. (2004), "On some complete arcs and Algebraic Curves," M. SC. Thesis, University of Mosul.

[5] Hirschfeld, J. W. P. (1979), "Projective Geometries over finite field," Oxford University Press. Oxford.

[6] Hirschfeld, J. W. P. and Storme, L. "The packing problem in statistics, Coding theory and finite projective space: Update 2001," Submitted.

[7] Karteszi, F. (1976), "Introduction to finite Geometries," North Holland, American Elsevier.

[8] Kasim, B. A. (2001), "The Maximal value for (k,4)– arcs," M. Sc. Thesis, University of Mosul.

[9] Mohammed, M. J. (1988), "Classification of (k,3)– arcs and (k,4) – arcs in projective plane over Galois field," M. Sc. Thesis, University of Mosul.

[10] Thas, J. A. (1987), "Complete arcs and algebraic curves in PG(2,q)," J. Algebra Vol 106, No. 2, April 1, P. P. 451 – 464.

[11] Thomas, A. D. and Wood, G. V. (1980), "Group tables" Shiva publishing Limites.

[12] Walker, R. J. (1978), "Algebraic curves,' Princeton University press.

[13] Yasin, A. L. (1986), "Cubic arcs in the projective plane of order eight,' Ph. D. Thesis, Sussex University.