# استخدام سلاسل ماركوف في حساب متوسط مدة بقاء الطالب في قسم الرياضيات بكلية التربية للعلوم الصرفة / جامعة الانبار

# Using Markov chains to calculate the means of students staying at the dept. of math. / college of education for pure sciences /Al-Anbar University

د.عصام كامل احمد
كلية التربية للعلوم الصرفة / جامعة الانبار

م. احمد حسن بتال
كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة الانبار

**الملخص**

يهدف هذا البحث إلى حساب متوسط عدد سنوات بقاء الطالب في قسم الرياضيات بكلية التربية للعلوم الصرفة في جامعة الانبار قبل حصولة على شهادة البكالوريوس في الرياضيات، وهـذا المتوسـط يمكـن أن نستخدمة في تقدير أعداد الطلاب الذيـن سيتخرجون في السنوات القادمة. وتم استخدام المصفوفة الماركوفية الماصة في تقدير متوسط بقاء الطالب في قسم الرياضيات. وأظهرت النتائج أن 88% من طلاب المرحلة الأولى يحصلون على البكالوريوس، وبلغت نسبة الطلاب الذين يحصلون على البكالوريوس المرحلة الثانيـة، الثالثـة، الرابعة هي 97%، 97% و 99% على التوالي.

## Abstract

The present paper aims at calculating the mean of student staying at the dep. Of math. College of education for pure sciences- university of Anbar before awarded the B.sc. in mathematics. This mean can be used in estimating the number of graduate students in upcoming years.

The absorbing Markov matrix was used for that purpose. Results have shown that 88% of first year students can get the B.sc. in mathematics, 97% of second year students, 97% of third year students and 99% of fourth year students.

## أولا: المقدمة

أن مدة بقاء الطالب في الجامعات لحصولة على شهادة البكالوريوس تعد من أهم المشاكل التي يجـب دراستها وذلك لعلاقتها المباشرة بالمجتمع ومن هذا المنطلق بالاعتماد على الإحصائيات المتوفرة لدينا للـسنوات العشرة الأخيرة لطلاب قسم الرياضيات كرسنا هذا البحث لحساب مدة بقاء الطالب في قسم الرياضـيات بكليـة التربية للعلوم الصرفة. وجدنا من خلال دراستنا أن أفضل طريقة لدراسة هذه المشكلة هي باستخدام المـصفوفة الماركوفية الماصة. وبدأنا بدراسة المصفوفة الماركوفية الماصة وبعد ذلك انتقلنا إلى الإحصائيات المتوفرة لدينا لتقدير متوسط مدة بقاء الطالب.

### 1- أهمية البحث

أن المشكلة الأساسية التي يعالجها هذا البحث بقاء الطالب مسجلا في قسم الرياضيات بكليـــة التربيـــة للعلوم الصرفة وان معرفة هذه المدة تساعد على رفع خطط لتطوير التعليم العالي بشكل يتفق مع حاجات التنمية الاقتصادية. وهذا ما يشكل عاملا أساسيا في ربط الجامعة بالمجتمع.

### 2- أهداف البحث

معرفة احتمال أعداد الطلبة الخريجين للمراحل الدراسية في قسم الرياضيات.

معرفة معدلات التسرب في كل سنة وعمل استراتيجية لمعالجة هذا التسرب.

### 3- أسلوب البحث

اعتمد هذا البحث مصفوفة ماركوف الماصة لان الطالب في قسم الرياضيات يمر بالعديد من المراحل حتى يحصل على شهادة البكالوريوس، كما أن هنالك حالتان ماصتين الأولى وهي فصل الطالب من القسم بعد استنفاذ فرص الرسوب والحالة الثانية تخرج الطالب وحصولة على شهادة البكالوريوس. وهذا ما دفعنـــا إلـــى القول بان مصفوفة ماركوف تعد من أفضل الوسائل التي يمكن استخدامها في هذا البحث، وسنقوم باســـتعراض طريقة عمل هذه المصفوفة ثم ننتقل بعد ذلك إلى خطوات أجراء البحث.

## ثانيا: سلاسل ماركوف

أن العمليات العشوائية (semeney,1987) التي تتمتع بان حالتها في المستقبل لا تعتمد على حالتها في الماضي بشرط معرفة حالتها في الحاضر. يسمى هذا النوع من العمليات العشوائية بعمليات ماركوف. عادة يتم تفسير سلسلة ماركوف (مطر،2004) على أنها متتابعة من الحالات التي يمكن أن يكون فيها نظام ما عنـــد أي لحظة زمنية $t$ أو متتابعة من المواضع التي يحتلها جسيم متحرك تسمى العملية العشوائية $\{x_n ; n \in T\}$ سلسلة ماركوف Markov chain إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية(عمانوئيل،1982):

فضاء الحالة لهذه العملية يكون منفصل (منفصل الحالة)

فضاء المعلمة لهذه العملية يكون منفصل(منفصل الزمن)

تحقق هذه العملية خاصية ماركوف:

$$P(x_{n+1} = j / x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, \dots, x_1 = i_1)$$
$$= P(x_{n+1} = j / x_n = i)$$

ومن ثم فان سلسلة ماركوف $\{x_n ; n \in T\}$ تكون عبارة عن عملية ماركوف. وان سلسلة ماركوف تكون ماصة فيما إذا تحقق الشرطان التاليان(خاشع،1987):

1- أن السلسلة تحتوي على الأقل حالة ماصة

2- هناك أمكانية الوصول إلى الحالة الماصة انطلاقا من أي حالة من الحالات غير الماصة.

3- وان مصفوفة ماركوف تأخذ الشكل التالي:

$$M_p = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

4- هذه المصفوفة تتكون من أربع مصفوفات جزئية هي(صباح،1982):

$I$ : هي مصفوفة أحادية مكونة من $r$ صف و $r$ عمودا

$O$: هي مصفوفة صفرية مكونة من $r$ صف و $S$ عمودا

$R$: هي مصفوفة احتمالات الوصول إلى الحلات الماصة انطلاقا من الحلات غير الماصة

$Q$: هي مصفوفة الانتقال بين الحالات غير الماصة.

بعد $n$ من الخطوات فان المصفوفة $M_p$ تكون بالشكل التالي[12,7] :

$$M_p^n = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^* & Q^n \end{bmatrix}$$

وهكذا نلاحظ انه نتيجة هذه الانتقالات لم تتغير إلا المصفوفة $Q$ وهذا يقودنا إلى القول : انه إذا كان عدد الخطوات محددا وبصورة مسبقة وليكن $n$ خطوة فان متوسط زمن الانتظار في الحالات غير الماصة قبل الوصول إلى الحالات الماصة هو عبارة عن مجموع كل صف من صفوف المصفوفة التالية(kade,1999)

$$N = Q^1 + Q^2 + \Lambda + Q^n$$

بضرب المصفوفة $N$ بالشعاع $H$ الذي تكون جميع مكوناته مساوية إلى الواحد نحصل على ما يلي:

$$T = N \bullet H$$

في هذا الشعاع(تميم،1998) كل رقم مقابل لأي حالة غير ماصة هو عبارة عن متوسط زمن الانتظار في هذه الحالة قبل الوصول الى حالة ماصة. بعد حساب هذا المتوسط فانه يمكن القول انه بعد مرور هذا الزمن فان احتمالات الوصول الى الحالات الماصة انطلاقا من الحالات غير الماصة تأخذ شكل المصفوفة التالية(plerre,2001):

$$P = N \bullet H$$

## 1- تطبيق مصفوفة ماركوف على قسم الرياضيات

لو افترضنا أن(اسماعيل،1994):

$E_1$ : هي حالة الطالب في السنة الأولى في قسم الرياضيات

$E_2$ : هي حالة الطالب في السنة الثانية في قسم الرياضيات

$E_3$ : هي حالة الطالب في السنة الثالثة في قسم الرياضيات

$E_4$ : هي حالة الطالب في السنة الرابعة في قسم الرياضيات

$E_I$ : هي حالة فصل الطالب من قسم الرياضيات عند استنفاذ فرص الرسوب

$E_{II}$ : هي حالة تخرج الطالب وحصولة على الشهادة في قسم الرياضيات

فان المصفوفة الماركوفية لقسم الرياضيات تأخذ الشكل

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_I & E_{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 & p_{1I} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & p_{2I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & p_{3I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{4I} & p_{4II} \end{bmatrix} \end{array}$$

لنأخذ المصفوفة آلاتية:

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

هذه المصفوفة هي التي يجب أن نأخذها في التحليل ونطرحها من المصفوفة الأحادية فنحصل علـــى مـــا يأتي(Fijns,1994):

$$(I-Q)=\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

أن هذه المصفوفة هي التي تستخدم في تقدير زمن البقاء في أي حالة من الحلات غير الماصة وهذا الزمن يعطى في المصفوفة آلاتية:

$$(I-Q)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

وتستخدم هذه المصفوفة في تقدير زمن بقاء الطالب في قسم الرياضيات –كلية التربية للعلوم الصرفة.

جدول رقم (1)

**عدد الطلاب المسجلين والمتخرجين والمفصولين في قسم الرياضيات من الفترة 1993 -2003**

| الطلاب | الاولى | الثانية | الثالثة | الرابعة |
|---|---|---|---|---|
| مجموع الطلاب المسجلين خلال الفترة | 655 | 305 | 250 | 230 |
| متوسط أعداد الطلاب في كل سنة | 66 | 31 | 25 | 23 |
| مجموع الطلاب المفصولين خلال الفترة | 51 | 2 | 5 | 1 |
| متوسط عدد الطلاب المفصولين | 6 | 0.2 | 0.5 | 0.1 |
| مجموع الطلاب المنقولين إلى كليات أخرى | 3 | 2 | لا يوجد | لا يوجد |
| متوسط الطلاب المنقولين | 0.3 | 0.2 | لا يوجد | لا يوجد |

من هذا الجدول يمكن القول ان احتمال فصل الطالب في السنة الأولى هو:

$$p_{1I} = \frac{6}{66} = 0.09$$

واحتمال فصل الطالب في السنة الثانية مساو إلى ما يأتي:

$$p_{2I} = \frac{0.2}{31} = 0.006$$

واحتمال فصل الطالب في السنة الثالثة مساو إلى ما يأتي:

$$p_{3I} = \frac{0.5}{25} = 0.02$$

واحتمال فصل الطالب في السنة الرابعة مساو إلى ما يأتي:

$$p_{4I} = \frac{0.1}{23} = 0.004$$

أن احتمال انتقال الطالب من السنة الأولى إلى السنة الثانية مساو إلى ما يأتي:

$$p_{12} = 1 - p_{1I} = 1 - 0.09 = 0.91$$

وان احتمال انتقال الطالب من السنة الثانية إلى السنة الثالثة مساو إلى:

$$p_{23} = 1 - p_{2I} = 1 - 0.006 = 0.994$$

وان احتمال انتقال الطالب من السنة الثالثة إلى السنة الرابعة مساو إلى:

$$p_{34} = 1 - p_{3I} = 1 - 0.02 = 0.98$$

واحتمال تخرج الطالب في المرحلة الرابعة مساوا إلى:

$$p_{4II} = 1 - p_{4I} = 1 - 0.004 = 0.996$$

وبالتالي فان المصفوفة الماركوفية تكون بالشكل التالي:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_I & E_{II} \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_I \\ E_{II} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.994 & 0 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004 & 0.996 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

وبذلك يمكن القول بان المصفوفة التي يمكن استخدامها في تقدير متوسط زمن بقاء الطالب في قسم الرياضيات هي المصفوفة آلاتية:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.994 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

وبما أن الزمن غير منتهي فان القانون الذي يمكن استخدامه

$$Q^0 + Q^1 + Q^2 + \cdots$$

وبما أن العلاقة تشكل متوالية هندسية وتكون بالشكل التالي:

$$I + Q^1 + Q^2 + \cdots = \frac{1}{(I-Q)} = (I-Q)^{-1}$$

ولهذا يجب علينا ان نطرح المصفوفة $Q$ من المصفوفة $I$ وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.994 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فان:

$$(I-Q) = \begin{bmatrix} 1 & -0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.994 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وان معكوس المصفوفة يأخذ الشكل التالي:

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.91 & 0.9045 & 0.8864 \\ 0 & 1 & 0.994 & 0.9741 \\ 0 & 0 & 1 & 0.98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالضرب بالشعاع الأحادي نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.91 & 0.9045 & 0.8864 \\ 0 & 1 & 0.994 & 0.9741 \\ 0 & 0 & 1 & 0.98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3.7069 \\ 2.9681 \\ 1.98 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من المصفوفة أعلاه: أن متوسط زمن انتظار الطالب السنة الأولى في قسم الرياضيات قبل حصولة علـــى الشهادة هو ثلاث سنوات وثمانية اشهر و15 يوم، وان متوسط زمن انتظار طالب السنة الثانية هو ســـنتان

واحد عشر شهرا و 10 أيام، وزمن انتظار طالب السنة الثالثة عام واحد وأحدى عشر شهرا وعشرون يوم، ومتوسط زمن انتظار الطالب السنة الرابعة عام كامل.

وعند ضرب المصفوفتين بالشكل التالي نحصل على:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0.91 & 0.9045 & 0.8864\\ 0 & 1 & 0.994 & 0.9741\\ 0 & 0 & 1 & 0.98\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.09 & 0\\ 0.004 & 0\\ 0.02 & 0\\ 0.004 & 0.996\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.115 & 0.883\\ 0.027 & 0.97\\ 0.023 & 0.97\\ 0.004 & 0.99\end{bmatrix}$$

من هذه المصفوفة يمكن القول: انه بعد زمن مساو إلى ثلاث سنوات وثمانية اشـــهر و15 يـــوم سيحـــصل 88% من طلاب السنة الأولى في قسم الرياضيات يحصلون على بكالوريوس في الرياضيات و 97% من طلاب السنة الثانية في قسم الرياضيات يحصلون على بكالوريوس بعد زمن مساو إلى سنتان واحد عـــشر شهرا و 20 يوم وبعد عام واحد عشر شهرا وعشرون يـــوم و 97% مـــن طـــلاب الـــسنة الثالثـــة سيحصلون على بكالوريوس في الرياضيات و 99% من طلاب السنة الرابعة سيحصلون على بكالوريوس بعد مرور عام.

## ثالثا: الاستنتاجات والتوصيات

1- أن متوسط مدة البقاء في قسم الرياضيات ثلاث سنوات وثمانية اشهر وخمسة عشر يوم.

2- أن استخدام السلاسل الماركوفية من قبل الباحثين يساعد على دفع عملية التقدم الاقتـــصادي وقـــد تـــم مشاهدة ذلك من خلال بحثنا الذي طبق على قسم الرياضيات

3- أن النموذج يعطي نتيجة أساسية ومهمة جدا وهي ان معرفة أعداد الطلاب المسجلين يمكن أن يستخدم في تقدير أعداد الطلاب الذي يمكن أن يحصلو على إجازة في الرياضيات.

## رابعا: المصادر

### 1- المصادر باللغة العربية

[1] الراوي، خاشع (1987)، المدخل الى تحليل الانحدار، جامعة الموصل، الموصل

[2] البلخي، زيد، تميم(1998)، مقدمة في بحوث العمليات، ط1، جامعة الملك سعود، الرياض

[3] بارزن، عما نوئيل(1982)، العمليات التصادفية، الجامعة المستنصرية، بغداد

[4] ايمن،بولا احمد، خليل، حقي إسماعيل (1994)، الطلاب والخريجين في الكليات، مجلة التقني، العـــدد الثاني والعشرين

[5] الجراد، خلف، مطر(2004)، حساب متوسط بقاء الطلاب في كلية الاقتصاد بجامعة دمشق.

[6] الجراد، خلف، صباح (1982)، بحوث العمليات، جامعة دمشق

[7] فؤاد، سالم، صالح، حسن( 1983)، بحوث العمليات، جامعة دمشق.

### 2-المصدر باللغة الأجنبية

[8] Bermant, M.A., semeney, L.k., sylicki, V.N.,(1987),"mathematical models for educational playing", central of mathematical economy institute.

[9] Plerre, B.(2001),"Markov chains springer, New yerk.

[10] Fijns, H.C.,(1994) "stochastic models on algorithmic approach, witey, New york

[11] Kade, P.c.,(1999),"An introducation to stochastic processes", Duxbuny,press Belmont.

[12]Prabha, N.A.,(1999),"stochastic processes classics in applied mathematics",philadelphina.