استخدام المتسلسلات لتحسين طريقة ريمان العددية لحساب التكاملات

محمد عبد الرزاق محمد الطائي
قسم علوم الحاسبات / كلية التربية
جامعة الموصل

القبول	الاستلام
2010 / 02 / 16	2009 / 11 / 05

Abstract

The purpose of this research is the improvement of the numerical Riemann's integral using series. Riemann's method displayed in this research and we suggested an algorithm to improve the convergence using Geometric series, p-series and Taylor series for the exponential function. And we ended the discussion for this method by use some examples and we noticed that the Geometric series is the best series to get the nearby numerical solution from exact solution.

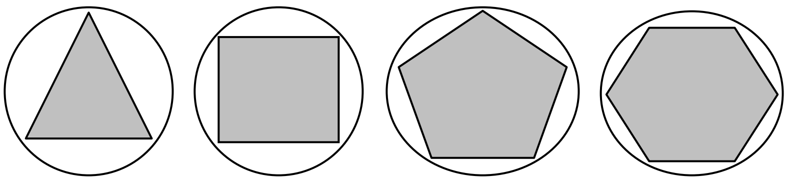
الملخص

غرض البحث هو تحسين تكامل ريمان العددي من خلال استخدام المتسلسلات. حيث تم خلال البحث عرض طريقة ريمان واقترحنا خوارزمية لتحسين التقارب باستخدام المتسلسلة الهندسية ومتسلسلة-p وسلسلة تايلر للدالة الأسية. وأنهينا مناقشة الطريقة من خلال بعض الأمثلة ولاحظنا أن استخدام المتسلسلة الهندسية هو الطريق الأفضل للحصول على الحل العددي القريب من الحل المضبوط.

1- المقدمة:

تعد مسألة إيجاد المساحات من أقدم المسائل التي اهتم بها الإنسان، إذ درست في مختلف الحضارات بدءاً بالحضارتين البابلية والمصرية القديمة. لقد اكتشف البابليون الحقيقة القائلة بان نصف قطر الدائرة يمثل طول ضلع الشكل السداسي المنتظم والمرسوم داخل الدائرة, ومثلت هذه الحقيقة إمكانية تمييز طول قوس الدائرة باعتباره ستة أمثال محيط الشكل

السداسي. وقبل قرابة أربعة آلاف سنة خلت [5], اكتشف المصريون تقريبا جيـدا لمـساحة الدائرة وقد استخدموا تقريبا للنسبة الثابتة هـو $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3.1605$, ثـم جـاء العلمـاء الإغريق وعلى وجه الخصوص ارخميدس الذي يعد هو ونيوتن وكاوس مـن أعظـم ثلاثـة رياضيين ظهروا عبر التاريخ. وتمكن ارخميدس من برهنة أن المساحة المحصورة بين قطع مكافئ من الرتبة الثانية و أحد مماساته تكون بشكل عدد نسبي، إلا انه فشل في تطبيـق هـذه الفكرة عندما تعامل مع الدائرة. ومع ذلك فقد حسب الحدود الأولى للنسبة الثابتـة π, ولأجـل ذلك فقد حسب مساحة كل من الشكل السداسي المنتظم المرسوم داخـل الـدائرة والمرسـوم خارجها, ثم ضاعف بنجاح عدد الأضلاع إلى أن وصل إلى العدد 96. لقد طور ارخميـدس طريقة عامة في إيجاد المساحة والحجم، ومن الأفكار المهمة التي قدمها ارخميدس انه قـرب مساحة الدائرة بمساحة الشكل السداسي المرسوم داخلها. فلو طبقت هذه الفكرة علـى دائـرة نصف قطرها r ورسم داخلها مضلعا مؤلفا من n من الأضلاع المختلفة, فكما هو واضح من الشكل (2.1)، انه عندما تقترب n من مالا نهاية فان مساحة المضلع سوف تكون مقاربة جدا لمساحة الدائرة [1,2].



الشكل (1): تقريب مساحة الدائرة بمساحة مضلع منتظم

وفي العصر الحديث قدم العالم الألماني ريمان التكامل باعتباره غايـة لمـا يعـرف بمجموع ريمان في سياق إيجاد المساحات، ونتيجة للحاجة الماسة فـي التطبيقـات الواقعيـة للتكامل فقد ظهر اهتمام خاص بالتكامل العددي. وهناك العديد من الطرائق الشائعة في التكامل العددي من أشهرها قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون.

يعد حسبان التكامل من المسائل البالغة الأهمية فـي علـوم الرياضـيات وتطبيقاتـه المختلفة. ومن المسائل التي لاقت اهتمامات كبيرة لدى الباحثين حسبان **التكامل العددي** الـذي يستخدم عادة عندما يصعب إيجاد القيم المضبوطة للتكامل. ويعرف التكامل العددي بأنه دراسة سبل إيجاد القيم العددية للتكاملات. ولقد أشار الباحثان [4] إلى أن التكامـل العـددي بـسيط وصعب في نفس الوقت, فهو أسلوب بسيط إذ انه يستطيع إيجاد الحل العددي بنجـاح, وهـو أسلوب صعب قد يحتاج إلى المزيد من الوقت والى المزيد من المعرفة العلمية الواسـعة فـي مواضيع التحليل الصرف والتطبيقي. ولقد لخص الباحثون [3] مبـررات اسـتخدام طرائـق التكامل العددي بالنقاط الآتية:

1) عندما لا يمكن إيجاد التكامل التحليلي للدالة.

2) عندما يمكن إيجاد التكامل التحليلي للدالة ولكن النتائج تكون معقـدة للغايـة وحـسابها يستغرق وقتا طويلا.

3) عندما تكون الدالة معرفة بشكل جدول من القيم.

ومن الطرائق الشائعة في مجال التكامل العددي قاعدة نقطة المنتـصف (Midpoint Rule) وقاعدة شـبه المنحـرف (Trapezoidal Rule) وقاعـدة سمبـسون (Simpson's Rule) وغيرها. وعلى الرغم من أن طرائق التكامل العددي تعطي نتائج مقبولة ودقيقة فـي اغلـب الأحيان إلا أنها تعاني من بعض حالات الضعف، خاصة عندما يكون أبعاد التكامـل كبيـرة, وكذلك عندما تكون الدوال قيد الدراسة عبارة عن دوال معقدة البنية الرياضياتية [1,6].

2- تكامل ريمان:

تكامل ريمان للدالة f في الفترة $[a,b]$ معرف كالأتي:

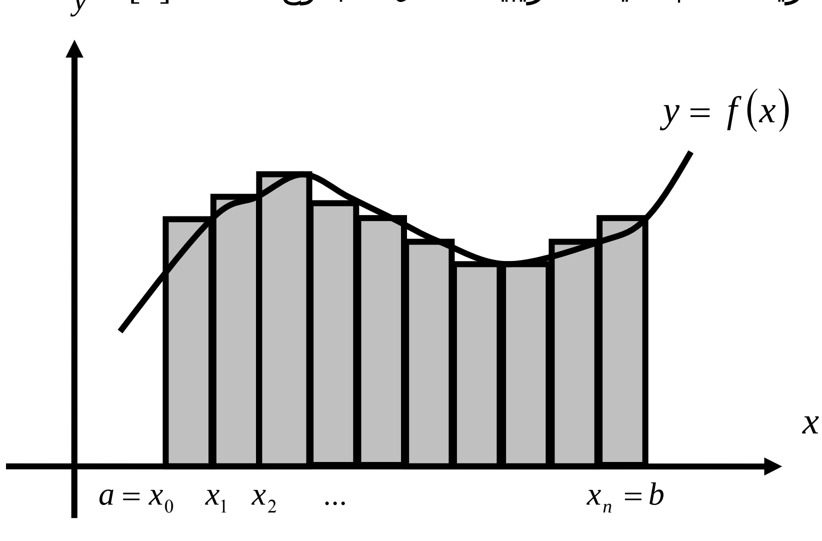
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad \ldots(1)$$

عندما الأرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$ تحقق $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ وعندما $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$ و z_i هي اختيار عشوائي ضمن الفترة $[x_{i-1}, x_i]$.

كل دالة مستمرة f على الفترة $[a,b]$ قابلة للتكامل ريمانياً في الفترة $[a,b]$. وهـذا يسمح لنا باختيار (لأجل سهولة الحساب) نقـاط x_i متـساوية المـسافة فـي الفتـرة $[a,b]$, ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نختار $z_i = x_i$ وبهذه الحالة يصبح التكامل كالأتي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$
$$\cong \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \quad (b-a) \qquad \ldots(2)$$

إن معدل قيم الدالة $m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$ يمكن اعتماده كقيمة وسطى لحساب التكامل, والـشكل (2) يوضح طريقة حساب القيمة التقريبية للتكامل كمجموع مساحات[3].



الشكل (2): توضيح كيفية تقريب المساحة تحت المنحني باستخدام تقنية ريمان

2-1 خوارزمية تكامل ريمان:

الإدخال:

- $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$.
- حدود الفترة a,b.
- عدد تقسيمات الفترة n.

الإخراج:

- القيمة التقديرية لتكامل الدالة على الفترة $[a,b]$.

الخطوة 1: حساب قيم x_i من الصيغة $x_i = a + i(b-a)/n$ لقيم $i = 1,2,...,n$.

الخطوة 2: لقيم $i = 1,2,...,n$، احسب قيمة الدالة $f(x_i)$.

الخطوة 3: احسب القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الصيغة (2)، ثم توقف.

3- المتسلسلات:

لنأخذ متتالية من الأعداد $\{a_n\}$ موضحة بالصيغة

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad ...(3)$$

وهذه تسمى المتسلسلة غير المنتهية. الرقم a_n يسمى الحد النوني للمتسلسلة. المتتالية $\{s_n\}$ معرفة بالشكل

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &. \\ &. \qquad\qquad ...(4) \\ &. \\ s_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

وهذه تمثل متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة، الرمز s_n يمثل المجموع الجزئي النـوني. إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية تقترب من الحد L، نقول المتسلسلة متقاربة ومجموعها هـو L وأيضا يمكن كتابتها بالصيغة

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \qquad ...(5)$$

أذا كانت متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة غير متقاربة، نقول المتسلسلة متباعدة[2].

في هذا البحث سوف ندرس الخطأ من خلال المتسلسلات الآتية:

i. ***المتسلسلة الهندسية:*** [2] هي متسلسلة بالصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ... \qquad ...(6)$$

عندما a و r أعداد حقيقة ثابتة و $a \neq 0$ والأساس r يمكن أي يكون موجب أو سالب.
يمكن إيجاد مجموع المتسلسلة بمعرفة الأساس وكما يلي:

- إذا كان $|r|<1$ فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة و مجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad \ldots(7)$$

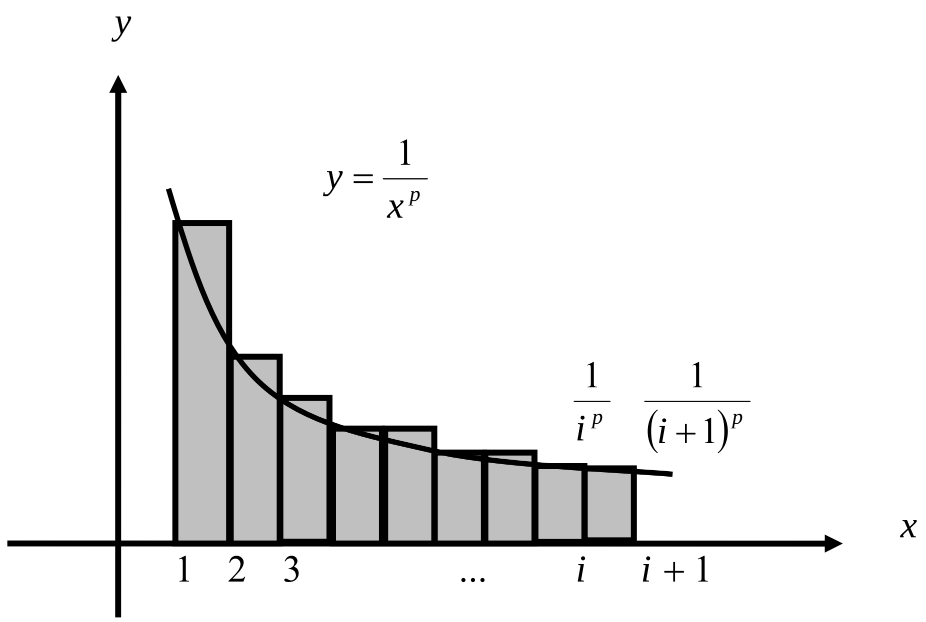
- إذا كان $|r|\geq 1$ فأن المتسلسلة الهندسية متباعدة.

ii. ***متسلسلة - p:*** [2] هي متسلسلة بالصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad \ldots(8)$$

حيث p ثابت حقيقي وتكون متقاربة عندما $p>1$ ومتباعدة عندما $p \leq 1$.

لا توجد طريقة تعطي المجموع المضبوط للمتسلسلات من النمط - p ولكن يمكن حسابها تقريبياً عن طريق الحاسبة أو عن طريق التكامل. فإذا حولنا حدود السلسلة $\frac{1}{i^p}$ إلى الدالة $\frac{1}{x^p}$ في المتغير الحقيقي x وتكون هذه الدالة مستمرة ومتناقصة على الفترة $(0,\infty)$ والشكل(3) يوضح العلاقة بين المساحة الواقعة تحت المنحني $\frac{1}{x^p}$ وحدود السلسلة $\frac{1}{i^p}$ المتمثلة بمستطيل أبعاده $1\times\frac{1}{i^p}$



الشكل (3): العلاقة بين منحني الدالة $\frac{1}{x^p}$ والقيم $\frac{1}{i^p}$

ومن حساب مساحة المستطيلات في الشكل (3) يمكن الحصول على العلاقات الآتية:

$$\frac{1}{(i+1)^p} \le \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx \le \frac{1}{i^p}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

ويمكن تقريب مجموع المتسلسلة المتقاربة (عندما $p > 1$) من خلال التكامل الأتي:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \approx \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \ldots(9)$$

ولحساب تكامل $f(x) = 1/x^p$ عندما $p > 1$ فأن $-p+1 < 0$ والتكامل هو

$$\int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1}-1\right) = \frac{1}{p-1} \qquad \ldots(10)$$

iii. ***سلسلة تايلر للدالة الأسية:***[2] إن مفكوك سلسلة تايلر للدالة e^x حول الصفر يأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x \qquad \ldots(11)$$

4- الطريقة المقترحة:

نلاحظ من خلال إيجاد قيمة التكامل التقريبية بخوارزمية ريمان للتكامل العددي عند زيادة عدد التقسيمات n للفترة (a,b) تتحسن القيمة التقريبية للتكامل وتتجه نحو الحل المضبوط وعليه سنناقش الطريقة المقترحة من خلال الجدول الأتي:

الجدول (1): توضيح كيفية تمثيل الخطأ بمتسلسلة

عدد التقسيمات	القيمة التقريبية للتكامل	مقدار الخطأ
n	I_1	
2 n	I_2	$\varepsilon_1 = I_2 - I_1$
3 n	I_3	$\varepsilon_2 = I_3 - I_2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
(m) n	I_m	$\varepsilon_{m-1} = I_m - I_{m-1}$
(m+1) n	I_{m+1}	$\varepsilon_m = I_{m+1} - I_m$

وبما أن طريقة ريمان للتكامل متقاربة إلى الحل المضبوط فان متتابعة التكاملات I_n. تقترب من التكامل المضبوط وأن متتابعة الأخطاء $\in_n$ تقترب من الصفر.

ويمكن حساب التكامل المضبوط من معرفة الأخطاء وكما يلي:

$$I = \lim_{m\to\infty} I_m = I_1 + (I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) + (I_4 - I_3) + \quad \dots \quad + (I_{m+1} - I_m) + \dots$$

$$= I_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m + \dots$$

$$\therefore \quad I = I_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \qquad \dots(12)$$

إن الخطأ الكلي للتكامل الأول I_1 عن التكامل المضبوط يحسب من المجموع غير المنتهي لمتسلسلة الأخطاء $\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ والتي تحسب من التكرار غير المنتهي لحساب الأخطاء ε_n من مضاعفة العدد n. يهدف البحث إلى اختصار العمليات التكرارية في حساب التكرار ومحاولة تخمين قيمة تقريبية للخطأ الكلي $\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ عن طريق تقريب السلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ بمتسلسلة معلومة المجموع.

سوف نعطي ثلاث طرائق مختلفة لتقريب المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$.

1-4 التقريب باستخدام المتسلسلة الهندسية:

نفرض أن متسلسلة الأخطاء $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ تسلك سلوك متسلسلة هندسية $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ أي أن

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \quad \dots \quad \approx \quad a + ar + ar^2 + \dots$$

(يكون التقريب جيد إذا كان $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \approx r$ لمعظم قيم i) وبمقارنة الحد الأول والثاني بين المتسلسلتين نستنتج:

$$\varepsilon_1 = a \ ، \varepsilon_2 = \varepsilon_1 r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon 1}$$

وبذلك تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^i$ هي المتسلسلة التقريبية للخطأ ε ولأن مجموع المتسلسلة الهندسية معلوم نحصل على

$$\varepsilon \approx \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \qquad \dots(13)$$

2-4 التقريب باستخدام متسلسلة -p:

نفرض أن متسلسلة الأخطاء $\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i$ تساك ساوك متسلسلة من النمط p– أي أن $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a}{i^p}\right)$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots \approx a+\frac{a}{2^p}+\frac{a}{3^p}+\ldots$$

(يكون التقريب جيد إذا كان $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\to 1$ لمعظم قيم i) وبمقارنة الحد الأول والثاني بين المتسلسلتين نستنتج

$$\varepsilon_1=a$$

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{2^p}$$

وهكذا نحصل على

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{2^p}$$

$$2^p.\varepsilon_2=\varepsilon_1$$

$$2^p=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\ln 2^p=\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$$

$$p.\ln 2=\ln\varepsilon_1-\ln\varepsilon_2$$

$$p=\frac{\ln\varepsilon_1-\ln\varepsilon_2}{\ln 2}$$

وبذلك تكون المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_1\frac{1}{i^p}$ هي المتسلسلة التقريبية للخطأ الكلي ε ونحسب مجموعها التقريبي من خلال التكامل $\int_1^{\infty}\frac{\varepsilon_1}{x^p}dx$ أي أن

$$\varepsilon\approx\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1}{i^p}\approx\int_1^{\infty}\frac{\varepsilon_1}{x^p}dx=\frac{\varepsilon_1}{p-1} \qquad \ldots(14)$$

3-4 التقريب باستخدام سلسلة تايلر للدالة الأسية:

نفرض أن متسلسلة الأخطاء $\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i$ تساك ساوك سلسلة مفكوك تايلر للدالة الأسية e^x حول الصفر أي أن

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots \approx a+ax+ax^2+\ldots$$

(يكون التقريب جيد إذا كان $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\to 0$ لمعظم قيم i) وبمقارنة الحد الأول والثاني بين المتسلسلتين نستنتج

$\varepsilon_1 = a$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 x \qquad \Rightarrow x = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

وبذلك تكون المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_1 \left({\varepsilon_2}/{\varepsilon_1} \right)^i}{i!}$ هي المتسلسلة التقريبية للخطأ ε ويمكن حسابها من الدالة الأسية مباشرة أي أن

$$\varepsilon \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1}{i!} \left({\varepsilon_2}/{\varepsilon_1} \right)^i = \varepsilon_1 . e^{{\varepsilon_2}/{\varepsilon_1}} \qquad \ldots(15)$$

4-4 الخوارزمية المقترحة (تكامل ريمان مع المتسلسلات):

الإدخال:

- $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$.
- حدود الفترة a,b.
- عدد تقسيمات الفترة n.

الإخراج:

- القيم التقديرية المثلى لتكامل الدالة على الفترة $[a,b]$.

الخطوة 1: حساب قيم x_i من الصيغة $x_i = a + i(b-a)/n$ لقيم $i = 1,2,...,n$.

الخطوة 2: لقيم $i = 1,2,...,n$، احسب قيمة الدالة $f(x_i)$.

الخطوة 3: احسب القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الصيغة (2) وضع (القيمة التقريبية الأولى $I_1 =$)

الخطوة 4: كرر الخطوة الأولى والثانية لقيم $i = 1,2,...,2n$.

الخطوة 5: احسب القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الصيغة (2) وضع (القيمة التقريبية الثانية $I_2 =$)

الخطوة 6: كرر الخطوة الأولى والثانية لقيم $i = 1,2,...,3n$.

الخطوة 7: احسب القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الصيغة (2) وضع (القيمة التقريبية الثالثة $I_3 =$)

الخطوة 8: احسب ε_1 من $\varepsilon_1 = I_2 - I_1$ واحسب ε_2 من $\varepsilon_2 = I_3 - I_2$

الخطوة 9: احسب مجموع المتسلسلة من الصيغة (13) وضع (مجموع المتسلسلة الهندسية $= sum(Geometric \;\; sreies)$).

الخطوة 10: احسب القيمة التقريبية للتكامل من الصيغة الآتية.

$Ig = I_1 + sum(Geometric\ sreies)$

الخطوة 11: ضع $p = \dfrac{\ln \varepsilon_1 - \ln \varepsilon_2}{\ln 2}$

الخطوة 12: احسب مجموع المتسلسلة من الصيغة (14) وضع (مجموع المتسلسلة الهندسية $= (sum(p-sreies)$).

الخطوة 13: احسب القيمة التقريبية للتكامل من الصيغة الآتية.

$Ip = I_1 + sum(p - sreies)$

الخطوة 14: احسب مجموع المتسلسلة من الصيغة (15) وضع (مجموع متسلسلة تايلر للدالة الأسية حول الصفر $= (sum(Taylor\ sreies\ of\ e)$).

الخطوة 15: احسب القيمة التقريبية للتكامل من الصيغة الآتية

$Ie = I_1 + sum(Taylor\ sreies\ of\ e)$

الخطوة 16: أطبع القيم التقريبية للتكامل Ig ، Ip ، Ie , ثم توقف.

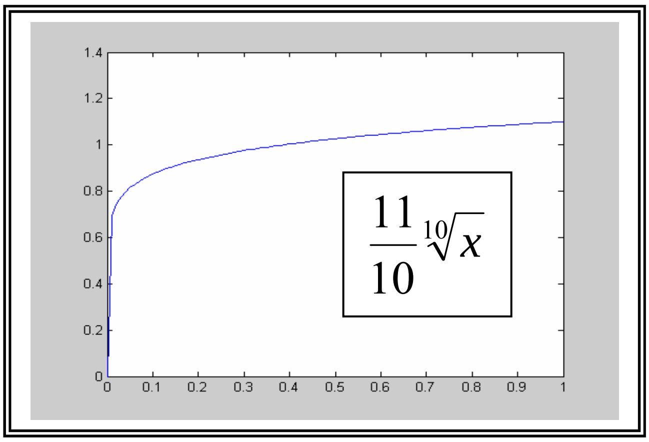
5- تطبيقات عددية مع مناقشة النتائج:

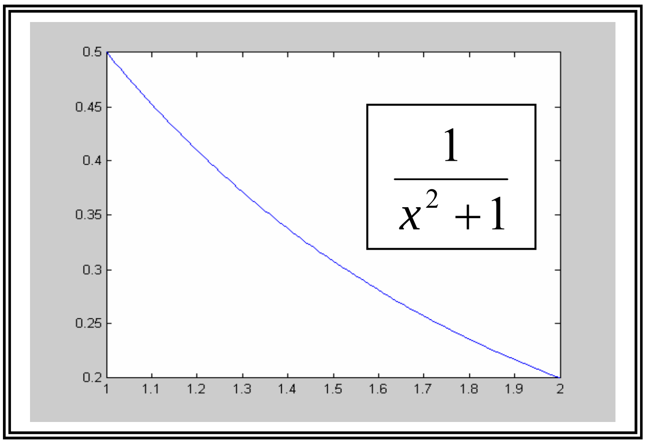
سوف نناقش في هذا البند الحلول العددية لبعض التكاملات باستخدام (عدد تقسيمات n موحد للفترة (a,b)) تكرار واحد لجميع التكاملات.

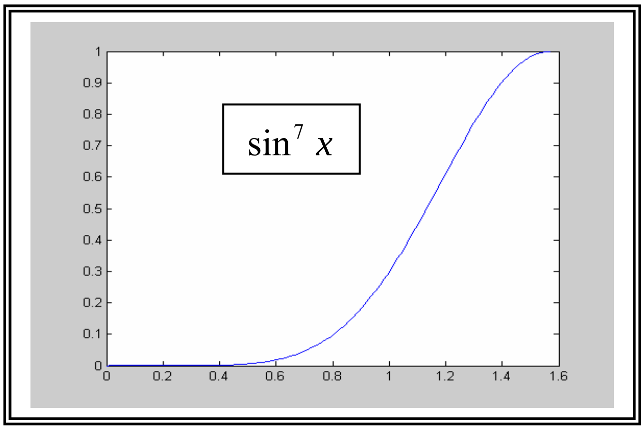
الجدول (2): حل بعض الأمثلة لبيان مدى فعالية الخوارزمية المقترحة

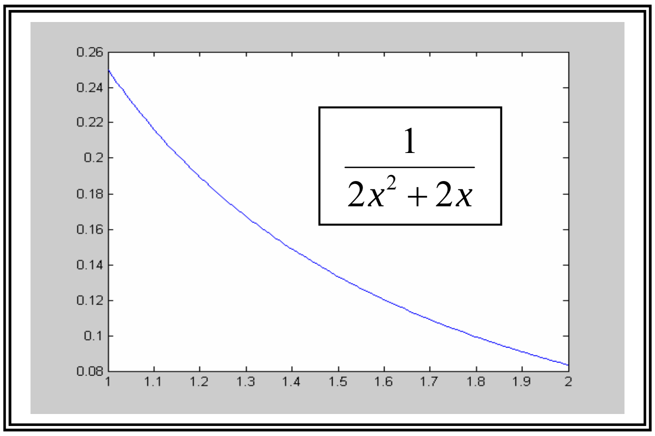
الدالة $f(x)$	حدود التكامل (a,b)	الحل المضبوط I	$\lvert I - I_{riemann}\rvert$	$\lvert I - I_g\rvert$	$\lvert I - I_p\rvert$	$\lvert I - I_e\rvert$	الوقت بالثانية
$\frac{11}{10}\sqrt[10]{x}$	$(0,1)$	1.000000	2.3650×10^{-3}	1.3026×10^{-4}	6.3816×10^{-4}	2.4174×10^{-4}	0.016
$\frac{1}{x^2+1}$	$(1,2)$	0.321750	9.4480×10^{-5}	7.1909×10^{-7}	2.7478×10^{-5}	1.3977×10^{-5}	0.016
$\frac{1}{2x^2+2x}$	$(1,2)$	0.143841	7.6369×10^{-5}	6.4646×10^{-7}	2.2016×10^{-5}	1.1224×10^{-5}	0.016
$\sin^7 x$	$(0,\pi/2)$	16/35	1.0941×10^{-3}	3.3306×10^{-16}	3.4386×10^{-4}	1.7132×10^{-4}	0.016
$8\cos^4 2\pi x$	$(0,1)$	3	1.6666×10^{-2}	8.4376×10^{-15}	5.2377×10^{-3}	2.6096×10^{-3}	0.031
$8\sin^4 x\cos^2 x$	$(0,\pi)$	$\pi/2$	5.2359×10^{-3}	3.5527×10^{-15}	1.6454×10^{-3}	8.1985×10^{-4}	0.031
$\sin 3x \sin 3x$	$(-\pi,\pi)$	π	1.0471×10^{-2}	4.4408×10^{-15}	3.2909×10^{-3}	1.6397×10^{-3}	0.016
$\sqrt{\sec^2 x - 1}$	$\left(-\pi/4,\pi/4\right)$	0.693147	2.9369×10^{-3}	2.6105×10^{-5}	8.4298×10^{-4}	4.3025×10^{-4}	0.11
$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$	$(0,2\pi)$	4	1.3370×10^{-2}	8.3447×10^{-5}	3.9436×10^{-3}	1.9987×10^{-3}	0.031
$\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\left(-\pi/4,\pi/4\right)$	1.762747	1.5354×10^{-3}	1.4772×10^{-5}	4.3738×10^{-4}	2.2367×10^{-4}	0.031
$\frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}$	$(1,3/2)$	0.133974	3.4668×10^{-5}	2.8538×10^{-7}	1.0018×10^{-5}	5.1046×10^{-6}	0.015

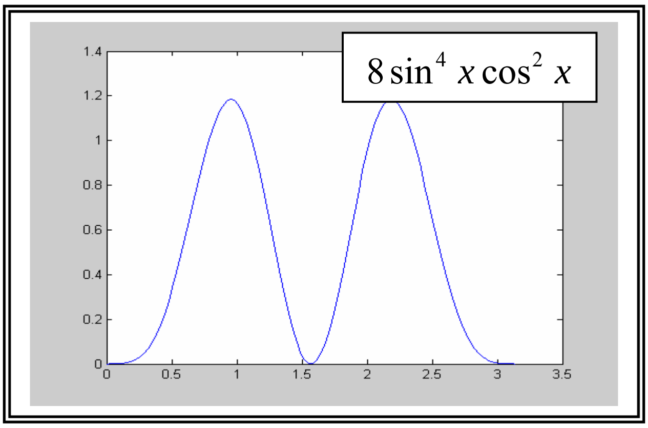
- $I_{riemann}$ يمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام خوارزمية ريمان عند $n = 300$.
- I_g يمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الخوارزمية المقترحة مع المتسلسلة الهندسية عند $n = 100$.
- I_p يمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الخوارزمية المقترحة مع متسلسلة-p عند $n = 100$.
- I_g يمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام الخوارزمية المقترحة مع سلسلة تايلر للدالة الاسية e^x عند $n = 100$.

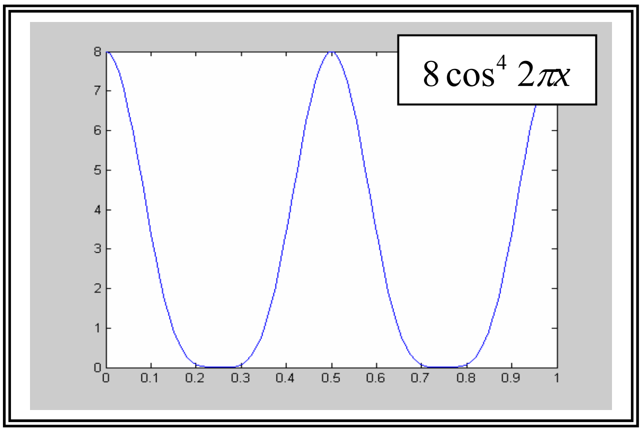

$\frac{11}{10}\sqrt[10]{x}$

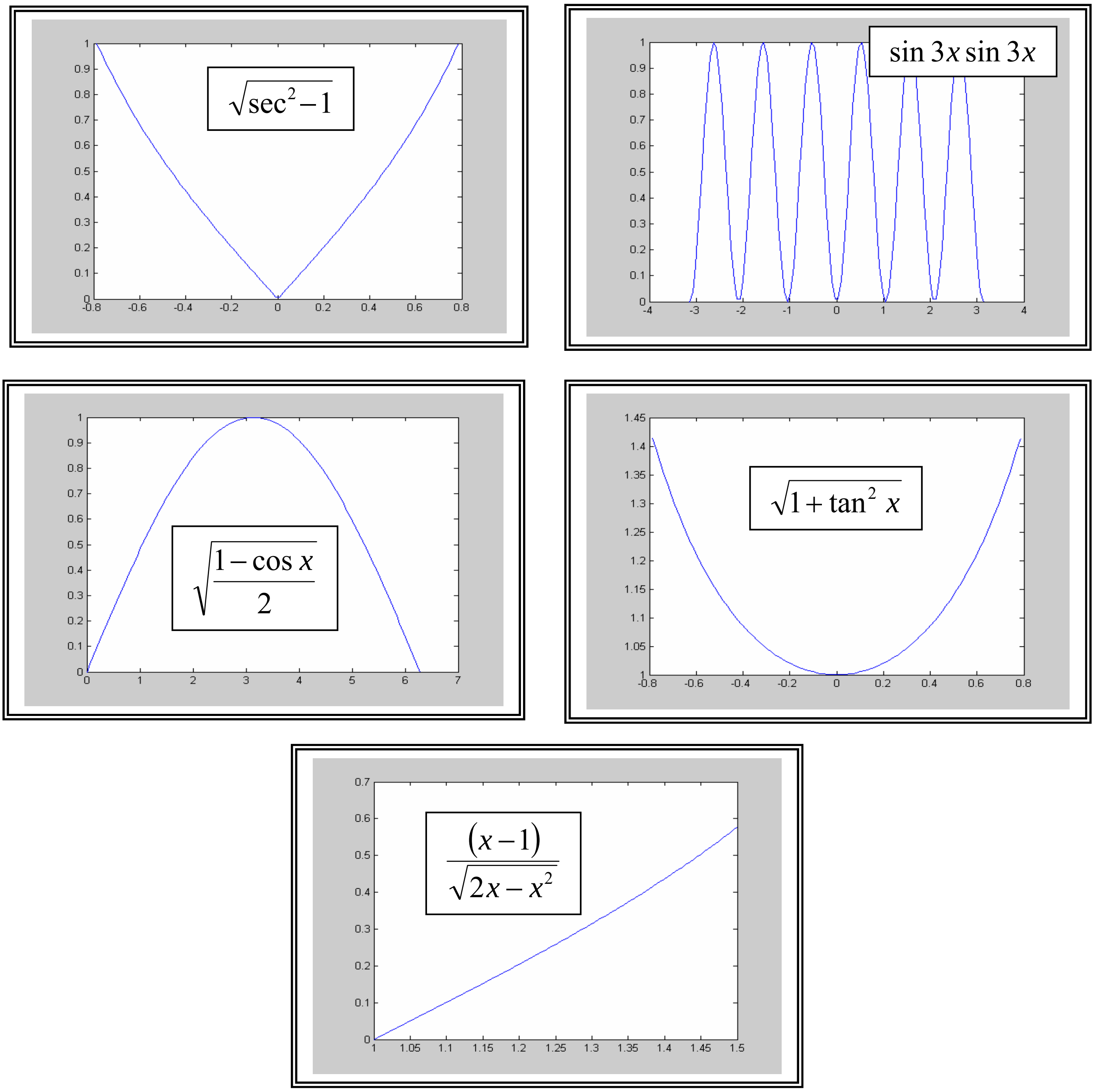

$\frac{1}{x^2+1}$


$\sin^7 x$


$\frac{1}{2x^2+2x}$


$8\sin^4 x\cos^2 x$


$8\cos^4 2\pi x$



الشكل (4): يمثل المساحات تحت المنحيات للأمثلة في الجدول (2)

نستنتج من حل الأمثلة في الجدول (2) نجاح الخوارزمية المقترحة للتقريب. سواء كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو خطية أو دورية ضمن حدود التكامل (a,b) كما موضح في الشكل (4) الذي يمثل رسم الدوال وكذلك الوقت المفنى في الحل هو قليل جداً كما ذكر في الجدول (2). ويتبين أفضلية استخدام المتسلسلة الهندسية عن متسلسلة p- وسلسلة تايلر للدالة الاسية في الحصول على الحل العددي.

6- الاستنتاجات:

إن أهم ما تناوله البحث هو إيجاد قيمة التكامل الذي يعد من الأمور المهمة في مجالات عديدة منها الفيزياء والكيمياء والطب والهندسة.

حيث استخدمنا تكامل ريمان العددي وتم تحسين طريقة ريمان من خلال استخدام المتسلسلات وقد لوحظ عند استخدام الطريقة المقترحة في التحسين أن المتسلسلة الهندسية هي أفضل المتسلسلات التي تؤدي للحصول على الحل العددي القريب من الحل المضبوط.

7- المقترحات:

1. نقترح إجراء دارسة إمكان تطبيق الخوارزمية المقترحة في إيجاد الحجم والكثافة المعرفة على حجم معين.
2. استخدام المتسلسلات لتحسين الطرائق العددية في إيجاد قيم الجذور.

المصادر

1) شيت,عبد الكريم إبراهيم: "التكامل العددي باستخدام طرائق مونتي كارلو وأساليب تقليص التباين" رسالة دكتوراه في الرياضيات كلية علوم الحاسبات والرياضيات, جامعة الموصل, (2006).

2) Anton, Howard, Bivens, Irl and Davis, Stephen: "Calculus" 7th Edition, Anton books, Inc., (2002).

3) Burden, Richard L. and J. Douglas Faires: "Numerical Analysis" 7th Edition, Youngstown State University, (2001).

4) Davis, Philip J. and Rabinowitz, Philip: "Methods of Numerical Integration" Academic Press, Inc. (1975).

5) Engles, H: "Numerical Quadrate and Cubature" Academic Press, New York, (1980).

6) Press W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. H. and Flannery, B. P.: "Numerical Recipes in C" 2nd Edition, Cambridge University Press, (1992).