المقطع التفاضلي لاستطارة جسيم مشحون بواسطة ذرة الهيدروجين في حالة $n = 1, \ell = 0$

Differential Cross Section of Scattered Charge Particle by H- Atom in the State $n = 1, \ell = 0$

م. م. عباس احمد علي
جامعة كربلاء/ كلية العلوم/ قسم الفيزياء

الخلاصة //

ان مسألة استطارة الجسيمات السريعة بواسطة ذرات الهدف لهي من اهم مجالات البحث في الفيزياء الذرية.
لقد درسنا مسألة استطارة الجسيمات السريعة بواسطة ذرات الهيدروجين في الحالة الدنيا $n=1$ $l=zero$ أي الحالة $1s$ حيث تعاملنا مع عملية الاستطارة بانها ناتجة من استطارة الجسيم بواسطة نواة الذرة اضافة الى التأثير الذي يؤثر به الالكترون الذري على الجسيم المستطار وتعاملنا في ذلك بايجاد دالة الموجة للذرة والمستنتجة من ميكانيك الكم اللانسبي، وقد لاحظنا اتفاقا كبيرا مع النتائج العملية التي توصل اليها رذرفورد تجريبيا. ان الفروقات التي تظهر في قيم المقطع العرضي التفاضلي للاستطارة عندما تكون سرعة الجسيمات كبيرة أي يمكن مقارنتها بسرعة الضوء فهي امر طبيعي إذ انه في تلك الحالة يجب الاعتماد على ميكانيك الكم النسبي لايجاد دالة الموجة لذرة الهيدروجين ودالة الموجة للجسيم المستطار.

Abstract:

The problem of scattering of fast particles by the target atoms is the most important problem in atomic physics.

We have studied the scattering of fast particle by H-Atom in the state $n=1$ $l=zero$.

We have detailed with scattering process as scattering by the nucleus of H-Atom and the electron of the atom.

We used nonrelativistic wave functions of the H-Atom.

We found a great agreement with practical results which were found by Rutherford.

The difference which are exist when the velocity of particles can be compared with light velocity are naturally known because in this case we must use relativistic Q.M (Quantum Mechanics) to find the wave function of H-Atom and the scattering particles.

المقدمة:

ان مفهوم المقطع التفاضلي الفعال في الميكانيك الكلاسيكي يمكن ايضا ان يحدد في ميكانيك الكم [2]. وفي الحقيقة ان المقطع التفاضلي للجسيمات في زاوية مجسمة هو نسبة عدد الجسيمات المستطارة ضمن هذه الزاوية الى كثافة الفيض لهذه الجسيمات. ان الفيض وكثافة الفيض يمكن تحديده في ميكانيك الكم. لذلك فان المقطع التفاضلي له نفس المعنى في الميكانيك الكمي.

لقد تم دراسة موضوع استطارة الجسيمات بواسطة ذرات الهدف من قبل علماء عديدين ولعل اول من درس الموضوع بشكل عملي وتوصل الى معادلة تجريبية لذلك هو رذرفورد حيث درس استطارة الاجسام بواسطة الذرات الثقيلة آخذا بنظر الاعتبار تأثير النواة على الاجسام المستطارة دون النظر الى الالكترونات الذرية. ثم جاء بعد ذلك (بورن) واستطاع ان يجد علاقة تقريبية لمقطع الاستطارة والمحدد بالعلاقة:

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 d\Omega}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

حيث m كتلة الجسم الساقط، θ زاوية الانحراف، Z العدد الذري للذرة الهدف الا ان هذه المعادلة بطريقة اشتقاقها فيها الكثير من التقريب وتتعامل مع الذرة وكانها تحمل شحنتين محددتي الموقع (dipole) وهذا خلاف واقع ميكانيك الكم حيث ان كثافة الشحنة عبارة عن احتمالية لوجود الالكترون وبالتالي شحنته في مكان محدد.

درسنا حالة استطارة جسيم مشحون بواسطة ذرة الهيدروجين في الحالة $n=1, \ell=0$ إن الدالة الموجية لالكترون ذرة الهيدروجين دالة بسيطة. وباستخدام مفهوم احتمالية الانتقال من حالة غير مستطارة الى حالة مستطارة فاننا استخدمنا عنصر مصفوفة $\chi_{k,k'}$ باستخدامنا الميكانيك غير النسبي لذلك فان النتيجة يمكن تطبيقها على جسيم ذي سرعة صغيرة قياسا بسرعة الضوء.

النظرية // Theory

لنأخذ جسيما ذا زخم $\vec{p}$ قبل عملية الاستطارة و $\vec{p}'$ بعد عملية الاستطارة.
ولنختار دالتين موجيتين $\psi^{\circ}(p)$ و $\psi^{\circ}(p')$ لتكونا دالتين مستويتين موجيتين (Plane wave functions) لتقابل الحركة الحرة [3]

$$\psi^{\circ}(p)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\frac{\vec{p}.\vec{r}}{h}} \qquad \psi^{\circ}(p')=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\frac{\vec{p}.\vec{r}}{h}} \quad ....1$$

هاتان الدالتان الموجيتان عياريتان.
$\psi^{\circ}(p)$ تقابل كثافة الفيض.

$$\vec{J}=\frac{h}{2m_i}(\psi^{\circ}*\nabla\psi^{\circ}-\psi^{\circ}\nabla\psi*)$$

$$=\frac{h}{2m_iV}(e^{-i\frac{\vec{p}.\vec{r}}{h}}\nabla e^{i\frac{\vec{p}.\vec{r}}{h}}-e^{i\frac{\vec{p}\mp r}{h}}\nabla e^{-i\frac{\vec{p}.\vec{r}}{h}})=\frac{\vec{p}}{mV}=\frac{\vec{v}}{V}.............2$$

حيث ان $\vec{v}$ سرعة الجسيم.
ان عنصر المصفوفة للتحويل هو:

$$\chi'(\vec{p},\vec{p})=\frac{1}{V}\int e^{i\frac{(\vec{p}-\vec{p})\vec{r}}{h}}U(r)dv...3$$

حيث U(r) هو كمون التفاعل بين ذرة الهيدروجين والالكترون الساقط.
ان احتمالية الانتقال من $\vec{p}\rightarrow\vec{p}'$ اعني احتمالية الاستطارة في وحدة الزمن هو: [4]

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2\pi}{h}\left[\chi(\xi,\xi')\right]^2 Z(\xi)..4$$

$W=\frac{2\pi}{h}\chi(\xi,\xi')Z(\xi)t$ هي احتمالية الانتقال. $Z(\xi)$ هي وزن الحالة اعني عدد دوال الحالة في وحدة الطاقة.
إن عنصر المصفوفة للانتقال $\vec{p}\rightarrow\vec{p}'$ هو:

$$\chi(\vec{p},\vec{p}')=\frac{1}{V}\int e^{i\frac{(\vec{p}-\vec{p}').\vec{r}}{h}}U(\vec{r})dV..5$$

$$Z(\xi)=\frac{dN(\xi)}{d\xi}\frac{d\Omega}{4\pi}=\frac{Vm^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\pi^2h^2}d\Omega.....................................6$$

حيث $d\Omega$ عنصر الزاوية المجسمة و m كتلة الالكترون الساقط.
إن المقطع التفاضلي في عنصر الزاوية المجسمة $d\Omega$ يساوي احتمالية الاستطارة في وحدة الزمن مقسومة على الفيض الساقط [3]. $\frac{v}{V}=\frac{1}{V}\sqrt{\frac{2\xi}{m}}$

$$d\sigma=\left|\int e^{i\frac{(\vec{p}-\vec{p}').\vec{r}}{h}}U(\vec{r})dV\right|^2\frac{m^3}{4\pi^2h^4}d\Omega...7$$

ليكن $\vec{k}=\frac{\vec{p}}{h}$ و $\vec{k}'=\frac{\vec{p}'}{h}$ حيث أن $\vec{k}=\frac{\vec{p}}{h}$ هو متجه الموجة.

$$U_{k,k'} = \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}} U(r)dV \qquad 8$$

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi h^2}\left|U_{k,k'}\right|^2 d\Omega \qquad 9$$

إن دالة الموجة لذرة الهيدروجين في الحالة $n=1, \ell=0$ هي:[5]

$$\psi = Be^{-\eta} \qquad \eta = r\frac{me^2}{h^2}$$

r هو نصف قطر مدار الالكترون لذرة الهيدروجين ويعني المسافة بين (e^-) و(p^+) لذرة الهيدروجين.
شرط العيارية Normalization condition :

$$(\frac{h^2}{me^2})^3 4\pi B^2 \int_0^\infty e^{-2\eta}\eta^2 d\eta = 1 \qquad 10$$

من المعادلة 10 نحصل:

$$B = \sqrt{\frac{1}{\pi}(\frac{mc^2}{h^2})^3}$$

إن الطاقة الكامنة للتفاعل بين الشحنة (e^-) وذرة الهيدروجين هي:

$$U = -\frac{e^2}{r} + \int \frac{e^2|\psi|^2}{r-r'}dV$$

$$U_{k,k'} = -\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}}\frac{e^2}{r}dV + \int e^{(\vec{k}-k').\vec{r}}dV'\int\frac{|\psi|^2}{|r-r'|}dV \qquad 11$$

حيث dV' هو عنصر الحجم للالكترون الساقط الذي يكون متجه الموضع له r'.
لنأخذ التكامل الاول:

$$-\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}}\frac{e^2}{r}dV = -2\pi e^2\int_0^\infty \frac{1}{r}r^2dr\left[\int_0^\pi e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r\cos\theta}\sin\theta d\theta\right]$$

$$= -2\pi e^2\int_0^\infty \frac{1}{r}r^2dr\left[\int_0^\pi e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r\cos\theta}d\cos\theta\right]$$

$$= -2\pi e^2\int_0^\infty rdr\left[\int_1^{-1}\frac{e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r\cos\theta}di\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r\cos\theta}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}\right]$$

$$= = -2\pi e^2\int_0^\infty \frac{r}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}dr\left[e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r\cos\theta}\Big|_1^{-1}\right]$$

$$= -2\pi e^2\int_0^\infty \frac{e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|} - e^{-i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}$$

$$\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|^2 = \vec{k}^2 - 2\vec{k}.\vec{k}' + \vec{k}'^2$$

لان $\left|\vec{k}\right| = \left|\vec{k}'\right|$

حيث أن الجسيم يغير اتجاهه دون ان يتغير مقدار زخمه:

$$\vec{p}=\frac{\vec{k}}{\hbar}$$

$$\vec{p}'=\frac{\vec{k}'}{\hbar}$$

$$\vec{p}=\vec{p}'$$

$$\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|^2=2\vec{k}^2-2\vec{k}\vec{k}'=2\vec{k}^2(1-\cos\theta)=4\vec{k}^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|=2\vec{k}\ \sin\ \frac{\theta}{2}$$

$$=-2\pi e^2\int_0^\infty \frac{e^{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}-e^{-i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}dr$$

$$=-2\pi e^2\int_0^\infty \frac{\cos\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r+i\sin\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r-\cos\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r+i\sin\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}dr$$

$$=-2\pi e^2\int_0^\infty \frac{i\sin\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}dr$$

$$=-4\pi e^2\int_0^\infty \frac{i\sin\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|r}{i\left|\vec{k}-\vec{k}'\right|}dr=\int_0^\infty \frac{\sin(2\vec{k}r\sin\frac{\theta}{2})}{2\vec{k}\sin\frac{\theta}{2}}dr$$

$$=\frac{\pi e^2}{2\vec{k}^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\int_0^\infty \sin axdx=\frac{1}{a}$$ حيث أن[7]

لذلك فان التكامل الاول للمعادلة 11 هو:

$$\frac{\pi e^2}{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore U_{kk'}=\frac{\pi c^2}{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}(1-\int\psi^2(r'')e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}'}dV')\text{..............................}12$$

$$\int_0^\infty x\sin axe^{-bx}dx=\frac{\partial}{\partial b}\int_0^\infty \sin axe^{-bx}dx=\frac{\partial}{\partial b}\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$$

$$a=2k\sin\frac{\theta}{2}$$

$$b=\frac{2me^2}{b^2}$$

لذلك:

$$U_{kk'}=\frac{mc^2}{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}(1-\frac{1}{\pi}(\frac{me^2}{h^2})\frac{2\pi}{k\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{4k\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{2me^2}{h^2}}{[4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{2me^2}{h^2}]^2})..............13$$

يسمى المقدار الاخير بين القوسين الكبيرين بعامل الحجب وهو مقياس لمدى تأثير الالكترون الذري الدائر حول النواة على حجب تأثير الشحنة النووية على استطارة الالكترون المستطار. ويمكن تبسيط هذا العامل بالشكل:

$$=1-\frac{1}{\pi}(\frac{me^2}{h^2})\frac{2\pi}{k\sin\frac{\theta}{2}}\frac{2\times 2k\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{2me^2}{h^2}}{[4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+(\frac{2me^2}{h^2})^2]^2})..........14$$

$$\vec{k}=\frac{\vec{p}}{h}=\frac{m\vec{v}}{h}$$

حيث v سرعة الالكترون الساقط ، m كتلته.
نحصل على:

$$\frac{1}{[1+\frac{h^4k^2}{m^2e^4}\sin^2\frac{\theta}{2}]^2}=\frac{1}{[1+\frac{hv}{e^2}\sin^2\frac{\theta}{2}]^2}=B...............................15$$

$$=1-\frac{1}{[1+(\frac{hv}{e^2})^2\sin^2\frac{\theta}{2}]^2}$$

$$d\sigma=\frac{m^2}{4\pi^2h^4}\times[\frac{\pi e^2}{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}(1-\frac{1}{[1+(\frac{hv}{e^2})^2\sin^2\frac{\theta}{2}]^2})]^2 d\Omega..............16$$

وتبسط المعادلة اعلاه ونعوض $k=\frac{p}{h}$ نحصل على:

$$d\sigma=\frac{e^4}{4m^2v^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[1-\frac{1}{\left[1+\left(\frac{h\nu}{e^2}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2}\right]^2 d\Omega$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	θ=2°	θ=4°	θ=8°	θ=16°
عمليا من معادلة رذرفورد. نتائج تجريبية	3×10^{-28}	2×10^{-29}	1.2×10^{-30}	9×10^{-32}
من المعادلة المستنتجة	2.997×10^{-28}	1.99×10^{-28}	1.191×10^{-28}	8.92×10^{-28}

جدول رقم (١) قيم $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ العملية والمستنتجة من المعادلة عندما $v=5\times10^6 m/\sec$ حيث أن وحدات $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ هي

$g^2.cm^4/\sec^4$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	θ=2°	θ=4°	θ=8°	θ=16°
عمليا من معادلة رذرفورد. نتائج تجريبية	2×10^{-29}	1.3×10^{-30}	9.2×10^{-32}	5×10^{-34}
من المعادلة المستنتجة	1.996×10^{-29}	1.29×10^{-30}	9.1×10^{-32}	4.87×10^{-34}

جدول رقم (٢) قيم $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ العملية والمستنتجة من المعادلة عندما $v=10^7\,m/\sec$

حساب قيم معامل التشتت (B) كدالة للسرعة وزاوية الانحراف θ

Θ	B
1°	0.999
2°	0.990
3°	0.980
5°	0.996
10°	0.87

جدول رقم (3) قيم معامل التشتت (B) كدالة للسرعة وزاوية الانحراف θ عندما $v=5\times10^6\,m/\sec$

Θ	B
1°	0.98
2°	0.90
3°	0.75
5°	0.69

جدول رقم (4) قيم معامل التشتت (B) كدالة للسرعة وزاوية الانحراف θ عندما $v=10^8\,m/\sec$

Θ	B
1°	0.998
2°	0.980
3°	0.92
5°	0.90
10°	0.74

جدول رقم (5) قيم معامل التشتت (B) كدالة للسرعة وزاوية الانحراف θ عندما $v=10^7\,m/\sec$

Θ	B
1°	0.985
2°	0.95
3°	0.93
5°	0.90
10°	0.87

جدول رقم (6) قيم معامل التشتت (B) كدالة للسرعة وزاوية الانحراف θ عندما $v=5\times10^7\,m/\sec$

حيث:

$$B = \left(1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h\nu}{e^2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]^2}\right)$$

عامل التشتت.

مناقشة النتائج

1. ان قيمة B تمثل مقدار نسبة التصحيح الذي يجب ان يطرأ على قيمة المقطع العرضي للتشتت $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ المحسوب تجريبيا ومن قبل رذرفورد.

2.ان القيم المحسوبة من القانون المستنتج في البحث تكون اكثر انحرافا عن القيم التجريبية المحسوبة عندما تكون سرعة الالكترونات المقذوفة قريبة من سرعة الضوء وهذا امر طبيعي اذ انه في حالة السرعات القريبة من سرعة الضوء يجب اللجوء الى بحث الموضوع من وجهة النظرية الكمية النسبية Relative Quantum Physics

حيث اان السرعات العالية تؤدي الى تغيير محسوس في كتلة الجسيمات المقذوفة وهذا يؤدي الى تغيير النتائج.

ان مسألة دراسة التشتت من وجهة نظرية ميكانيك الكم النسبي لهي صعبة جدا ويمكن لن تكون اساسا لبحث متقدم في هذا المجال حيث يجب استخدام معادلة ديراك (Dirac Equation) لايجاد المعادلة الموجية للاجسام المقذوفة كذلك الاجسام او النواة الهدف.

الاستنتاج

لقد وضع رذرفورد معادلة تجريبية لايجاد المقطع التفاضلي الفعال للاستطارة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 d\Omega}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

حيث ان Z هو العدد الذري للذرة الهدف (Target atom) اذا رجعنا الى المعادلة (16) وافترضنا ان الالكترون الذري ليس له تأثير على عملية الاستطارة أي اننا اذا اعتبرنا عامل الحجب مساويا الى الصفر أي انه ليس للالكترون الذري تأثير على تفاعل الالكترون الساقط مع نواة ذرة الهيدروجين، في هذه الحالة نرى توافقا بين معادلة رذرفورد التجريبية والمعادلة المستنتجة من البحث وهذا ما يؤكد صحة استنتاج المعادلة (16)

References

1. A. A Belavin A. M Polyakov Phys. Lett. Adison Wessly 1985.

2. G. T. Hooft Nuclear Physics. A. M Polyakov Third Edition 1990.

3. H. Nielsen and P. Aleson Nuclear Physics Mc Graw Hill 1973 Second Edition.

4. Golman Aspect of Symmetry Pergmon Press 1992 Fifth Edition.

5. Steven Weinberg Quantum theory of fields. Cambridge University 2007 First Edition.

6. Classical Quantum Theory E.H Messon Cambridge University 2006 Second Edition.

7.Advanse Calculus G.H Hoft Pergmon Press 1992 Cambridge University Press.