استخدام المحاكاة في المقارنة بين ثلاث طرائق لمقارنة معلمتي التوزيع الاسي العام

أ. د. ضوية سلمان حسن
قسم الاحصاء
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة بغداد

م. م. انعام عبد الرحمن نعمان
قسم الاحصاء
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة ديالى

الخلاصة

يتناول البحث تعريف التوزيع الاسي العام $GE(\alpha, \lambda)$ Generalized Exponential ذي المعلمتين (α ، λ)، والذي ادخل كتوزيع بديل لتوزيع كاما وتوزيع ويبل واللوغاريتمي الطبيعي، واستخدم كثيراً في الكثير من توزيعات وقت الحياة للوحدات المنتجة وتقديرات المعولية، وفي تصاميم خطط عينات القبول للفحص المبتور.وفي بحثنا هذا استخدمت ثلاث طرائق لتقدير معلمتي القياس λ والشكل α للتوزيع الاسي العام هي: الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة مقدرات نقاط التجزئة، ولثلاث حالات، الأولى تقدير λ عندما α معلومة، والثانية تقدير α عندما λ معلومة، والثالثة عندما α و λ غير معلومتين. وبعد تقدير المعلمات (λ, α) نقارن بين المقدرات بواسطة المحاكاة وباعتماد المقياس الاحصائي MSE's ولحجوم عينات مختلفة. وعرضت النتائج كافة في جداول خاصة.

Abstract

Recently a new distribution, named as *Generalized Exponential distribution*, has been introduced and studied quite extensively by authors. This distribution can be used as an alternative to Gamma or Weibull distribution in many situations such as life testing and reliability studies. In this research we mainly consider three methods of estimation procedure, which are Maximum Likelihood, and Moments Methods and Percentiles Estimators, to estimate the shape and scale parameters for $GE(\alpha, \lambda)$, in three cases, first estimation of λ when α is known, second estimating of α when λ is known, third the estimation procedures when both are unknown. The performances of these estimators are compared through numerical simulations, and all the results are explained in tables.

***Keywords: Generalized Exponential Distribution, MLE, MME,* Percentiles Estimators, *Hazard Function MSE*.**

المقدمة

يعد هذا البحث كجزء من البحوث الاولية المطلوب انجازها ضمن المرحلة التكميلية لإنجاز اطروحة الدكتوراه في الاحصاء الموسومة ب((افضل تقدير لمعلمة وقت البتر في حالة التوزيع الأسي العام ولخطط عينات القبول))، وتشكل الفقرات المطروحة فيه جزءاًمهما سيقدم في اطروحتنا لنيل درجة دكتوراه فلسفة في الاحصاء. سوف نتناول اولاً الجانب النظري مع شرح لطرائق التقدير ومن ثم جانب المحاكاة. ادخل التوزيع الأسي العام ذي المعلمتين Two-Parameters Generalized Exponential، $GE(\alpha, \lambda)$ ، من قبل الباحثين Gupta &Kundu (1999)، كتوزيع بديل لتوزيع كاما او توزيع ويبل، واستخدم كثيراً في تقديرات المعولية، وفي تصاميم خطط عينات القبول للفحص المبتور، عندما يكون زمن الفحص للوحدات المنتجة متغيراً عشوائياً له توزيع احتمالي هو التوزيع الأسي العام ذي المعلمتين (λ, α) والذي من الممكن تعميمه الى توزيع ذي ثلاث معلمات بادخال معلمة الموقع Location Parameter μ، فضلا عن معلمة الشكل والقياس (λ, α) حسب متطلبات التوزيع الاحتمالي للبيانات التي تتجمع لدى الباحث من الخبرة والفحوصات السابقة، ومن المعلوم حالياً ان معظم اجهزة الكومبيوتر العلمية فيها مولد لتوليد ارقام عشوائية من التوزيع المنتظم، وعليه فان توليد متغير من التوزيع الأسي العام يمكن الحصول عليه بسهولة من القاعدة:

$X = \{(-\ln(1-U^{(\frac{1}{\alpha})})/\lambda\}$

إذ أن $U \sim U[0,1]$.

اما قيم (λ,α) يمكن ان تعَد ثابتة، او تقدر حسب طرائق تقدير مختلفة مثل الامكان الاعظم، طريقة العزوم الاعتيادية، العزوم الخطية، الطرائق البيزية، مقدرات نقاط التجزئة والمقدرات المختلطة. وفي بحثنا هذا سوف نركز على تفصيل ثلاث طرائق تقدير هي: الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة مقدرات نقاط التجزئة، وبعد تقدير المعلمات (λ,α) نقارن بين المقدرات بواسطة المحاكاة وباعتماد المقياس الاحصائي MSE's ولحجوم عينات مختلفة.

يتضمن البحث مقدمة عامة عن التوزيع الأسي العام، ثم الجانب النظري للتوزيع وخصائصه وشرح طرائق المقدرات الثلاث (الامكان الاعظم والعزوم ونقاط التجزئة)، ثم ننتقل الى الجانب التجريبي للمقارنة بين هذه المقدرات بواسطة MSE، وعرض النتائج كافة في جداول خاصة.

الجانب النظري

يعرف التوزيع الأسي العام ذي المعلمتين، والذي سوف نختصره في بحثنا هذا بالرمز $GE(\alpha,\lambda)$ ، بالدالةالاحتمالية التالية:

$$f(x,\alpha,\lambda)=\begin{cases}\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}\,e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & o/w\end{cases} \qquad .....(1)$$

إذ أن α تمثل معلمة الشكل Shape parameters، λ معلمة القياس Scale parameters.

وان الدالة الاحتمالية التجميعية c.d.f هي:

$$F(x,\alpha,\lambda)=(1-e^{-\lambda x})^{\alpha} \quad x>0 \;\; \alpha,\lambda>0 \qquad .....(2)$$

وان دالة البقاء Survival function هي:

$$S(x,\alpha,\lambda)=1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha} \qquad .....(3)$$

اما دالة المخاطرة Hazard function فهي:

$$h(x,\alpha,\lambda)=\frac{f(x,\alpha,\lambda)}{1-F(x,\alpha,\lambda)}=\frac{\alpha\lambda\,e^{-\lambda x}\,(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} \qquad .....(4)$$

وعندما تكون ($\alpha=1$) نحصل على التوزيع الأسي ذي معلمة القياس λ والمعرف بالدالة:

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & o/w\end{cases}$$

وتمتلك الدالة $GE(\alpha,\lambda)$ معدلات فشل متزايدة ومتناقصة اعتماداً على معلمة الشكل.

يهدف البحث الى تقدير المعلمات α، λ بطرائق مختلفة منها الامكان الاعظم والعزوم ومقدرات التجزئة والمربعات الصغرى الموزونة، والمقارنة بين هذه المقدرات باستخدام المحاكاة وبواسطة MSE.

طرائق تقدير معلمات التوزيع الاسي العام:

اولاً: طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Estimators

تعد مقدرات الامكان الاعظم من المقدرات الجيدة والمتسقة والكفوءة، وتعتمد على سحب عينة عشوائية هي $(x_1, x_2, ..., x_n)$ من التوزيع $GE(\alpha, \lambda)$، فان لوغاريتم الامكان الاعظم $L(\alpha, \lambda)$ هي (المعادلة ٥) التالية:

$$LnL(\alpha,\lambda) = n\,Ln(\alpha) + nLn(\lambda) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i}) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad .....(5)$$

ثم نشتقها بالنسبة الى λ ، α لنحصل على المعادلات الطبيعية:

$$\frac{\partial LnL}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i}) = 0 \qquad .....(6)$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{(1-e^{-\lambda x_i})} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad .....(7)$$

ومن المعادلتين ٦، ٧ نحصل على معدل الامكان الاعظم للمعلمة α كدالة من λ، ولتكن:

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\hat{\lambda} x_i})} \qquad .....(8)$$

وعند اعادة تعويض المعادلة (8) في المعادلة (٥) نحصل على:

$$g(\lambda) = L(\hat{\alpha}(\lambda), L) = C - n\,Ln\left(\sum_{i==1}^{n}\{-Ln(1-e^{-\lambda x_i})\}\right) + nLn(\lambda) - \sum_{i==1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i}) - \lambda\sum_{i==1}^{n} x_i \qquad .....(9)$$

ويتم الحصول على مقدر الامكان الاعظم للمعلمة λ والذي سوف نرمز له بالرمز $\hat{\lambda}_{MLE}$ من تعظيم المعادلة ٩ نسبة الى λ وتطبيق طريقة النقطة الصامدة **fixed method** لحل المعادلة:

$$\hat{\lambda} = h(\lambda) \qquad .....(10)$$

إذ أن:

$$\hat{\lambda}_1 = h(\lambda_o)$$

$$\hat{\lambda}_2 = h(\lambda_1)$$

$$h(\lambda)=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{(1-e^{-\lambda x_i})}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i})} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{(1-e^{-\lambda x_i})}\right)\right]^{-1} \qquad \text{.....(11)}$$

وبعد ايجاد مقدر الامكان الاعظم للمعلمة λ وهو $\hat{\lambda}_{MLE}$ ، نحصل على $\hat{\alpha}_{MLE}$ من خلال التعويض بالمعادلة ٨، إذ أن:

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \hat{\alpha}(\hat{\lambda}_{MLE}) = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\hat{\lambda}_{MLE} x_i})} \qquad \text{.....(12)}$$

ان مقدري الامكان الاعظم $\hat{\lambda}_{MLE}$ ، $\hat{\alpha}_{MLE}$ تتوزعان طبيعياً بمتوسط صفر، وتباين $I^{-1}(\alpha, \lambda)$ ، اي ان:

$$\left[\sqrt{\mathrm{n}}\,(\hat{\alpha}_{MLE}-\alpha),\sqrt{\mathrm{n}}\,(\hat{\lambda}_{MLE}-\lambda)\right]\xrightarrow{d} N_2(0, I^{-1}(\alpha,\lambda))$$

وان $I(\alpha, \lambda)$ هي مصفوفة فيشر للمعلومات وتساوي:

$$I(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{n}\begin{bmatrix} E(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}) & E(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha\, \partial \lambda}) \\ E(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial \alpha}) & E(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}) \end{bmatrix}$$

ان عناصر المعلومات لمصفوفة فيشر عندما $(\alpha > 2)$ هي:

$$E(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}) = -\frac{n}{\alpha^2}$$

$$E(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha\,\partial \lambda}) = \frac{n}{\lambda}\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\Psi(\alpha)-\Psi(1)\right)-\left(\Psi(\alpha+1)-\Psi(1)\right)\right]$$

$$E(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}) = -\frac{n}{\lambda^2}\left[1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}\left\{\Psi'(1)-\Psi'(\alpha-1)+\left(\Psi(\alpha-1)-\Psi(1)\right)^2\right\}\right]$$

$$-\frac{n\alpha}{\lambda^2}\left[\Psi'(1)-\Psi(\alpha)+\left(\Psi(\alpha)-\Psi(1)\right)^2\right]$$

وسوف نتناول اولاً مقدر الامكان الاعظم للمعلمة α عندما معلمة القياس λ معلومة، وهو نفس المقدر في المعادلة ٨، ولكن بعَدλ معلومة (ثابتة) وسوف يسمى هذا المقدر:

$$\hat{\alpha}_{MLE}(\lambda = constant) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i})}$$

وان هذا المقدر متحيز، إذ أن:

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}_{MLE(\lambda=k)}) = \frac{n}{(n-1)}\,\alpha$$

$$Var(\hat{\alpha}_{MLE(\lambda=k)}) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\,\alpha^2$$

$$MSE(\hat{\alpha}_{MLE(\lambda=k)}) = \frac{n+2}{(n-1)\,(n-2)}\,\alpha^2$$

ويمكن تعديل المقدر المتحيز بمقدر غير متحيز هو:

$$\hat{\alpha}_{unbaised} = \frac{n-1}{n}\,\hat{\alpha}_{MLE(\lambda=k)} = \frac{-(n-1)}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-k\,x_i})} \qquad \text{.....(13)}$$

اما الحالة الاخرى التي يتبع اخذها بنظر الاعتبار هي مقدر الامكان الاعظم للمعلمة λ عندما معلمة الشكل α معلومة، وان هذا المقدر نحصل عليه من تعظيم الدالة ١٤:

$$U(\lambda) = n\,Ln(\lambda) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} Ln(1-e^{-\lambda x_i}) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{.....(14)}$$

نسبة الى λ. ان قيمة λ التي تعظم **U(λ)**، نحصل عليها من حل المعادلة ($V(\lambda)=\lambda$) بطريقة النقطة الصامدة التكرارية، إذ أن:

$$V(\lambda)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i(1-\alpha e^{-\lambda x_i})}{(1-e^{-\lambda x_i})}\right)\right]^{-1} \qquad .....(15)$$

$$\lambda=U(\lambda)$$

$$\lambda_1=U(\lambda_o)\ ,\ \lambda_2=U(\lambda_1)$$

ثانياً: مقدرات العزوم Moment Estimators

تعتمد مقدرات العزوم للمعلمات α، λ على مساواة عزمي العينة مع عزمي المجتمع، ومن هنا ينتج ان معامل الاختلاف (Coefficient Variation C.V) مستقل عن معلمة القياس λ. وعند مساواة C.V للعينة مع تلك الخاصة بالمجتمع نحصل على:

$$\frac{S}{\bar{X}}=\frac{\sqrt{\psi'(1)-\psi'(\alpha+1)}}{\psi(\alpha+1)-\psi(1)} \qquad .....(16)$$

ويشير الرمز $\psi(.)$ الى ما يسمى digamma، وان مشتقته $\psi'(.)$، وتعني:

$$\psi(u)=\frac{d\,\Gamma(u)}{d(u)}$$

$$\psi'(u)=\frac{d}{du}\psi(u)$$

علماً بان الوسط الحسابي والتباين للعينة هما:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} xi/n$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$$

ولابد من حل المعادلة الغير الخطية ١٦ بالطرق التكرارية للحصول على مقدر العزوم للمعلمة α وهو $\hat{\alpha}_{MME}$، وعند الحصول على هذا المقدر نعوض في معادلة المتوسط:

$$\mu=E(x)=\frac{1}{\lambda}\left[\psi(\alpha+1)-\psi(1)\right] \qquad .....(17)$$

للحصول على مقدر العزوم للمعلمة λ وهو $\hat{\lambda}_{MME}$، واذا كانت معلمة القياس λ معلومة، فان مقدر العزوم للمعلمة α وهو $\hat{\alpha}_{MME}$ نحصل عليه من حل المعادلة غير الخطية ١٨ التالية:

$$\lambda\bar{X} = \psi(\alpha+1)-\psi(1) \qquad .....(18)$$

بأية طريقة عددية تكرارية.

واذا كانت معلمة الشكل α معلومة، فان مقدر العزوم للمعلمة λ هو:

$$\hat{\lambda}_{MME}(\alpha = constant) = \frac{\Psi(\alpha+1)-\Psi(1)}{\bar{X}} \qquad \text{..... (19)}$$

ثالثاً: المقدرات المستندة على المقاييس التجزيئية Estimators Based on Percentiles

بالنسبة للتوزيع الأسي العام $GE(\alpha, \lambda)$، بالإمكان استخدام مقدرات نقاط التجزئة لتقدير المعلمات α، λ، بسبب طبيعة C.D.F لهذا التوزيع:

$$F(x,\alpha,\lambda)=(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}$$

ومنها نجد ان:

$$-\frac{1}{\lambda} Ln\left(1-\{F(x,\alpha,\lambda)\}^{1/\alpha}\right) = X \qquad \text{..... (20)}$$

ولتكن P_i مقدر ما للدالة $F(x_{(i)},\alpha,\lambda)$، فان مقدرات α، λ نحصل عليها من تصغير المقدار ٢١ الآتي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_{(i)}+\lambda^{-1} Ln\left(1-P_i^{1/\alpha}\right)^2\right] \qquad \text{..... (21)}$$

نسبة الى α، λ.

من الممكن استخدام اسلوب انحدار غير خطي لتقدير α، λ من المعادلة ٢١ آنياً، وهذه المقدرات تسمى مقدرات نقاط التجزئة(Percentile Estimators (PCE's.

ومن الممكن استخدام عدة قيم لـ P_i^S كمقدرات للدالة $F(x_{(i)})$، على سبيل المثال، مثلاً:

$$P_i = (\frac{i}{n+1})$$

وهو المقدر الاكثر عمومية للدالة $F(x_{(i)})$، وهو يمثل قيمتها المتوقعة. وهناك اختيارات اخرى، مثلاً $P_i = \frac{(i-318)}{(n+\frac{1}{4})}$ أو

$P_i = \frac{(i-\frac{1}{2})}{n}$.

ولو افترضنا ان احد المعلمات معلوم، مثلاً معلمة الشكل α، فان مقدر λ الناتج من تصغير الدالة ٢١ نسبة الى λ فقط هو $\hat{\lambda}_{PCE(\alpha=k)}$:

$$\hat{\lambda}_{PCE(\alpha = k)} = - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[Ln\left(1-P_i^{1/\alpha}\right)^2 \right]}{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\ Ln\left(1-P_i^{1/\alpha}\right)} \quad \text{..... (22)}$$

واذا كانت λ معلومة ولتكن λ=1 فان:

$$F(x,\alpha)=(1-e^{-x})^{\alpha}$$
$$Ln(F(x,\alpha))=\alpha\, Ln(1-e^{-x}) \quad \text{..... (23)}$$

وبنفس الطريقة فان مقدر نقطة التجزئة للمعلمة α عندماλ معلومة نحصل عليه من تصغير الدالة ٢٤ ادناه:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Ln(p_i)-\alpha\, Ln(1-e^{-x_{(i)}})\right)^2 \quad \text{..... (24)}$$

نسبة الى المعلمة α. ومنه نجد ان:

$$\hat{\alpha}_{PCE(\lambda=1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Ln(p_i)\ Ln(1-e^{-x_{(i)}})\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(Ln(1-e^{-x_{(i)}})\right)^2} \quad \text{..... (25)}$$

وهناك طرائق اخرى للتقدير منها المربعات الصغرى الموزونة، والعزوم الخطية وغيرها لامجال لذكرها في هذا البحث.

الجانب التجريبي

لعل من الصعوبة مقارنة الاداء النظري للمقدرات المختلفة لمعلمات التوزيع الأسي ذي المعلمتين، لذلك اجريت تجارب محاكاة لمقارنة اداء الطرائق المختلفة من إذ التحيز، ومتوسط مربعات الخطأ (MSE's) عند حجوم عينات مختلفة، وقيم معلمات مختلفة، وان توليد القيم للتوزيع $GE(\alpha, \lambda)$ بسيط جداً، فاذا كان U متغير عشوائي يتوزع توزيعاً منتظماً:

$$U \sim U[0,1]$$

فان X متغير يتبع التوزيع الأسي العام.

$$X= ((- Ln\ (1-U^{(\frac{1}{\alpha})})/\lambda\ )$$

وقد تم توليد عينات بحجوم (n = 10,20,50,100)، وكررت كل تجربة (R=1000) مرة، وتم اولاً تقدير α عندما λ معلومة، وإذ أن λ معلمة قياس، وان كل المقدرات الى α تتمتع بخاصية عدم تغير القياس (Scale Invariant)، لذلك سوف نعد (λ=1)، وتعطى قيم لـ α هي ($\alpha = 0.2, 0.6, 1.0, 2.0, 2.5$)، ونستخرج معدل القيم ($\hat{\alpha}/\alpha$) في الطرائق الثلاث ووضع مجاور لها داخل قوسين ($MSE\ of\ \hat{\alpha}$)،ويلاحظ من الجدول رقم (١) ان معدل التحيز النسبيAverage Relative Biases ($\frac{|\hat{\alpha}-\alpha|}{n}$) وكذلك معدل متوسط الخطأ النسبي، كلها تتناقص عند زيادة حجم العينة، وهذا يؤيد ان المقدرات غير متحيزة، وكذلك متسقة Consistent بالنسبة لمعلمة الشكل α عندما (λ=1)، ويمكن اخذ قيم اخرى الى (λ=2, 3) وتحليل النتائج.

والجدول (١) يلخص نتائج معدل ($\hat{\alpha}/\alpha$)، ومعدل متوسط الخطأ $MSE(\hat{\alpha})$ عندما ($\alpha = 0.2, 0.6, 1.0, 2.0, 2.5$)،(λ=1).

الجدول (١) معدل المقدرات النسبية ($\hat{\alpha}/\alpha$) ومعدل متوسط الخطأ لـ $\hat{\alpha}$ عندما λ معلومة

n	Method	α				
		0.2	0.6	1.0	2.0	2.5
10	MLE MME PCE	1.109 (0168) 1.096(0.826) 0.922 (0.127)	1.115(0.175) 1.079(0.425) 0.928 (0.129)	1.114 (0.172) 1.093(0.374) 0.931 (0.127)	1.114(0.172) 1.093 (0.318) 0.928 (0.129)	1.117 (0.175) 1.086 (0.296) 0.928 (0.128)
20	MLE MME PCE	1.065 (0.066) 1.027(0.329) 0.938 (0.080)	1.049(0.052) 1.046 (0.178) 0.923 (0.061)	1.052(0.063) 1.036 (0.141) 0.929 (0.062)	1.052(0.064) 1.037 (0.121) 0.923 (0.061)	1.049 (0.062) 1.041 (0.120) 0.924 (0.062)
30	MLE MME PCE	1.030(0.038) 1.028 (0.220) 0.940 (0.042)	1.035 (0.040) 1.024 (0.109) 0.935 (0.042)	1.037 (0.040) 1.021 (0.093) 0.930 (0.041)	1.038 (0.040) 1.022 (0.078) 0.935 (0.042)	1.035 (0.040) 1.026 (0.073) 0.935 (0.042)
50	MLE MME PCE	1.025 (0.022) 1.012 (0.125) 0.944 (0.025)	1.020 (0.022) 1.017 (0.063) 0.946 (0.026)	1.020 (0.023) 1.014 (0.051) 0.944 (0.026)	1.020 (0.023) 1.014 (0.043) 0.946 (0.026)	1.020 (0.022) 1.016 (0.041) 0.946 (0.026)
100	MLE MME PCE	1.008 (0.010) 1.008 (0.600) 0.960 (0.013)	1.009 (0.011) 1.009 (0.031) 0.961 (0.013)	1.009 (0.010) 1.007 (0.025) 0.962 (0.013)	1.009 (0.010) 1.009 (0.021) 0.961 (0.013)	1.010 (0.010) 1.007 (0.021) 0.961 (0.013)

يتضح من الجدول (١)، بالنسبة لمقدر MLE ان معدل ($\hat{\alpha}/\alpha$) متقارب جداً، وكذلك بالنسبة PCE و MLE فمثلاً عندما: وكانت قيم معدل $MSE(\hat{\alpha}/\alpha)$ كبيرة في مقدرات العزوم مقارنة بمقدرات المقدر العزوم MME

n=10	α				
	0.2	0.6	1.0	2.0	2.5
MSE	0.829	0.425	0.374	0.318	0.296

وهي كبيرة مقارنة بقيم $MSE(\hat{\alpha}/\alpha)$ لمقدرات الطرائق الاخرى ولكن عندما تكبر حجوم العينات فان $MSE(\hat{\alpha}/\alpha)$ تتناقص بدرجة كبيرة.

وتم الحصول على مقدر الامكان الاعظم λ من خلال تصغير المعادلة ١٤، اما مقدري MME ، PCE تم الحصول عليها مباشرة من المعادلتين ١٩ و ٢٢ بعَدمعلمة الشكل α معلومة، واعطيت α القيم التالية α 0.5, 1.5, 2.5 =، وحجوم عينات (n=10,20,30,50,100)، وكررت كل تجربة (R=1000)، والجدول (٢) يتضمن معدل المقدر $\hat{\lambda}$ ومعدل MSE's لكل المكررات، وتتضمن القيم قيمتان، الاولى تشير الى معدل تقدير المعلمة $\hat{\lambda}$ ، والقيمة الثانية بين قوسين تشير الى متوسط مربعات الخطأ، ويلاحظ ان هذا المعدل بالنسبة لطريقة المقدرات التجزيئية اصغر منه لبقية الطرائق ولجميع قيم α المعلومة، وهذا واضح من النظر الى نتائج معدلات الخطأ (القيم بين الاقواس) الجدول (٢)، وكذلك تم ايجاد المقدرات النسبية للمعلمة λ وكذلك متوسط الخطأ النسبي للمقدر λ عندما α معلومة، ولخصت النتائج في الجدول (٢).

الجدول (٢) مقارنة معدل مقدر $\hat{\lambda}$ ، ومعدل الخطأ النسبي لـ $\hat{\lambda}$ لثلاث طرائقعندما αمعلومة

n	Method	α		
		٠,٥	١,٥	٢,٥
10	MLE MME PCE	1.244 (0.524) 1.234 (0.510) 0.996 (0.321)	1.073 (0.100) 1.076 (0,101) 0.967 (0.084)	1.043(0.057) 1.046(0.058) 0.969 (0.054)
20	MLE MME PCE	1.111 (0.162) 1.107(0.161) 0.959 (0.122)	1.042 (0.040) 1.034(0.044) 0.960 (0.040)	1.023(0.026) 1.027(0.026) 0.972 (0.027)
٣٠	MLE MME PCE	1.072 (0.089) 1.069 (0.089) 0.955 (0.076)	1.025 (0.026) 1.026 (0.026) 0.968 (0.028)	1.015 (0.017) 1.016 (0.017) 0.973 (0.018)
50	MLE MME PCE	1.043 (0.047) 1.041 (0.047) 0.958 (0.044)	1.013 (0.015) 1.013 (0.015) 0.972 (0.017)	1.008(0.009) 1.009(0.009) 0.978 (0.011)
100	MLE MME PCE	1.022(0.021) 1.022(0.021) 0.968 (0.022)	1.006(0.007) 1.007(0.007) 0.980 (0.008)	1.004(0.005) 1.005(0.004) 0.985 (0.006)

تقدير α و λ عندما تكون كلاهما مجهولتان

نقدم فيما يلي تطبيقاً نتائج المقدرات الثلاث (PCE, MME, MLE) لكلا المعلمتين α و λ عندما تكوناغير معلومة Unknown. ان مقدر $\hat{\lambda}_{MLE}$ نحصل عليه بتطبيق طريقة النقطة الصامدة fixed point على المعادلتين (١٠) و (١١)، وان مقدر $\hat{\alpha}_{MLE}$ نحصل عليه من المعادلة (١٢)، ومقدر العزوم $\hat{\alpha}_{MME}$ نحصل عليه من حل المعادلة غير الخطية (١٦)، ومن ثم نحصل على $\hat{\lambda}_{MME}$ من المعادلة (١٩)، اما مقدرات PCE's فنحصل عليها من حل المعادلتين (٢٢) و(٢٥)، وقد اخذت حجوم عينات مختلفة هي (n = 15, 20, 30, 50, 100)، وقيم مختلفة الى α هي (α=0.2, 0.5, 1.0, 1.0, 2.0, 2.5) و عدّت (λ=1)، ومن خلال تراكيب مختلفه من (n, α) تم توليد عينات بحجم n من $GE(\alpha,1)$ ، ومن هذه العينات قدرتα و λ بالطرق المختلفه المشار اليها. واوضحت نتائج المحاكاة في الجدول (٣) والجدول (٤)، إذ تضمن الجدول (٣) معدل قيم $(\hat{\alpha}/\alpha)$ لكل طريقة، اما قيمة MSE'sفقد وضعت داخل قوسين. وتضمن الجدول رقم (٤) نتائج $\hat{\lambda}$ وكذلك معدل الخطأ داخل قوسين.

الجدول (٣) معدل المقدرات النسبي ومعدل متوسط مربعات الخطأ النسبي لـ α عندما λ غير معلومة

n	Method	α				
		0.2	0.5	1.0	2.0	2.5
١٥	MLE	1.145 (0.153)	1.180 (0.230)	1.237 (0.436)	1.339 (0.875)	1.356 (0.907)
	MME	1.622 (0.990)	1.396 (0.679)	1.384 (0.872)	1.456 (1.624)	1.465 (1.467)
	PCE	1.920 (0.670)	1.043 (0.416)	1.019 (0.420)	1.015 (0.508)	1.016 (0.637)
20	MLE	1.109 (0.103)	1.032 (0.140)	1.160 (0.198)	1.224 (0.353)	1.254 (0.423)
	MME	1.459 (0.654)	1.351 (0.449)	1.285 (0.476)	1.318 (1.675)	1.338 (0.971)
	PCE	1.213 (0.465)	1.009 (0.309)	0.987 (0.267)	0.990 (0.306)	0.974 (0.325)
30	MLE	1.056 (0.054)	1.084 (0.075)	1.054 (0.045)	1.077 (0.068)	1.082 (0.077)
	MME	1.305 (0.354)	1.218 (0.249)	1.112 (0.119)	1.123 (0.144)	1.125 (0.157)
	PCE	1.033 (0.315)	0.969 (0.206)	0.955 (0.115)	0.946 (0.111)	0.944 (0.113)
50	MLE	1.039 (0.029)	1.048 (0.038)	1.054 (0.045)	1.077 (0.068)	1.083 (0.078)
	MME	1.204 (0.199)	1.134 (0.131)	1.112 (0.117)	1.123 (0.145)	1.125 (0.156)
	PCE	0.983 (0.207)	0.949 (0.136)	0.955 (0.115)	0.946 (0.111)	0.944 (0.113)
100	MLE	1.019 (0.012)	1.022 (0.016)	1.027 (0.020)	1.035 (0.028)	1.038 (0.030)
	MME	1.107 (0.090)	1.065 (0.060)	1.056 (0.053)	1.059 (0.051)	1.061 (0.066)
	PCE	0.949 (0.120)	0.948 (0.078)	0.952 (0.063)	0.956 (0.060)	0.954 (0.061)

الجدول (4) معدل المقدرات النسبي ومعدل متوسط مربعات الخطأ النسبي لـ α عندما λ غير معلومة

n	Method	α				
		0.2	0.5	1.0	2.0	2.5
١٥	MLE	1.744 (3.035)	1.264 (0.455)	1.187 (0.223)	1.149 (0.148)	1.134 (0.136)
	MME	2.108 (6.065)	1.390 (0.716)	1.249 (0.315)	1.170 (0.195)	1.153 (0.173)
	PCE	1.218 (4.577)	0.946 (0.392)	0.926 (0.216)	0.928 (0.144)	0.925 (0.126)
20	MLE	1.520 (1.186)	1.132 (0.297)	1.160 (0.143)	1.222 (0.097)	1.244 (0.086)
	MME	1.730 (2.334)	1.306 (0.461)	1.178 (0.222)	1.139 (0.135)	1.114 (0.118)
	PCE	1.063 (1.107)	0.924 (0.281)	0.920 (0.163)	0.925 (0.104)	0.917 (0.096)
30	MLE	1.265 (0.477)	1.122 (0.142)	1.088 (0.083)	1.068 (0.056)	1.073 (0.059)
	MME	1.458 (0.936)	1.201 (0.249)	1.127 (0.129)	1.096 (0.082)	1.077 (0.074)
	PCE	0.962 (0.487)	0.913 (0.177)	0.919 (0.108)	0.937 (0.074)	0.931 (0.064)
50	MLE	1.137 (0.189)	1.075 (0.073)	1.053 (0.042)	1.044 (0.030)	1.047 (0.026)
	MME	1.268 (0.381)	1.126 (0.127)	1.063 (0.066)	1.057 (0.057)	1.057 (0.041)
	PCE	0.925 (0.259)	0.917 (0.110)	0.923 (0.068)	0.940 (0.044)	0.952 (0.030)
100	MLE	1.068 (0.062)	1.035 (0.030)	1.025 (0.019)	1.020 (0.014)	1.019 (0.012)
	MME	1.146 (0.143)	1.071 (0.054)	1.038 (0.033)	1.027 (0.022)	1.024 (0.020)
	PCE	0.916 (0.122)	0.936 (0.058)	0.948 (0.036)	0.968 (0.023)	0.960 (0.021)

يتضح من الجدولين (٣)، (٤) بالرغم من ان المعلمتين α و λ غير معلومة، لكن معدل التحيز ومعدل MSE's تتناقص كلما ازداد حجم العينة، وهذا مما يدعم خاصيه عدم التحيز التقاربي وخاصيه الاتساق للمقدرات. وقد لوحظ ان معدل التحيز ومعدل MSE's لكل من ($\hat{\alpha}/\alpha$) و ($\hat{\lambda}$) يعتمد على α.

ولجميع طرائق التقدير الثلاث فان متوسط مربعات الخطأ النسبي لـ ($\hat{\lambda}$) يتناقص كلما ازدادت α. ولواعتمدنا فقط على المقياس MSE's في التقييم نلاحظ انه بالنسبة لمقدر α عندما λ غير معلومة(الجدول ٣) كانت النتائج اكثر دقه من تلك الموضحة في الجدول (٤) والخاصةبـ $MSE(\hat{\lambda})$ عندما α معلومة، إذ كانت النتائج في الجدول (٣) اصغر من نظيراتها بالجدول (٤) لكن مقدرات λ's اكثر دقة لقيم α الكبيرة، ويلاحظ ان مقدرات PCE's لكل من $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\lambda}$ كانت هي الافضل مقارنه بمقدرات MLE، MME.

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

في ضوء ما تقدم اتضح لنا:

١ – ان المقدرات بطريقه الامكان الاعظم والعزوم لمعلمات التوزيع الاسي العام تتضمن تصغير دالة ذات بعد واحد، بينما طريقه نقاط التجزئة وطريقه المربعات الصغرى تتضمن تصغير ثنائي الابعاد.

٢ – تتطلب مقدرات العزوم MME's حل الدالة $\Psi(.)$ (لان المقدرات تعتمد عليها) لمجموعات مختلفة من النقاط وتحتاج الى مفكوك من نوع خاص.

٣ – وجد ان متوسط مربعات الخطأ للمعلمة α و λ تكون اصغر منها في طريقه PCE،مقارنه بتلك الناتجة من طريقه MLE و MME، وانها تتناقص بدرجه اكبر كلما ازدادت α، وان معدل تناقصها اكبر من تناقص MSE لمقدرات MLE، MME's.

٤ – اقتصر البحث على مقارنه ثلاث طرائق لتقدير معلمات التوزيع الأسي العام، وهو من التوزيعات المهمةالبديلة لتوزيع كاما وتوزيع ويبل والذي يعتمد في بحوث المعولية، وبحوث خطط عينات القبول، خاصه في التجارب التي يكون فيها الزمن المستغرق في الفحص لحين ظهور وحدات فاشلة، متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي العام $GE(\alpha, \lambda)$، ويمكن جدولة خطط عينات القبول المختلفة بعد تقدير α و λ.

التوصيات

١ – نوصي باستخدام طرائق تقدر اخرى مثل طرائق بيز والعزوم الخطية والمربعات الصغرى الاعتياديةوالموزونة لكي تكون المقارنة اوسع واشمل.

٢ – نوصي بتوسيع هذا التوزيع الى ثلاث معلمات بإدخال معلمة الموقع فضلا عن معلمة القياس ومعلمة الشكل، لان معلمة الموقع مهمه بالنسبة لنقطة تمركز البيانات على موقع معين.

٣ – نوصي باستخدام PCE'sبالنسبة للعينات الصغيرة في الحصول على مقدرات للمعلمات، بينما نستخدم MLE'sللعينات المتوسطة الحجم والكبيرة.

٤ – طريقة MMEتتطلب حسابات خاصة للدالة $\Psi(.)$ ، لذلك نوصي باستخدام PCE's بدلاً منها.

References

1- Aslam, M. &Shabaz, M. Q. (2007). "Economic Reliability Test Plans Using the Generalized Exponential Distribution", Journal of Statistics, Vol. 14, 52-59.
2- Gupta, R. D. &Kundu, D. (1999b). "Generalized Exponential Distribution: Statistical Inferences"; Technical Report, the University of New Brusnwick, Saint – John, NB, Canada.
3- Gupta R. D. &Kundu, D. (2004). "Discriminating Between Gamma and Generalized Exponential Distributions"; Journal of Statistical Computation and Simulation Vol. 74, No.2, 107-121.
4- Kundu, D. & Gupta, R. D. (2005), "Bayesian Estimation for the Generalized Exponential Distribution"; Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 127, 213-227.