------ مجلة علوم الرافدين، المجلد 17، العدد 1، ص95-102، 2006 ------

تركيب ممتد جذبي كهرومغناطيسي ودراسة خواصه

مؤيد عزيز العبيدي
قسم الفيزياء
كلية العلوم
جامعة الموصل

(تاريخ الاستلام 2002/8/17 ؛ تاريخ القبول 2002/9/15)

الملخص

يهدف هذا البحث الى تركيب ممتد جذبي كهرومغناطيسي وقد فعلنا ذلك باضافة الممتد القياسي ($g_{\mu\nu}$) إلى الممتد كهرومغناطيسي ($F_{\mu\nu}$) عكسي التناضر الصفري القطر فحصلنا على ممتد غير متغير بتأثير التحويل الاحداثي العام ولا يمتلك خاصية تناظرية محددة ويكون الخط الاولي له مماثلا للخط الاولي الجذبي ، ويؤول الى الممتد الكهرومغناطيسي في فضاء منكوفسكي (Mincowiski) .

The Composing of A Gravitational Electromagnetic Tensor and Study it's Properties

Muayad A.Al-Obaydi
Department of Physics
College of Science
Mosul University

ABSTRACT

The aim of this work is to compose a gravitational electromagnetic tensor. We did that by a adding the metric tensor ($g_{\mu\nu}$), which is diagonal, in to electromagnetic tensor ($F_{\mu\nu}$) which is antisymmetric with zero diagnoal. We get a tensor invariant under the covariant transformation. This tensor has no difind symmetric properties, it's line elements are similar to those of the metric tensor. It corresponds to the electromagnetic tensor in Mincowiski space.

المقدمة

تعد دراسات التلازم بين الهندسي والديناميكي التي اشرنا اليها في عمل سابق (Al-Obaydi, 2001) واحدة من الدراسات المهمة في الفيزياء الحديثة من حيث ان هذا التلازم موجود

ضمنا في الفيزياء الكلاسيكية والكمية والنسبية فقانون نيوتن الثاني ($F=m\partial^2x / \partial t^2$) وعلاقة لارمور (Larmor) $B = 2me\partial\theta / \partial t$ (Landau and Lifshits, 1975) في الفيزياء الكلاسيكية تشير الى تلازم الهندسي بالديناميكي كما تشير اليه تعريفات الاجراءات (Operators) المختلفة ($L_z = i\hbar\partial / \partial x$) و ($-P_x = i\hbar\partial/\partial x$) ومبدأ هايزنبرك ($\Delta P. \Delta x \geq \hbar$) في الفيزياء الكمية ومعادلات المجال الجذبي في النسبية العامة – التي سنتطرق اليها لاحقا - ، اذ يلاحظ في كل هذه العلاقات ترابط المتغيرات الديناميكية (L_z , B , F , P_x و $T_{\mu\nu}$) بالمتغيرات الاحداثية (الهندسية) ($\partial^2x / \partial t^2$ و $\partial\theta / \partial t$ و $\partial / \partial x$ و Δx و $g_{\mu\nu}$) .

وان هذا التلازم يقودنا الى تلازم الطاقة بالزمن في النسبية العامة وفي النظرية الكمية . وبسبب من تلازم هذه المتغيرات نشأ ما يعرف اليوم بالكم الجذبي (Quantum gravity) . الذي يلعب اليوم دورا مهما في دراسة الكون المبكر (Ford, 1987) و (Yajnik, 1990) وخلق الجسيمات في المجالات الجذبية الشديدة (Parker, 1987), (Sahni, 1988) و (Al-Obaydi, 1995) .

واذا ما كان الهندسي يعبر عنه بالممتد القياسي $g_{\mu\nu}$ والديناميكي بممتد الطاقة زخم $T_{\mu\nu}$ فان هـذا يطرح امكانية ربط الهندسي بالديناميكي الكهرومغناطيسي الذي يعبر عنه الممتد الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$. خصوصا وان محاولات اخرى قد جرت لربط الكتلة والشحنة بهندسة فايـل Wayle (Shartleff, 1978) وهذا الربط من شأنه ان يقدم مفتاحا جديدا لربط المجالين الجذبي والكهرومغناطيسي .

1- الصياغة الكلاسيكية لمعادلات المجال الكهرومغناطيسي :

تقوم الصياغة الكلاسيكية للمجال الكهرومغناطيسي على معادلات ماكسويل المعروفة والتي هـي (Sakurai, 1967) .

$$\nabla.\overline{E}=\rho \qquad (1,a)$$

$$\nabla x\overline{B}=J \qquad (1,b)$$

$$\nabla.\overline{B}=0 \qquad (1,c)$$

$$\nabla x\overline{E}=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1,d)$$

حيث ($\overline{E}$) متجه المجال الكهرومغناطيسي و ($\overline{B}$) متجه المجال المغناطيسي ، و (J) متجه التيار و (ρ) الشحنة الكهربائية و (c) سرعة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية – سرعة الضوء - .

وهي كما معروف تقوم على رياضيات المتجهات في فضاء اقليدي ثلاثي الابعاد . ويمثل الزمن متغيرا مستقلا تحدد بواسطته تغيرات المجالات . ويستعان في وصف المجال بمتجه آخـر هـو الجهـد الاتجاهي (A) المرتبط بمتجه المجال المغناطيسي ($\overline{B}$) بحسب :

$$B = \nabla x A \qquad (2)$$

وبالاستعانة بالمجال المقداري (ϕ) وبمعادلة الاستمرارية (Continuity eq.)

$$\nabla.J+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

يمكن الحصول على وصف لمتجه المجال الكهربائي :

$$E=-\nabla\phi-\frac{\partial A}{\partial t} \qquad (4)$$

كما يمكن الحصول من المعادلة الاستمرارية (3) والمعادلة (1,b) على العلاقة :

$$\nabla xB=J+\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (5)$$

التي هي تعميم للمعادلة (1,b) بوجود الوسط الناقل للشحنة.

2- الصياغة النسبوية للمجال الكهرومغناطيسي :

تقوم هذه الصياغة على استخدام ممتد (tensor) من الدرجة الثانية في فضاء رباعي مسطح هو (Fμν) حيث (μ,ν) رموز تأخذ الارقام (0 ، 1 ، 2 ، 3) التي تصف النظام الاحداثي الرباعي (z , y , x , t) والذي يكتب فيه (X_o = ct) و (X_1 = x) و (X_2 = y) و (X_3 = z) ويستخدم في بعض المؤلفات (X_4) والذي هو (ix_o) أو (ict) .

كما يستخدم في هذا الوصف متجه التيار الرباعي (Jμ) المكون من المركبة الزمانية (J_o) المساوية لـ (ρ) وثلاث مركبات مكانية J_k (k = 1,2,3) ، ويكتب على شكل :

$$J_\mu=(\rho\ ,\ J_k) \qquad (6)$$

ويعرف الممتد الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$: (Landau and Lifshitz, 1975)

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_1 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

وهنا يمكن الحصول على الزوج الاول من معادلات ماكسويل (1.a) و (1.b) من المعادلة :

$$F_{\mu\nu\ ,\ \nu}=J_\mu \qquad (8)$$

عند تعويض عناصر الممتد $F_{\mu\nu}$ فيها . حيث تعني الفارزة (,) عملية التفاضل ($F_{\mu\nu\ ,\ \nu}=\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu$) ونحصل على الزوج الثاني من معادلات ماكسويل (1.c) و (1.d) من المعادلة (Sakurai, 1967).

$$F_{\mu\nu\ ,\ \lambda}+F_{\nu\lambda\ ,\ \mu}+F_{\lambda\mu\ ,\ \nu}=0 \qquad (9)$$

حيث تعرف ($F_{\lambda\mu}$) اعتمادا على متجه الجهد A :

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (10)$$

أو عند تعويض العناصر المكانية من $F_{\mu\nu}$ ثم أخذ احد الرموز مساويا (0) أي μ= 0 (Misner et al., 1973).

يجب ملاحظة ان تكرار الرمز ν أو μ أو λ حيثما وجد يعني وجـود عمليـة جمـع (Σ) للرمـز المتكرر من (0) إلى (3) .

3- الممتد القياسي (Metric tensor) والمجال الجذبي :

يعتمد وصف المجال الجذبي في النظرية النسبية على الممتد القياسي ($g_{\mu\nu}$) المتناظر القطري الـذي يعرف :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{oo} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

والذي يصف هندسة الزمكان (Space time) وتعتمد عناصره الاربعة غير الصفرية على النمـوذج الكوني لحل معادلات المجال المعروفة بمعادلات اينشتاين غير الحاوية على الثابت الكوني (Weinberg, 1972) .

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \qquad (12)$$

أو

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \qquad (13)$$

حيث تصف المعادلة (12) كونا فارغا بينما تصف (13) كونا غير فارغ ويمثل الممتد ($R_{\mu\nu}$) ممتـد التحدب الذي هو عبارة عن التفاضل الثاني اللامتغير (Covariant) للممتد القياسي ($g_{\mu\nu}$) و (R) مقدار التحدب و ($T_{\mu\nu}$) ممتد الزخم – الطاقة (energy-momentum tensor) و (G) ثابت الجاذبية وعادة يكتب الثابت (K) بدلا من ($-8\pi G/c^2$) .

4- الممتد الجذبي الكهرومغناطيسي:

نبين اولا ان ما يمكن ملاحظته من تأمل ممتدي المجال الكهرومغناطيـسي والمجـال الجـذبي ان عناصر قطر الممتد الكهرومغناطيسي تساوي صفر بينما عناصر الممتد القياسي هـي وحـدها التـي لا تساوي صفرا كما ان عناصر الممتد الكهرومغناطيسي تمثل متغيرات ديناميكية هـي مركبـات متجهـي المجال المغناطيسي والمجال الكهربائي بينما تمثل عناصر الممتد القياسي متغيرات احداثية تصف هندسـة الفضاء . وهو ما يعني ان تركيب ممتد منهما سيعني تلازم الهندسي بالديناميكي . وهو تلازم قائم ضـمنا في قوانين اساسية في الفيزياء كما اشرنا في المقدمة .

ومن ثم فان تركيب الممتد الكهرومغناطيسي الجذبي انما هو محاولة لايجـاد علاقـة جديـدة بـين الهندسي ($g_{\mu\nu}$) والديناميكي ($F_{\mu\nu}$) . كما ان تركيب الممتد الكهرومغناطيسي الجذبي يمثل محاولة لـربط الشحنة بالكتلة في علاقة رياضية وهي محاولة قام بها باحثون آخرون في الايام الاولى من عمر النـسبية العامة (Reissner, 1916) و (Nordstrom, 1965) حيث قاما بحل مسألة الزمكان المتولـد عـن كتلـة كروية مشحونة . وتبعهم (Newman et al., 1965) وحيث وجد حل الممتد القياسي خارج كتلة مـشحونة تبرم (Spinning Lindquist).

ووصف (Boyer and Lindqist, 1967) الحل بدلالة الاحداثيات . وفي الاتجاه نفسه يقـع عمـل Kerr-Newman حول ثقب اسود ناتج عن انهيار جسم دوار ذي شحنة وتيارات كهربائية الذي اشار اليه (Misner et al., 1973) وكذلك نظرية (Shurtleff, 1978) التي تصف الشحنة والكتلة وصـفا هندسـيا يعتمد هندسة فايل (Wayle). وبخلاف كل المحاولات التي اشرنا اليها يعتمد عملنا على تركيـب ممتـد يحتوي عناصر ديناميكية وهندسية ويربط الشحنة والتيار معبراً عنهما بواسطة (E و B) والكتلة معبـراً عنها بواسطة $g_{\mu\nu}$ التي تفصح بالتفاضل الثاني عن التحدب الذي يدل على وجود الكتلة بحسب معـادلات اينشتاين .

ويقوم التركيب باضافة العناصر القطرية في $g_{\mu\nu}$ في القطر الصفري إلى $F_{\mu\nu}$ مـن خـلال جمـع الممتدتين $g_{\mu\nu}$ و $F_{\mu\nu}$ وتكوين الممتد $U_{\mu\nu}$ والذي هو :

$$U_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \qquad (14)$$

وباستخدام (11) و (7) في (14) نحصل على الممتد المركب $U_{\mu\nu}$:

$$U_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{oo} & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & g_{11} & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & g_{22} & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & g_{33} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

5- خواص الممتد الكهرومغناطيسي الجذبي :

أ – اللاتغير بتأثير التحويل الاحداثي العام Covariant trasformat للتأكد من ان الممتد الناتج عن جمـع الممتدين $g_{\mu\nu}$ و $F_{\mu\nu}$ لا يتأثر بالتحويل الاحداثي العام سنجري عليه التحويل الاحداثي العام. اعتمادا علـى معادلة (14) :

$$U_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}$$

وعليه فانه وفقا للتحويل العام (Narlikar, 1979) :

$$\overline{U}_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \overline{x}_\mu} \cdot \frac{\partial x\sigma}{\partial \overline{x}\nu} F_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x_\lambda}{\partial \overline{x}_\mu} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \overline{x}_\nu} g_{\lambda\sigma}$$

$$= \frac{\partial x_\lambda}{\partial \overline{x}_\mu} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \overline{x}_\nu} \left(F_{\lambda\sigma} + g_{\lambda\sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial x_{\lambda}}{\partial \overline{x}_{\mu}} \cdot \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial \overline{x}_{\nu}} U_{\lambda\sigma} \qquad (16)$$

ان معادلة (16) تعني ان $U_{\mu\nu}$ لا يتغير بتأثير التحويل الاحداثي العام .

ب- الخواص التناظرية :

بحسب المعادلة (7) تكون الخواص التناظرية للمتدد $F_{\mu\nu}$ هي :

$$F_{\mu\nu} = - F_{\nu\mu} \qquad (17)$$

وبحسب المعادلة (11) تكون الخواص التناظرية للممتد $g_{\mu\nu}$ هي :

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad (18)$$

ومن ثم فان الخاصية التناظرية للممتد المركب $U_{\mu\nu}$ هي وكما يتضح من معادلة (15) هي :

$$U_{\mu\nu} = - U_{\nu\mu} \qquad (19)$$

لكل $(\mu \neq \nu)$ و

$$U_{\mu\nu} = U_{\nu\mu} \qquad (20)$$

لكل $(\mu = \nu)$ وتعبر عن الخواص التناظرية للممتد.

وعليه فان الممتد $U_{\mu\nu}$ ليس عكسي التناظر (Antisymmetric) وهو ليس متناظرا (Symmetric).

ج – الخط الاولي (Line element) للمتد $U_{\mu\nu}$:

يعرف الخط الاولي للممتد المعين $(A_{\mu\nu})$ بحسب العلاقة :

$$ds^2 = A_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} \qquad (21)$$

ومن ثم فان الخط الاولي للممتد المركب هو :

$$ds^2 = U_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} \qquad (22)$$

وعند تطبيق حل المعادلة (22) بالاعتماد على عناصر $U_{\mu\nu}$ المبينة في معادلة (15) وكما موضح في الملحق (1) نحصل على :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} \qquad (23)$$

وهي معادلة الخط الاولي في الفضاءات الجذبية . وهو ما يعني ان عناصر المجـالات الكهربائيـة والمغناطيسية ليس لها تأثير على الفضاء .

د – الممتد الجذبي الكهرومغناطيسي في فضاء مسطح:

في هذه الفقرة سنبحث في الشروط التي يؤول فيها الممتد المركب $U_{\mu\nu}$ إلى الممتد الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$ فنحصل منه على معادلات ماكسويل .

لقد اشرنا في فقرة (2) من هذا البحث إلى انه بالامكان الحصول على معادلات ماكسويل (1.a و 1.b) من الممتد $F_{\mu\nu}$ باستخدام المعادلة (8) ونحصل على معادلات ماكسويل (1.c و 1.d) من المعادلة (9) والآن اذا اخذنا ($U_{\mu\nu,\nu}$) فاننا نحصل من المعادلة (14) على :

$$U_{\mu\nu,\nu} = F_{\mu\nu,\nu} + g_{\mu\nu,\nu}$$

وباستخدام معادلة (8) نحصل على :

$$U_{\mu\nu,\nu} = J_{\mu} + g_{\mu\nu,\nu} \qquad (24)$$

ومن ثم فان $U_{\mu\nu,\nu}$ سيعطي نفس نتائج $F_{\mu\nu,\nu}$ عند الشرط ($g_{\mu\nu,\nu} = 0$) إذ عندها ستكون معادلة (24) بالشكل :

$$U_{\mu\nu,\nu} = J_{\mu} \qquad (25)$$

وهذا معناه ان $U_{\mu\nu}$ يؤول إلى $F_{\mu\nu}$ إذا ما كانت $g_{\mu\nu}$ غير معتمدة على أي من المتغيرات الاحداثية (x^{ν}) . ومعروف ان هذه المعادلة لا تتحقق الا في الفضاء المسطح حيث تكون عناصر $g_{\mu\nu}$ مساوية (1) للعنصر الزماني g_{oo} وتكون مساوية (-1) للعناصر المكانية(g_{11} , g_{22} , g_{33}).

وعليه فان $U_{\mu\nu}$ يؤول إلى $F_{\mu\nu}$ في فضاء منكوفسكي (Mincowiski) فنحصل على معادلات ماكسويل (1.a) و (1.b) أي عندما نتعامل مع الشحنة بغياب الكتلة .

الاستنتاجات ومناقشتها

نستنتج مما قمنا به انه بالامكان تركيب ممتد جذبي (هندسي) كهرومغناطيسي من جمع الممتد القطري ($g_{\mu\nu}$) الذي يصف هندسة الفضاء مع الممتد الكهرومغناطيسي ذات القطر الصفري . وان الممتد الناتج هو ممتد غير متغير بتأثير التحويلات العامة . وان هندسة الفضاء تبقى معتمدة على عناصر الممتد القياسي على الرغم من وجود العناصر الكهربائية والمغناطيسية . كما ان هذا الممتد يمكن ان يعطي معادلات ماكسويل اذا تعاملنا مع هندسة فضاء مسطح .

وتشير هذه النتائج إلى امكانية بحث توحيد المجالين الكهرومغناطيسي والجذبي باستخدام الممتدات الواصفة للمجالين . كما تفتح افاقا لاعمال مستقبلية تربط بين الكتلة والشحنة عند تخصيص عناصر الممتدات بتلك التي تعطينا كميات فيزيائية مقدارية أي تلك الخاصة بالاحداثيات الزمنية الخالصة (U_{oo}) و g_{oo} وتلك التي يكون فيها الزمن مزدوجا مع المكان مثل U_{o1} و U_{o2} و U_{o3} ومعكوساتها U_{1o} و U_{2o} و U_{3o} .

المصادر الاجنبية

Al-Obaydi, M.A., 2001. Time Quartization, MSc.Thesis University of Mosul (in Arabic with English Abstract).

Al-Obaydi, M.A., 1995. Particle Greation by Strong Gravitational Field. MSc. Thesis University of Mosul.

Boyer, R.H. and Lindquist, R.W., 1967. Maximal analytic extension of the Kerr metric J. Math. Phys. 8, 263 p.

Ford, L.H., 1987. Gravitational Particle Creation and Inflation, Phys. Rev. D 35(20):pp. 2955-2960.

Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1975. The classical theory of fields, pergamon press. : 107 p.

Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A., 1973. Gravitation, Freeman.

Narlikar, J.V., 1979. General Relativity and Cosmology the Mecmillan Press Ltd, 16 p.

Newman, E.T., Couch, E., Chnnapared, K., Exton, A., Prakash, A. and Torrence, R., 1965. Metric of rotating charged mass, J. Math. Phys., 6, pp.918-919.

Nordstrom, G., 1918. (On the energy of the gravitational field in Einsteins theory Proc. Kon. Ned. Akad. Wer. 20, 1238 (cited by Morlikar 1978. [in Einstein's theory].

Parker, L., 1987. Gravitational Particle Production in the Formation of Cosmic String, Phys. Rev. Lett. 59(12): pp.1369-1372.

Reissner, H., 1916. Ann. Phys. (Germany), 50, 106 (sited by Narlikar 1979).

Sahni, V., 1988. Particle Creation by Cosmic Strings, Mod. Phys. Lett. A. 3(15): pp.1425-1429. (Cited by Al-Obaydi, 1995).

Sakurai, J., 1967. Advanced Quantum Mechanics, Addision wesly publishing comp. Inc.

Shurtleff, R., 1978. A Geometric Theory of Charge and Mass. J. Math. Phys. 19(3): pp.613-618.

Weinberg, S., 1972. Gravitation and cosmology John Wiley and Sons, Inc. pp.151-155.

Yanik, U.A., 1990. Gravitational Patticle Production in Inflation, Phys. Lett. B, 234(3): pp.271-275.