المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (8) 2005
ص ص [120–139]

عض طرا ئق ت شخ يص ا ل نموذج ا لمخ ت لطط (1 , 1) ARMA والخصائص الاحتمالية له عندما تتبع الاخطاء العشوائية توزيع بواسون

منعم عزيز محمد* فؤاد عبده اسماعيل**

الملخص

ان اغلب السلاسل الزمنية التي تظهر في كثير من الظواهر الاقتصادية والطبيعية تكون مولدة من اخطاء عشوائية غير طبيعية (a_t) ولذلك فان الهدف من هذا البحث هو دراسة بعض الخصائص الاحتمالية للنموذج المختلط ARMA(1,1) الطبيعية وغير الطبيعية وبعض طرائق التشخيص لهذا النموذج وذلك باشتقاق الدالة المميزة والعزوم الاربعة الاولى ومعاملي الالتواء والتفرطح للنموذج المختلط المدروس وذلك عندما تتبع الاخطاء العشوائية (a_t) التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون. وتم استخدام المحاكاة للتاكد من دقة النتائج النظرية، كما تم التطرائق الى بعض طرائق التشخيص لهذا النموذج والتي شملت دالة الارتباط الذاتي الموسعة للعينة (ESACF) وطريقة Kumer (C-table) المعتمدة على تقريب Pade وتم اقتراح طريقة من قبل الباحث تعتمد على دالة الارتباط الذاتي الجزئي الموسعة للعينة (ESPACF) ايضا حيث تم التاكد من كفاءة الطريقة المقترحة.

*استاذ مساعد/كلية الادارة والاقتصاد/ الجامعة المستنصرية
**مدرس

تاريخ التسلم : 2005/ 3/15 ——————— تاريخ القبول : 2005/ 6/13

Some Identification Methods of Mixed Model ARMA(1,1) and its Probabilistics Properties when Detetcting Random Error belong to Poisson Distribution

ABSTRACT

Most of the time series that appear in many economical geophysical and otherphenomenas are driven by non-Gaussian random error (a_t), so the aim of this paper is to investigate some of the probabilistic properties of Gaussian and non-Gaussian mixed model ARMA(1,1), and the identification methods of this model.

The researchers have theoretically derived the characteristic function the first four moments and the skeweness and Kurtosis coeficients for (a_t) for Gaussian distribution and non-Gaussian distribution (poisson) and simulation experiment were used to confirm the accuracy of the theoretical results, We have also declared the identification sample autocorrelation function (ESACF) and (Kumar) method (c-table) depending upon the pade approximation and we have suggested a method depending upon the extended sample partial autocorrelation function (ESPACF) to ascertain the efficiency of suggested method.

1-1 المقدمة :

يعتبر موضوع دراسة السلاسل الزمنية من المواضيع المهمة وخاصة في تحليل سلوك الظواهر المختلفة وتفسيرها وذلك من خلال دراسة وتحليل تطورها التأريخي عبر فترات زمنية مختلفة بهدف التنبؤ المستقبلي لهذه الظواهر باقل خطأ ممكن.

تعتمد النماذج الاحصائية للسلسلة الزمنية بالدرجة الاولى على طبيعة الظاهرة المدروسة ومن خلال اعتماد الاساليب الاحصائية المتقدمة يمكن التوصل الى الصيغ الدقيقة لمثل هذه الظواهر وخاصة بعد التطور الكبير في الحاسبات الالكترونية، وكذلك فأن الاساليب الاحصائية هي الاخرى اختلفت بدءاً من عام 1970 عندما وضع (Box & Jenkens) طرائق التنبؤ اذ تم استخدام هذه الاساليب في السلاسل الزمنية الموسمية وغير الموسمية سواء المستقرة منها او

غير المستقرة مما اسهمت هذه الطرائق في جعل النماذج المختلطة (ARMA) الاكثر اعتماداً وتطبيقاً للظواهر المدروسة سواء كان النموذج يتبع التوزيع الطبيعي او غير الطبيعي بعد ان تبين ان توزيع الخطأ في هذه النماذج ليس بالضرورة ان يتبع التوزيع الطبيعي (Nelson and Granger)عام 1979.

ومن هنا سوف نوضح في هذه الدراسة بعض الخصائص الاحتمالية للنموذج المختلط ARMA (1,1) عندما تتبع الاخطاء العشوائية توزيع بواسون.

1-2 الهدف من الدراسة :

تقديم طريقة مقترحة لتشخيص رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) بالمقارنة مع بعض الطرائق المهمة و للتعرف على بعض الخصائص الاحتمالية للنموذج المختلط ARMA (1,1) عندما تتبع الاخطاء العشوائية توزيع بواسون مقارنة بالتوزيع الطبيعي لهذه الاخطاء.

1-3 الدراسات السابقة

لقد حظيت نماذج السلاسل الزمنية باهتمام كبير من قبل الباحثين سواء على المستوى النظري او التطبيقي وخاصة النماذج المختلطة ARMA الطبيعية وغير الطبيعية وهنا سوف نركز اهتمامنا على بعض الدراسات للتوزيعات غير الطبيعية، ففي عام 1979 قدم كل من (Nelson and Granqer) [4] بحثا لمجموعة سلاسل زمنية وجد ان هناك (15) سلسلة زمنية من اصل (21) سلسلة هي لا تتبع التوزيع الطبيعي وفي عام 1982 توصل الباحث Andel [2] الى ان بعض السلاسل الزمنية تتبع الاخطاء فيها بعض التوزيعات غير الطبيعية مثل توزيع لابلاس (Laplace) وتوزيع كوشي (Cauchy) او التوزيع المنتظم بعد استخدامه للدالة المميزة لهذه التوزيعات وفي عام 1987 قام الباحث Sim [5] بدراسة النموذج ARMA(1,1)بمتغيرات تتبع توزيع كاما وتم تطبيق ذلك على بيانات حقيقية لسلسلة زمنية من الفيضانات في ماليزيا.

في عام 1991 درس الباحثان (Swift & Janacek) [7] التنبؤ للسلاسل الزمنية غير الطبيعية اذ اعتمد في الدراسة على اسلوب ARMA لـ (B & J) واستخدم

اسلوب التحويل للسلسلة غير الطبيعية (Yt) بدلالة دالة اخـرى تتبـع التوزيـع الطبيعي $T_{(Z_t)}$ وتم استخدام اسلوب المحاكاة لاعتماد كفاءة النموذج.

وفي عام 1994 قدم الباحثان (Sofia & Thanoon) [6] اشتقاق دالـة الكثافـة الاحتمالية لبعض نماذج الوسط المتحرك للرتـب الـدنيا (1) MA , MA (2) الخطية وغير الخطية عندما تتبع الاخطاء العشوائية التوزيع المنتظم.

وفي عام 1997 تمكن الباحثان (AL – Nasir & Jaafar) [1] من التوصل الى صيغة عامة لايجاد عزوم السلسلة الزمنية لعملية الوسط المتحرك من الرتب الدنيا باخطاء عشوائية طبيعية وغير طبيعية وفي عام 2001 قام الباحث (سهيل) [10] بدراسة الالتواء والتفرطح لنموذج الوسط المتحـرك (2) MA الطبيعـي وغيـر الطبيعي باستخدام المحاكاة وفي العام نفسه قام الباحث العـزاوي بدراسـة بعـض خصائص النموذج المختلط (1 , 1) ARMA الطبيعي وغير الطبيعي بشكل عام.

1-4 الجانب النظري:

لتكن $\{X_t\ ;\ t = 0 , \mp 1, \mp 2 , ...\}$ تمثل سلسلة زمنية مستقرة احادية المتغير لذلك تكون صيغة النموذج المختلط ARMA كالاتي :

$$X_t - \phi_1\, X_{t-1} - \phi_2\, X_{t-2} - ... - \phi_p\, X_{t-p} = a_t - \theta_1\, a_{t-1} - \theta_2\, a_{t-2} - ... - \theta_q\, a_{t-q} \ .... \ (1)$$

حيث $X_t = \widetilde{X} - \mu$ لكل قيم μ , t وهو متوسط السلسلة الزمنية ، $\{a_t\}$ هي سلسلة الاخطاء العشوائية المستقلة ذات توزيع متطابق بمتوسط صفر وتباين ثابـت σ_a^2 .

وباستخدام معامل الازاحة الخلفـي (Backward Shift operatore) نحصـل على:

$$\phi\ (B) X_t = \theta\ (\ B)_{at} \qquad , \qquad \phi\ (B) = (\ 1 - \phi_1\, B - \phi_2\ B^2 - .... - \phi_P\ B^p\ )$$

عندما $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2\, B^2 - .... - \theta_q\, B^q\ )$

وعلى هذا الاساس فان ARMA (p, q) يكون طبيعيـاً (Gaussian) اذا كـان توزيع الخطأ العشوائي a_t طبيعي ويكـون النمـوذج غيـر طبيعـي (Non – Gaussian) اذا كان a_t ذا توزيع غير طبيعي.

ولتحقيق شرطي الاستقرارية والانعكاسية للنموذج ARMA (p, q) عندما تقع جذور المعادلتين $\phi(B)=0$, $\theta(B)=0$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحدا.(Outside of Unit Circle)

ويمكن كتابة النموذج المختلط ARMA (p, q) بصيغة الانحدار الذاتي AR كالاتي:

$$\Pi(B)\,X_t = a_t \;............\;(2)\;,\quad where\quad \Pi(B)=\frac{\phi(B)}{\theta(B)}$$

وبالتعويض على $\Pi(B)$ في المعادلة (2) نحصل على :

$$X_t = \sum_{I=1}^{\infty}\Pi_j\;X_{t-j} + a_t \;............................\;(3)$$

وبنفس الاسلوب يمكن التعبير عن النموذج ARMA (p, q) بصيغة الوسط المتحرك MA لنحصل على ما ياتي:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\;a_{t-j}\;\;,\;\psi_0 = 1 \;.................\;(4)$$

عندما Π_j , ψ_j يمثلان الاوزان.

1-5 : النموذج المختلط من الدرجة الاولى ARMA (1,1) للتوزيع الطبيعي

بالتعويض عن p = 1 q=1 في الصيغة العامة (1) نحصل على ARMA (1,1) كما ياتي :

$$X_t - \phi_1\,X_{t-1} = a_t - \theta_1\,a_{t-1}\;\;.................\;\;(5)$$

وباستخدام معامل الازاحة (B) نحصل على الصيغة الاتية:

$$\phi(B)\,X_t = \theta(B)\,at$$

عندما

$$\phi(B) = (1-\phi_1\,B)$$
$$\theta(B) = (1-\theta_1\,B)$$

a_t تمثل الاخطاء العشوائية تشويش ابيض (White – noise) ذات توزيع طبيعي حيث ان

$$a_t \sim N(0\,,\sigma_a^2)$$

وكذلك يمكن كتابة النموذج ARMA (1,1) بصيغة الوسط المتحرك كما ياتي :

$$X_t = (1-\phi B)^{-1} \; (1-\theta_1 \; B)_{a_t}$$

$$or \;\; X_t = \psi\,(B)_{at} \quad where \quad \psi\,(B) = \frac{(1-\theta_1\;B)}{(1-\phi_1\;B)}$$

$$or \;\; (1-\phi_1\;B)\,(1+\psi_1\;B+\psi_2\;B^2+........) = (1-\theta_1 B)$$

ومنها نحصل على ما ياتي:

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}\;(\phi_1-\theta_1)\;,\; j \ge 1 \;..................\; (6)$$

وعليه ياخذ النموذج المختلط ARMA (1,1) الصيغة التالية :

$$X_t = a_t + (\phi_1-\theta_1)\sum_{j=1}^{\infty}\phi_1^{j-1}\;a_{t-j} \;..................\; (7)$$

وبنفس الاسلوب يمكن كتابة النموذج (1,1) ARMA بصيغة الانحدار الذاتي حيث ان:

$$a_t = X_t + (\phi_1-\theta_1)\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{j-1}\;X_{t-j} \qquad j \ge 1 \;\;...................\; (8)$$

1−6 : الطريقة المقترحة لتشخيص رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) :

من المعروف ان هنالك عدة طرائق اعتمدت لتشخيص رتبة النماذج المختلطة ARMA (p,q) ومن افضل هذه الطرائق هي طريقة (دالـــة الارتبـــاط الـــذاتي الموسعة للعينة) (ESACF) التي اقترحها كل من Tsay و Tiao عـــام 1984 [9] اذ تعتمد هذه الطريقة على المقدرات المستقلة لطريقة المربعـــات الصـــغرى الاعتيادية (OLS) لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة P.

$$Z_t = \sum_{L=1}^{p}\phi_{L(P)}^{(0)} \quad Z_{t-L} + e_{P,t}^{(0)} \;\; ; \; t = p+1, ..., n \qquad .... \;\; (9)$$

حيث Z_t تمثل السلسلة الزمنية لـــ n من المشاهدات وتتبع نمـــوذج ARMA (p,q) .

(0) : تمثل الانحدار الاعتيادي .

P : تمثل رتبة النموذج .

$e_{p,t}^{(0)}$: يمثل الخطأ العشوائي في النموذج.

اما الطريقة الاخرى التي استخدمت في تشخيص رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) فهي الطريقة التي جاء بها (Kuldeep Kumar) عام 1987 [8] حيث اعتمدت هذه الطريقة على اسلوب التقريب (Pade) لايجاد نماذج ARMA (1,1) المقدرة بصيغة الانحدار الذاتي او بصيغة الوسط المتحرك . وان هذه الطريقة عرضت قيم p,q في الجدول (c) .

{ c (p,q) : p,q = 0,1,2,..} ولذلك يتم استخدام (الجدول – c) لغرض تشخيص رتبة النماذج المختلطة ARMA (p,q).

اما الطريقة المقترحة في هذه الدراسة فهي تعتمد في حقيقتها على توسيع دالة الارتباط الذاتي الجزئي للعينة وذلك باستخدام الصيغة الاتية:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \hat{\rho}_1 & if \quad K = 1 \\ \dfrac{\hat{\rho}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \quad \hat{\rho}_{k,j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \quad \hat{\rho}_j} & if \quad k = 2,3,.. \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{and} \quad \hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} * \hat{\phi}_{k-1,k-j} \qquad for\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

ويمكن تعريف الدالة الموسعة للارتباط الذاتي الجزئي للعينة للسلسلة (Z_t) (ESPACF) بصورة عامة ولاي عدد صحيح موجب (m) كما ياتي :

$$\hat{\phi}_j\ (m) = \hat{\phi}_j\ (W_{m,t}\ (j)) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

حيث ان :

$$W_{m,t}\ (j) \quad = \quad Z_t - \sum_{L=1}^{m} \hat{\phi}_{L(M)}\ (j)\ Z_{t-L}$$

فاذا كان النموذج الحقيقي هو ARMA من الرتبة (p,q) فأن $W_{m,t}\ (j)$ تتبع نموذج (AR) من الرتبة P ، لان

$$\hat{\phi}_j\ (m) = 0 \quad for \quad m \geq p\ ,\ j \geq q \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$
$$\neq 0 \quad o.w.$$

وبالاعتماد على هذه الخاصية في طريقة (ESPACF) يمكن تشخيص النموذج المختلط ARMA (1,1) للسلسلة الزمنية (Z_t) ، حيث يتم ذلك بترتيب $\hat{\phi}_1(m)$ في جدول ذي اتجاهين وترقم الصفوف من (0,1,2,…) الى رتبة (AR) المعنوية كما ترقم الاعمدة بنفس الاسلوب الى رتبة (MA) كما هو موضح في الجدول التالي :

m \ j	0	1	2	3	4	…
0	$\hat{\phi}_1^{(0)}$	$\hat{\phi}_2^{(0)}$	$\hat{\phi}_3^{(0)}$	....		
1	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_2^{(1)}$	$\hat{\phi}_3^{(1)}$	....		
2	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_2^{(2)}$	$\hat{\phi}_3^{(2)}$	....		
3	..	.	.			
4	.	.	.			
.	.	.	.			

وبافتراض ان السلسلة الزمنية (Z_t) مولدة من النموذج ARMA (p,q) فنحصل على :

$$\hat{\phi}_j(m) = 0 \quad for \quad m \qquad \text{غير معنوية}$$

$$= X \quad o.w. \qquad \text{ذات معنوية احصائية}$$

وهنا نعطي الرمز (x) اشارة الى القيم التي تكون اكبر او اقل من (2 ±) انحرافات معيارية ويعطي الصفر الى القيم الواقعة بينهما.

7-1 : الدالة المميزة للسلسلة الزمنية (X_t)

1-7-1:الدالة المميزة للسلسلة (X_t) بدلالة الدالة المميزة للاخطاء a_t عندما $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$.

اذا كانت الاخطاء العشوائية a_t تتبع التوزيع الطبيعي فأنه بالامكان اشـتقاق الدالة المميزة للسلسلة الزمنية (X_t) بدلالة الدالة المميزة للاخطاء a_t من خـلال الاستفادة من الصيغة العامة (4) وكما ياتي :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, a_{t-j}$$

وعليه فان الدالة المميزة للسلسلة الزمنية (X_t) هي :

$$\Phi_x(s) = E\{\exp(isx_t)\} \qquad where \quad i = \sqrt{-1}$$

وبما ان الاخطاء مستقلة بعضها عن البعض الاخر فان :

$$\Phi_x(s) = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_a(s)$$

وحيث ان الدالة المميزة للاخطاء a_t هي :

$$\Phi_a(s) = \exp\left(\frac{-1}{2} S^2 \ \sigma_a^2\right)$$

وعليه فأن :

$$\Phi_x(s) = \prod_{j=0}^{\infty} \exp\left\{\frac{-1}{2} S^2 \sigma_a^2 \psi_j^2\right\} \text{ ....(13)}$$

وعليه يمكن كتابة الدالة المميزة للنموذج ARMA (1,1) كما ياتي :

$$\Phi_x(S) = \exp\left(\frac{-1}{2} S^2 \sigma_a^2\right) \prod_{j=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-1}{2} \sigma_a^2 (\phi_1 - \theta_1)^2 \phi^{2(j-1)} S^2\right] \text{ .... (14)}$$

2-7-1 : الدالة المميزة للسلسلة (X_t) عندما a_t تتبع توزيع بواســون $P_0(\lambda)$

اي $a_t \sim p_0(\lambda)$:

اذا كانت الاخطاء العشوائية a_t تتبع توزيع بواسون $a_t \sim p_0(\lambda)$

(Poisson dist.) بالمعلمة λ فان دالة الكتلة الاحتمالية (p. m. f.) هي :

$$f\,at\,(a) = \begin{cases} \lambda^a \exp(-\lambda)/a! \\ 0 \quad , \quad o.w. \end{cases} \qquad , \ a = 0,1,2, ...$$

.

حيث λ هي معلمة التوزيع، $\lambda > 0$ وان الدالة المميزة لهذه الاخطاء ستكون هي :

$$\Phi_a(s) = \exp\{\lambda(\exp(is) - 1)\}$$
$$or \;\; \Phi_x(s) = \prod_{j=0}^{\infty} \Phi_a(s)$$

ومنها نحصل على الدالة المميزة للنموذج ARMA (1,1) لتوزيع بواسون :

$$\Phi_x(s) = \exp\lambda \left\{ (\exp(is) - 1) + \sum_{j=1}^{\infty}(\exp(is\,\phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)) - 1) \right\} \text{ .... (15)}$$

8-1 : العزوم الاربعة الاولى للسلسلة (X_t) عندما تتبع الاخطـــاء a_t توزيـــع بواسون بالمعلمة λ .

من خلال الدالة المميزة للسلسلة المعتمدة علـــى الصـــيغة (15) وباســـتخدام مشتقة الدالة المميزة للسلسلة (X_t) للحصول على العزوم الاربعة نجد ان :

$$\phi_x'(s) / s = 0 = (\exp(0) \left\{ i\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \;\exp(0) \right\} = (i\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j) \text{ .... (16)}$$

وبنفس الاسلوب نشتق الدالة المميزة للدرجة الثانية, الثالثة, الرابعة للحصول علـــى العزوم الاخرى:

ومن هنا فان الوسط الحسابي والتباين للسلسلة (X_t) هو :

$$\mu_{X_t} = E(X_t) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j$$

$$Var(X_t) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j^2$$

وبالتعويض بقيم الاوزان ψ_j الخاصة بالنموذج ARMA (1 , 1) نحصـــل علـــى العزوم الاربعة للسلسلة (X_t) كما ياتي :

$$E(X_t) = \lambda \left\{ 1 + (\phi_1 - \theta_1) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{j-1} \right. \text{ .... (17)}$$

$$E(X_t^2) = \lambda\,(1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2(j-1)}) + \lambda^2\,(1 + (\phi_1 - \theta_1) \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{j-1})^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(X_t^3) = \lambda \left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{3(j-1)} \right] + 3\lambda^2 \left[1 + (\phi_1 - \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{(j-1)} \right] \left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2(j-1)} \right]$$

$$+ \lambda^3 \left[1 + (\phi_1 - \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{(j-1)} \right]^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

1- 9 معاملا الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) :

1-9-1 : معاملا الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) عندما تتبـــع الاخطـــاء (a_t) التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma_a^2)$.

الالتواء هو درجة تماثل منحنى التوزيع او الانحراف عـــن خـــط التماثـــل والهدف من دراسته هو للتعرف على شكل منحنى التوزيع التكراري واتجاه تكدس التكرارات ولذلك يتم استخدام العزم الثالث حول المتوسط لقياس معامل الالتواء (SK) كما ياتي :

$$SK = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{E(X_t - \mu)^3}{\left\{E(X_t - \mu)^2\right\}^{3/2}}$$

$$or\;\; SK = \frac{E(X_t^3) - 3E(X_t^2)\,E(X_t) + 2\,(E(X_t))^3}{\left\{E(X_t^2) - (E(X_t))^2\right\}^{3/2}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

اما التفرطح فهو درجة تدبب او تسطح Flatness منحنى التوزيع التكراري ومـــن الصيغ المهمة لقياس معامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis) تلك التـــي تستخدم العزم الرابع حول المتوسط وكما ياتي :

$$KU. = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{E(X_t - \mu)^4}{\left[E(X_t - \mu)^2\right]^2}$$

$$or\;\; KU. = \frac{E(X_t^4) - 4E(X_t^3)E(X_t) + 6E(X_t^2)(E(X_t))^2 - 3(E(X_t))^4}{\left\{E(X_t^2) - (E(X_t))^2\right\}^2} \;\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

فاذا كان KU. >0 فهذا يعني ان منحنى التوزيع يكون مدبب اما اذا كان KU. <0 فان منحنى التوزيع يكون اكثر تسطحاً.

وهنا وباستخدام العزوم الاربعة السابقة وباعتمـــاد الصـــيغتين (19) ، (20) يمكن الحصول على معامل الالتواء للسلسلة (X_t) وكما ياتي :

$$SK.(X_t) = 0 \quad .... \quad (21)$$

وكذلك معامل التفرطح للسلسلة الزمنية (X_t) هو :

$$KU.(X_t) = 3 \quad .... \quad (22)$$

2-9-1 : معاملا الالتواء والتفرطح للسلسلة الزمنية (X_t) عنـــدما تتبـــع a_t توزيع بواسون $P_0(\lambda)$.

باستخدام العزوم الاربعة التي تم الحصول عليها فان معامل الالتواء للسلسلة (X_t) والنموذج المختلط ARMA (1 , 1) يكون :

$$SK(X_t) = \frac{\left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^3 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{3(j-1)}\right]}{\sqrt{\lambda}\left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{2(j-1)}\right]^{3/2}} \quad .... \quad (23)$$

ومعامل التفرطح للسلسلة (X_t) هو :

$$KU(X_t) = 3 + \frac{\left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^4 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{4(j-1)}\right]}{\lambda\left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{2(j-1)}\right]^2} \quad .... \quad (24)$$

10-1 الجانب العملي :

في هذا الجانب تم اجراء بعض تجارب المحاكاة باستخدام برامج اعدت لهذا الغرض تضمنت الخطوات التالية:

1- توليد الاعداد العشوائية المستقلة التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي U (0,1) ثم تحويلها الى المتغير العشوائي (a_t) الذي يتبع التوزيع الاحصائي قيد الدراسة .

2- تم التعويض بقيم (a_t) التي تم توليدها في صيغة النموذج المختلط ARMA (1,1) للحصول على قيم للسلسلة الزمنية (X_t) وذلك بافتراض قيم اولية للمعلمات (ϕ_1 , θ_1) والتي تحقق شرطي الاستقرارية والانعكاسية عندما $X_0 = a_0 = 0$ وباحجام عينات مختلفة حيث (n = 50 , 100, 200) وبتكرار 500 مرة.

1-10-1 : مقارنة معاملي الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) المتولدة من النموذج المختلط ARMA (1,1) الطبيعية وغير الطبيعية .

11-10-2 التجربة الاولى : عندما تتبع الاخطاء (a_t) التوزيع الطبيعي القياسي N (0,1) .

حيث تم توليد الاخطاء العشوائية (a_t) التي تتبع التوزيع القياسي N (0,1) باستخدام طريقة (Box – Muller) [3] و تعويض القيم المتولدة في صيغة النموذج المختلط للحصول على قيمة السلسلة (X_t) وتم حساب قيم العزوم الاربعة التجريبية للسلسلة الزمنية في حساب قيم معامل الالتواء والتفرطح التجريبية حسب الصيغ (19) ، (20) على الترتيب والجدول (1) يوضح المقارنة بين القيم النظرية والتجريبية للسلسلة (X_t) مع القيم النظرية للاخطاء (a_t):

الجدول (1): معاملا الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) عندما تتبع (a_t) التوزيع الطبيعي القياسي N (0,1) للنموذج ARMA (1,1)

n	(ϕ_1, θ_1)	$SK.(X_t)$		$KU.(X_t)$	
		النظري	التجريبي	النظري	التجريبي
50	(- 0.8, - 0.9)	0	0.00856	3	3.03842
100		0	0.00236	3	3.03564
200		0	0.00170	3	3.02692
50	(- 0.3, 0.1)	0	0.00340	3	3.05946
100		0	0.00167	3	3.04751
200		0	0.00188	3	2.99715
50	(0.3, - 0.1)	0	0.00149	3	3.03759
100		0	0.00139	3	2.99320
200		0	0.00167	3	3.00672
50	(0.7, 0.5)	0	0.00224	3	2.99524
100		0	0.00119	3	2.99315
200		0	0.00136	3	3.00862
50	(0.9, 0.9)	0	0.00296	3	2.99844
100		0	0.00066	3	2.99820
200		0	0.00038	3	3.00146

3-10-1 : التجربة الثانية :

عندما تتبع الاخطاء (a_t) توزيع بواسون $p_0(\lambda)$ في هذه التجربة ثم توليد الاخطاء العشوائية (a_t) التي تتبع توزيع بواسون $p_0\,(\lambda=1)$ باستخدام طريقة الرفض (Rejection Method) [3] وبعدها تم التعويض في صيغة النموذج المختلط ARMA (1,1) للحصول على قيم السلسلة (X_t) ولقيم مختلفة من المعالم (ϕ_1 , θ_1) ليتم الحصول على قيم معاملي الالتواء والتفرطح التجريبية باستخدام الصيغتين (19) ، (20) على الترتيب والحصول على القيم النظرية للمعاملين باستخدام الصيغتين (23) ، (24) على الترتيب، الجدول رقم (2) يوضح تلك النتائج.

الجدول (2):يوضح معاملي الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) عندما (a_t) يتبع توزيع بواسون للنموذج المختلط ARMA (1,1) عندما $p_0\,(\lambda=1)$.

n	(ϕ_1 , θ_1)	$SK.(X_t)$		$KU.(X_t)$	
		النظري	التجريبي	النظري	التجريبي
50	(- 0.8, - 0.9)	0.96037	0.94306	3.94684	3.88156
100		0.96037	0.96281	3.94684	3.93991
200		0.96037	0.96348	3.94684	3.94513
50	(-0.3, 0.1)	0.73543	0.71531	3.74196	3.76341
100		0.73543	0.73314	3.74196	3.74519
200		0.73543	0.73491	3.74196	3.74631
50	(0.3, -0.1)	0.83590	0.82419	3.74196	3.73345
100		0.83590	0.83341	3.74196	3.74253
200		0.83590	0.84101	3.74196	3.76617
50	(0.7, 0.5)	0.90379	0.89817	3.86165	3.81415
100		0.90379	0.88341	3.86165	3.80151
200		0.90379	0.90164	3.86165	3.86012
50	(0.9, 0.9)	1	0.99151	4	3.99154
100		1	0.99814	4	3.99851
200		1	1.00005	4	4.55125

وتم اخذ قيم مختلفة الى (λ) ومن ثم عرضت هذه النتائج في الجدول (3) عندما $\lambda=20$ وبحجم عينة (n = 200).

الجدول (3)

يوضح معاملي الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) عندما (a_t) تتبع توزيع بواسون p_0 $(\lambda=20)$ للنموذج ARMA (1,1) .

$KU.(a_t)$	$KU.(X_t)$		$SK.(a_t)$	$SK.(X_t)$		(ϕ_1, θ_1)
النظري	التجريبي	النظري	النظري	التجريبي	النظري	
3.05	3.06738	3.05	0.22361	0.22816	0.22361	(0.9 ، 0.9)
3.05	3.03756	3.03649	0.22361	0.15920	0.15868	(−0.3، 0.1)

4−10−1 : مقارنة طرائق تحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1)

في هذه التجربة تم ايجاد قيم السلسلة الزمنية (Z_t) وفقاً للنموذج ARMA (1,1) ولقيم مختلفة للمعلمتين (ϕ_1, θ_1) والتـــي تحقــق شـــرطي الاســـتقرارية والانعكاسية وتم تطبيق الطرائق الثلاثة المذكورة في الجزء النظري وذلك للتعرف على دقة كل طريقة في تحديد رتبة النموذج المختلط قيد الدراسة وتم تكرار التجربة على الحاسوب 500 مرة وباحجام العينات السابقة والجدول (4) يوضح التوزيـــع التكراري للنموذج ARMA (1,1) حسب الطرائق الثلاثة .

الجدول (4): التوزيع التكراري للنموذج ARMA (1,1) للطرائق المختلفة.

n	(ϕ_1 , θ_1)	ESACF	C-table	ESPACF
50	(-0.8 , -0.8)	481	478	479
100		492	491	488
200		497	496	495
50	(-0.4 , 0.2)	484	480	478
100		491	489	493
200		496	497	499
50	(0.3 , -0.1)	482	482	481
100		443	487	492
200		498	499	497
50	(0.8 , 0.6)	485	483	487
100		492	485	493
200		499	496	495
50	(0.9 , 0.9)	484	481	484
100		495	486	494
200		497	499	496

اذ ان نتائج الجدول اعلاه توضح ان الطريقة المقترحة (ESPACF) تعطي اكبر تكرار حيث تتقارب مع الطريقة (ESACF) وهما افضل من طريقة (C – table).)

1-10-5 : المقارنة بين الطرائق في تحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) وحسب مقياس نسبة الخطأ.

تم استخدام مقياس نسبة الخطأ (Percentage Error) للطرائق الثلاثة المستخدمة في تحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) وبنفس احجام العينات السابقة والجدول (5) يوضح ذلك.

الجدول (5): نسبة الخطأ للطرائق الثلاثة في تحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1).

n	(ϕ_1, θ_1)	ESACF	C-table	ESPACF
50	(-0.8 , -0.8)	0.038	0.044	0.042
100		0.016	0.018	0.024
200		0.006	0.008	0.01
50	(-0.4 , 0.2)	0.032	0.04	0.044
100		0.018	0.022	0.014
200		0.008	0.006	0.002
50	(0.3 , -0.1)	0.036	0.036	0.038
100		0.014	0.026	0.016
200		0.004	0.002	0.006
50	(0.8 , 0.6)	0.03	0.034	0.028
100		0.016	0.03	0.014
200		0.002	0.008	0.01
50	(0.9 , 0.9)	0.032	0.038	0.032
100		0.01	0.028	0.012
200		0.006	0.01	0.008

ان نتائج الجدول اعلاه توضح ان نسبة الخطأ تتناقص مع زيادة حجم العينة وعلى الرغم من وجود بعض القيم المتذبذبة وان النتائج توضح كذلك ان افضل طريقة لتحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) هي طريقة (ESACF) اذ تقل نسبة الاخطاء مع زيادة حجم العينة وتليها الطريقة المقترحة (ESPACF) ثم طريقة (C - table).

11-1 : الاستنتاجات : من خلال الجانب التجريبي يمكن ان نحصل على الاستنتاجات الاتية :

1- من خلال نتائج الجدول (1) المتعلقة بمقارنة معاملي الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) المتولدة من النموذج المختلط ARMA (1,1) عندما تتبع الاخطاء العشوائية (a_t) التوزيع الطبيعي نستنتج ان القيم النظرية لمعاملي الالتواء والتفرطح للسلسلة (X_t) تتقارب مع القيم التجريبية للنموذج وخاصة عندما $(\phi_1 = \theta_1)$ وبذلك يقترب توزيع السلسلة (X_t) من توزيع الاخطاء (a_t) .

2- من خلال نتائج جدول رقم (2) يتضح لنا ان توزيع السلسلة (X_t) يقترب من التوزيع الطبيعي مع زيادة قيمة λ وان توزيع السلسلة (X_t) يقترب من التوزيع الطبيعي اكثر من اقتراب توزيع الاخطاء (a_t) .

3- من خلال نتائج الجدول (4) يتضح ان الطريقة المقترحة (ESPACF) لتحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) تعطي اكبر تكرار اذ تتقارب مع الطريقة (ESACF) .

4- من خلال نتائج الجدول (5) يتبين ان نسبة الخطأ تتناقص مع زيادة حجم العينة وان افضل طريقة لتحديد رتبة النموذج المختلط ARMA (1,1) هي طريقة ESACF ثم تليها الطريقة المقترحة (ESPACF) ثم طريقة (C - table).

المصادر

1- AL – Nasir, A. M. H. & Jaafar, H. (1997). " Moments of low order MA. Process Gaussian and Non – Gaussian " , J. of Administrative and Economical Sci. the Sixth Sci. Conference of Administration and Economics College. (2-23).

2- Andel, J. (1982), "Marginal distribution of Autoregressive Processes Ninth Prague Conferece of Information theory, Statistical decision function and Random Process", Czechoslovak Academy of Sciences, Institute of Information theory and Automation prague.

3- Fish man, G. S. (1973), " Concepts and Methods in discrete event digital Simulation ", John Wiley and sons, New York.
4- Nelsn, H. L. & Granger, C. W. (1979), " Experience with using the Box – Cox Trans formation whom forecasting Economic Time Series " , J. of Econometrics , vol. (8) , No. (1).
5- Sim, C. H. (1987), " A mixed Gamma ARMA (1,1) Model for River Flow Time Series ", water Resources Reseach, Vol. (23), No. (1), pp. (32-36).
6- Sofia , F. B. & Thanoon, B. Y. (1994), " Probabitity Density Function of Some low order Moving Average Models with uniform Innovation ", J. of Tanmiyat AL-Rafidain, Vol. (42), No. (1).
7- Swift, A. L. & Janacek, G. J. (1991), " Forecasting Non – Normal Time Series ", J. of forecasting, Vol. (10), No. (3).
8- Kumar, k. (1987), " Identification of ARMA mdels using Pade Approximation " , Bulletin of the International Stat. Institute (Ne therlands), Vol. (L ∏), Book 2, p. (377).
9- Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1984), " Consistent Estimates of Auto regressive parameters and Extended sample Autocorrelation function for stationary and Non – Stationary ARIMA models " , JASA, Vol. (79), No. (384), p (84).
10- سهيل نجم عبدالله (2001) ، " دراسة الالتواء والتفـرطح لنمـوذج الوسـط المتحرك من الرتبة الثانية (الطبيعي وغير الطبيعي) باستخدام المحاكاة " رسـالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد.
11- العزاوي، ماجد رشيد، (2001)، " حول بعض خصائص الانموذج المخـتلط ARMA (1,1) غير الطبيعي " . اطروحة دكتوراه في الاحصـاء كليـة الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد.

12- فؤاد عبدة أسماعيل (2003) "طرائق تشخيص نماذج السلاسل الزمنية المختلطــة في الرتب الدنيا" ،أطروحة دكتوراه في ألأحصاء كلية ألأدارة وألأقتصاد – الجامعة المستنصرية.