المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (15) 2009
ص ص [193–226]

استخدام طريقة المعيار الشامل في البرمجة الرياضية المتعددة الدوال

خالد عبدا العلاف*

الملخص

تناول البحـث أهـم التطـورات الخاصـة بالبرمجـة الرياضـية (التقليديـة) Mathematical Programming (MP) وظهور ما يسمى حديثاً بالبرمجة الرياضـية المتعددة الدوال (الأهـداف) Math. Prog. With Multiple Objective (MOMP) والتي باتت تشكل العمود الفقري لتطبيقات عملية اتخاذ القرارات تحـت عـدة معـايير Multi-Criteria Decision Making (MCDM) والتي بدورها احتلت مكانة واضحة المعالم في نظم دعم القرارات المحوسبة(Decision Support System (DSS وعلـم بحوث العمليات وعلم الإدارة (OR/MS).

ومن خلال دراسة هذه النماذج واستخداماتها تم اختيار طريقة المعيـار الـشامل لدراسة مفاهيمها وخصائصها ومحدداتها ومراحل الحل فيها ليـتم إنجـاز الخوارزميـة والمخطط الانسيابي لها. وبعد ذلك تم الأخذ بطريقة المعيار الشامل لايجاد أفضل الحلول النهائية الممكنة لمشكلة قرار مقيدة، خطية، متعددة الدوال، دون أية أسـبقيات أو أوزان. وتم التوصل إلى مجموعة من الحلول التي توصف بأنها غير سائدة لحالة دراسية تطبيقية مع إجراء بعض المقارنات بما يمكن تحقيقه باستخدام نماذج رياضية أخرى.

Using the Method of Global Criterion in Multi-Objective Mathematical Programming

Abstract

The research deals with the most important specific development of the traditional mathematical programming (MP) and shows the mathematical programming with multi-objective (MOMP) which forms the vertebral column in application of Multi-Criteria Decision Making (MCDM), Decision Support System (DSS), operations research / management science (OR/MS).

---

* مدرس مساعد / قسم العلوم المالية والمصرفية، كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة الموصل.

تاريخ التسلم :10 /6 /2008 ـــــــــــــــــ تاريخ القبول : 12/14 /2008

After studying these new models and tools and their uses, the researcher chose Global Criterion Method to study it concept and properties, limitation and stages of the solution to achieve the algorithm and the flow-chart of it, and using the Global Criterion Method to obtain the best feasible final solutions to constrained decision, linear, multiple objective problem without any priority or weighted.

Finally, the study concludes too many feasible solutions which are called, non-dominated solutions to the application of a case study and comparison with the results of using other models.

المقدمة

ما زال أسلوب صياغة النماذج وبنائها رياضياً للمشاكل قيد الدراسة من أهم أساليب بحوث العمليات وابرزها علم الإدارة OR/MS وأكثرها استخداماً في مختلف القطاعات والمؤسسات، وتعد البرمجة الرياضية Mathematical Programming بنماذجها المتنوعة الخطية وغير الخطية من ثمرات هذا الأسلوب.

وخلال العقدين الأخيرين جرت العديد من التطورات المهمة على نماذج البرمجة الرياضية التقليدية عموماً سواء من حيث تعريف مفردات الصياغة أو هيكلية البناء للنموذج أو طرائق الحل فيها أو حتى فرضياتها وصفاتها من حيث سكونيتها وأحادية الأهداف في نماذجها العامة.

ورافق تلك التطورات استخدامات حديثة لها في مجال نظم دعم القرارات Decision Support System (DSS) واتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM) على اختلاف أنماطها الفردية Individual، الجماعية Group، مدعومة بالتطورات الخاصة في مجال تقنيات الحاسوب المختلفة ولغات البرمجة ونظم الاتصالات وشبكات المعلومات والاستخدام الواسع للانترنيت.

وفي هذا البحث سنتناول جانبا من هذه التطورات الخاصة بدالة الهدف للنموذج وظهور ما يسمى بالبرمجة الرياضية المتعددة الدوال Math. Prog. With Multiple Objective التي باتت تعرف بالمختصر (MOMP) والتي تهتم بتعدد

المعايير Multi-Criteria أو الدوال Multi-Function أو الأهداف Goals سواء ان كانت هذه الدوال خطية أم لا خطية.

وسيقتصر البحث على دراسة نموذج برمجـة رياضـية متعـددة الـدوال (MOMP) واستخدام طريقة المعيار الـشامل Method of Global Criterion في إيجاد الحلول للنموذج المصاغ والتي تتسم بكونها حلـول غيـر سـائدة Non-Dominated Solution من خلال حالة دراسية افتراضية لمؤسسة صحية ترغب في تعظيم أرباحها بعدة دوال متساوية الأوزان والأسبقيات مـن أجـل الوصـول بالنظام لديها إلى درجة الأمثلية وبوجود عدد من القيود.

مشكلة البحث (نظرياً)

في هذا البحث نتناول مشكلة لدى متخذ القرار تمتلك المواصفات الآتية:

1. وجود عدة دوال هدف لدى متخذ القرار Multi-Objective Function .
2. الدوال لها نفس الأهمية (الوزن) لدى متخذ القرار No-Weighted.
3. الدوال لها نفس الأسبقية لدى متخذ القرار No-Priority.
4. وجود مجموعة من القيود Constraints.
5. الدوال والقيود يمكن التعبير عنها رياضياً (بشكل خطي أو لا خطي).

وفي بحثنا هذا ستقتصر الدراسة التطبيقية عندئذٍ على العلاقات الخطية فقط وبهذا يمكن اختزال مشكلة البحث أعلاه على أنها " مشكلة أمثلية مقيـدة، متعـددة الدوال، خطية، من دون أية أسبقيات، من دون أية أوزان ".

أهمية البحث

تتأتى أهمية البحث من أهمية عملية صناعة القرارات وتحليلها على مختلف المستويات وفي مختلف القطاعات والأنظمة، وخاصةً في ظل المنظمات التي تتميز بكبر حجمها وتعقد نظامها الداخلي والتي تعتمد في قراراتها غالباً على مـا تـوفره نظم بحوث العمليات (OR) وعلم اتخاذ القرارات (DM) والمعروف حاليـاً فيمـا يسمى بنظم دعم القرارات المحوسبة (DSS) للوصول بالنظام إلى أمثليـة تمتلـك العديد من الأهداف والغايات التي قد تكون متضاربة أحياناً ومقيدة في أحيان أخرى على الغالب.

أهداف البحث

يمكن تثبيت النقاط الاتية أهدافا للبحث:

- دراسة نماذج البرمجة الرياضية المتعددة الـدوال (MOMP) والتـي تـشكل الهيكل الأساسي في عملية اتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM).
- تقديم ماهية طريقة المعيار الشامل وإنجاز خوارزمية ومخطط انسيابي لها.
- اختبار إمكانية التوصل إلى حلول غير سائدة (ربما تكون أقل أمثلية) لكنها أكثر إقناعاً More Satisfactory عند إجراء التحليلات والتقييمات مقارنة بأساليب ونماذج أخرى.

الجانب النظري

أولاً. تطور البرمجة الرياضية (MP) إلى البرمجة الرياضية المتعددة الدوال (MOMP)

ما زالت البرمجة الرياضية(*) التقليدية Traditional Math. Prog. أحـد أهم وأبرز نماذج بحوث العمليات وعلم اتخاذ القرارات الشائعة الاستخدام بنماذجها المتنوعة، وتعد البرمجة الخطية Linear Programming (LP) أحد أهـم هـذه النماذج وأشهرها، كما تعد طريقة السمبلكس Simplex Method أبـرز طرائـق الحل فيها التي تقودنا إلى الحل الأمثل Optimal Solution والذي يعرف بأنـه " أفضل الحلول الممكنة على الإطلاق ولا يوجد حل أفضل منه وغالبـاً مـا يكـون وحيداً ". وهو ما اهتمت به نماذج البرمجة الرياضية التقليدية لعـدة عقـود عنـد التطبيق.

إن لنموذج (MP)(*) شكلا رياضيا عاما يمكن التعبير عنه بالنموذج رقـم (1) الآتي:

(*) لمزيد من التفاصيل عن البرمجة الرياضية:
Render, Barry, Ralph M. Stair Jr. & Michael E. Hanna, "Quantitative Analysis for Management", 8th.ed., 2003, Prentice-Hall, New Jersey, USA, PP. 233-333.

(*) تم اعتماد ذات المختصرات في البحوث والمؤتمرات العالمية وبالترجمات الممكنة الاتية:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } f = \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{S. to.} \quad A\,\underline{x} = \underline{b} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث يحتوي النموذج أعلاه على دالة هدف واحدة وعلى (n) متغير قرار وعلى (m) قيد فضلا عن أن هذا النموذج يمكن أن يكون خطياً أو لا خطياً.

إلاّ أن لهذا النموذج مجموعة من الفرضيات والشروط لابد من توفرها عند الصياغة وبناء النموذج والحل كذلك منها ما يخص أحادية دالة الهدف الموصوفة عادةً إما تعظيم Maximize أو تصغير Minimize والتراكمية والنسبية للعلاقات ما بين متغيرات القرار وأنها نماذج ساكنة تعطي للدوال والقيود المصاغة ذات الأهمية والأوزان، وكذلك ذات الأسبقية عند إيجاد الحلول وأن متغيرات القرار فيها تمتلك صفة الاستمرارية. أما عند الحل فتفترض الاعتماد على الحل الصفري للوصول إلى الحل الأمثل المنشود والموجود في أحدى زوايا منطقة الحل الممكن التي توصف عادةً بأنها محددة ومغلقة.

إن لنماذج البرمجة الرياضية العديد من التطبيقات المعروفة في مجالات التخطيط والرقابة والسيطرة النوعية وجدولة الإنتاج والتوزيع والنقل.. وغيرها وكل هذا استخدم في شتى القطاعات والمؤسسات المحلية والعالمية.

إن اهتمام نماذج البرمجة الرياضية ينصب عموماً على ما يجب أن يكون عليه النظام System أو الوصول بالنظام قيد الدراسة والبحث إلى حالة الأمثلية في الأداء واستغلال الموارد سواء ان كان هذا النظام عسكرياً أم مدنياً أم صناعياً أم تعليمياً أم زراعياً أو كيميائياً. وهكذا احتلت البرمجة الرياضية تطبيقات واسعة في

(LP) Linear Programming: البرمجة الخطية.

(MP) Mathematical Programming: البرمجة الرياضية.

(MOMP) Multiple Objective Mathematical Programming: البرمجة الرياضية المتعددة الدوال.

وينوه الباحث إلى إمكانية وجود ترجمات أخرى فيما يخص المصطلحات الحديثة مثل (MOMP) تترجم إلى البرمجة الرياضية المتعددة دوال الهدف أو البرمجة الرياضية متعددة الأهداف أو الأغراض.

عقد الستينات والسبعينات وما زالت كذلك حتى الآن وخاصةً بعد التطورات التي أدخلت عليها في عقد الثمانينات والتسعينات والتي تناولت فرضياتها الأولية في الصياغة والنمذجة وكذلك طرائق الحل فيها، تزامن ذلك مع التطور الحاصل في لغات البرمجة العلمية من جهة، والتطور التقني للحاسوب من جهةٍ أخرى، كل هذه التطورات أعطت للبرمجة الرياضية مميزات إضافية للخوض في إيجاد حلول لمشاكل تخص أنظمة كبيرة الحجم Large System ومعقدة Complex كان من المستحيل أو الصعوبة البالغة دخولها قبل ذلك.

وفي هذا البحث سنتناول أهم التطورات الحاصلة في نماذج البرمجة الرياضية التقليدية من جانب واحد فقط ، وهو امتلاكها لدالة هدف واحدة Only One objective Function أو معيار وحيد Unique Criteria للحكم على أمثلية النظام Optimalty of System موصوفة عادةً بشكل دالة تراكمية في حالة تعظيم (ربحية أو إنتاجية) أو تصغير (كلف أو خسائر).

وهكذا تم التوسع بنماذج (MP) إلى نماذج (MOMP) والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالنموذج (2) أدناه:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\ f_j\ (\underline{x})\ ] \\ \text{s. to. } g_i\ (\underline{x}) \le o,\ j = 1,2,\ldots,k \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

النموذج أعلاه يحتوي على (k) دالة هدف و(m) قيد، و(n) متغير قرار وإن أيا من القيود والدوال يمكن أن تكون خطية أو لا خطية.

ثانياً. تطور اتخاذ القرارات (DM) إلى اتخاذ القرارات تحت عدة معايير (MCDM)

إن التطور الحاصل(*) في البرمجة الرياضية بانتقالها من تناول دالة هـدف واحدة إلى عدة دوال أهداف رافقه تطور باستخدامها في عملية اتخاذ وتحليل مشاكل القرار Decision Problem، وبهذا تم الانتقال بها من اعتمادها علـى المعيـار الواحد One-Criteria عند اتخاذ القـرار إلـى اعتمـاد عـدة معـايير Multi-Criteria، وبهذا ظهر ما يسمى حديثاً(**) اتخاذ القـرارات تحـت عـدة معـايير Multi-Criteria Decision Making (MCDM) والذي يسمى أحياناً بتحليـل القرارات تحت عدة معايير Multi-Criteria Decision Analysis (MCDA).

باختصار شديد، يمكن القول إن نماذج البرمجة الرياضية المتعددة الـدوال (MOMP) ما هي إلا العمود الفقري لعملية اتخاذ القرارات وتحليلها تحـت عـدة معايير (MCDM) و(MCDA).

ولغرض توضيح نماذج (MOMP) المختلفة والمستخدمة في (MCDM) يقترح الباحث كتابة نموذج (MOMP) المرقم (2) بالشكل (3) الاتي:

$$\left.\begin{aligned} VMP \Rightarrow \max\ [\,& P_1W_1\ f_1(\underline{x}),\ P_2W_2\ f_2(\underline{x}),\ \ldots,\ P_jW_j\ f_j(\underline{x}),\ \ldots,\ P_kW_k\ f_k(\underline{x})] \\ & \text{s. to. } g_i(\underline{x}) \le o, \\ & j = 1,2,\ldots,k \\ & i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

حيث:

VMP : يمثل متجه تعظيم المشكلة في (MOMP).

$\underline{x}$: تمثل متجه متغيرات القرار.

(*) لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى المصادر الاتية:

1. Winston, Wayne L., "Operation research: Applications and algorithm", 1994, Duxbury Press , U. S. A., PP. 771-823.
2. Zeleny, M., "Multiple Criteria Decision Making", 1982, McGraw-Hill, Inc., USA., PP. 120-320.

(**) استخدمت الترجمات الممكنة الاتية:

Multi-Criteria Decision Making (MCDM): اتخاذ القرارات تحت عدة معايير.

Multi-Criteria Decision Making (MCDM): تحليل القرارات تحت عدة معايير.

ولمزيد من التفاصيل عن هذين المصطلحين وأوجه الاختلاف والتشابه بينهما يمكن الدخول إلى موقع الجمعية العالمية بهذا التخصص وبذات الرمز (MCDM) على شبكة الانترنيت.

P_j : يمثل الأسبقية j المرافقة للدالة $f_j(\underline{x})$.

W_j : يمثل الوزن j المرافق للدالة $f_j(\underline{x})$.

$gi(\underline{x})$: تمثل القيود المفروضة على المشكلة.

$fj(\underline{x})$: دالة الهدف j.

ويمكن تصنيف مشاكل القرار ونماذجه الرياضية المستخدمة لإيجاد الحل النهائي على النحو الاتي:

أ. مشاكل القرار غير المقيدة Non-Constrained Decision Problem

وفي هذا النوع من المشاكل الصغيرة الحجم عادةً(*) لا توجد أية قيود ولا يتطلب صياغة نموذج رياضي للمشكلة، بل توجد عدة صفات (معايير) Multi-Arttibute (i=1,2,…,m) معبر عنها على شكل أغراض فقط Only Objective أو غايات متناقضة(*) Multi-Conflicting Objective يراد تحقيقها في اختيارنا للبديل الأمثل Optimal All-Ternative من بين عدد قليل (j=1,2,…,n) من البدائل وعادةً ما تمثل هذه المشكلة بالشكل (1) الاتي:

معايير \ بدائل	1	2	…	j	…	m
1	x_1^1	x_1^2	…	x_1^j	…	x_1^m
2	x_2^1	x_2^2	…	x_2^j	…	x_2^m
.	.	.	.	.	.	.

(*) لمزيد من التفاصيل حول أدوات حل مشاكل القرار غير المقيدة:

1. Hamalainen, Raimo P., "Decisionnarium-Aiding Decisions, Negotiating and Collecting Opinions on the Web" 2008, to appear in Journal of MCDM.
2. Mustajoki, Jyri and Hamalainen, Raimo P., "Web-Hipre: Global Decision Support by Value tree and AHP Analysis", 2000, INFOR., Vol. 38, No. 3, Aug., PP. 208-220.
3. العلاف، خالد عبدا ، "التغير في صناعة القرار: من المعيار الواحد إلى تعددية المعايير"، 2008، المؤتمر الدولي العلمي الثامن، جامعة الزيتونة الأردنية، عمان، الأردن.

(*) سميت غايات أو أغراض (Objective) لأنها قد تكون في حالة .Max أو .Min لأنها لا يمكن التعبير عنها على شكل دوال أغراض (Objective) رياضية مثل ($Max\ f = 2x_1 + 3x_2$) أو دوال أهداف (Goal) رياضية مثل ($Min\ f = 2d^-_1 + 3d^+_2$).

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i				x_i^j		
.	.	.	.	.	.	.
n	x_n^1	x_n^2	…	x_n^j	…	x_n^m

الشكل (1):مخطط مشكلة قرار غير مقيدة

وتتم عملية اختيار البديل الأمثـل إمـا فرديـاً Individual أو جماعيـاً Group، ومن أهم الأدوات Tools المستخدمة في هذا النوع من مـشاكل القـرار هي(**):

1. MAVT. 2. AHP. 3. IEP.

ب. **مشاكل القرار المقيدة Constrained Decision Problems**

وفي هذا النوع من المشاكل يكون لدى متخذ القرار عدة معـايير Multi-Criteria، يمكن التعبير عنها بشكل عدة دوال أهداف منـاظرة لهـا Multiple Objective Function أو يعبر عنها بعدة أهداف مناظرة لها Multiple Goals مع افتراض إمكانية وجود منطقة حل ممكنة تحتوي على عدد كبير من البدائل عادةً وتحقق جميع قيود المشكلة معاً.

وباعتماد نموذج (MOMP) المقترح سابقاً رقم (3) يمكن أن نحدد النماذج الاتية:

1. نموذج (MOMP) من دون أية أسبقيات أو أوزان:

وفي هذا النوع من النماذج(*) لا يقدم متخذ القرار أي أنواع من المعلومات التفضيلية بخصوص دوال الهدف المتعددة المصاغة بناء على المعـايير المختـارة المعتمدة في تحليل واتخاذ القرارات الخاصة بالمشكلة قيد البحث.

(**) تم اعتماد ذات المختصرات في البحوث والمؤتمرات العالمية وبالترجمات الممكنة الاتية:

(Multiatribute Value Theory (MAVT: نظرية القيمة المتعددة الصفات.

(Analytic Hierarchy Process (AHP: إجراءات التحليل الهرمي.

(Interactive Evaluation Procedures (IEP: إجراءات التقييم التفاعلية.

(*) لمزيد من التفاصيل:

وبهذا يمكن اشتقاق النموذج ذي الرقم (4) الاتي من نمـوذج (MOMP) ذي الرقم (3) الذي اقترحه الباحث سابقاً وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{l} VMP \Rightarrow \max\ [\ f_1\ (\underline{x}),\ f_2\ (\underline{x}),\ \ldots,\ f_j\ (\underline{x}),\ \ldots,\ f_k\ (\underline{x})] \\ \quad s.\ to:\ g_i\ (\underline{x}) \le o, \\ \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,k \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad P_1 = P_2 = \ldots = P_k = 1 \\ \quad W_1 = W_2 = \ldots = W_k = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ومن أهم طرائق وأساليب حل هذا النوع من النماذج هي طريقـة المعيـار الشامل والتي مازالت أكثر الطرائق استخداماً عند التطبيق، فـضلا عـن وجـود طرائق أخرى مثل طريقة الانحرافات والمباراة.

2. نموذج (MOMP) مع عدة دوال مرتبة بأسبقيات:

وفي هذا النوع من النماذج يتوجب على متخذ القـرار تقـديم معلومـات تفضيلية واضحة بخصوص دوال أو أهداف المشكلة المعبرة عن المعـايير، علـى شكل أسبقيات مرتبة (أولاً، ثانياً، ... وهكذا)، وقد تحتوي في داخلها علـى أوزان عددية (1، 2، ...، وهكذا) أيضاً، وأهم النماذج المتعارف عليها بهذا الخـصوص كالآتي:

Hwang, C. L., S. R. Paidy, K. Yoon and A. S. M. Masud "Mathematical programming with multiple objectives: A Tutorial", "Computer and Operation Research", 1980, Vol. 7, PP. 7-11.

2-1 نموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال (MOLP):

ويعتبر من أهم النماذج(*) في مشاكل القرار المقيدة ويعبر عنـه رياضـياً بالنموذج (5) الاتي:

$$\left.\begin{array}{l} VMP \Rightarrow \max\ [\ P_1\ f_1\ (\underline{x}),\ P_2\ f_2\ (\underline{x}),\ \ldots,\ P_j\ f_j\ (\underline{x}),\ \ldots,\ P_k\ f_k\ (\underline{x})] \\ \quad\quad \text{s. to: } g_i\ (\underline{x}) \leq o, \\ \quad\quad\quad\quad j = 1,2,\ldots,k \\ \quad\quad\quad\quad i = 1,2,\ldots,m \\ \quad\quad \text{Such that:} \\ \quad\quad P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_k \end{array}\right\} \ldots\ldots. (5)$$

وفي هذا النموذج يتم العمل بإيجاد الحل الأمثل للأسبقية P_1 (الممثلة بالدالة f_1) ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للأسبقية الثانية P_2 (الممثلة بالدالة f_2) وهكذا علـى أن لا يتعارض ما تم تحقيقه بالأمثلية العليا P_1. وأهم طرائق الحل فيها هي:

1. M.S.M.
2. Tow Phase R.M.S.M.
3. Dual M.S.M.

2-2 نموذج البرمجة الهدفية (GP):

ولهذا النموذج(**) مساحة واسعة من الاستخدامات ويعتبر من أهـم نمـاذج (MOMP) ويتميز متجه الدوال فيه (دالة الإنجاز) باحتوائـه علـى المتغيـرات الانحرافية فقط (d_i^-, d_i^+) مع إمكانية وجـود أوزان عدديـة أصـلية Cardinal Number, W_j مثل (1، 2، .... وهكذا)، فضلا عن تعامله بـالأوزان الترتيبيـة Ordinal Number مثل (أولاً، ثانياً، .... وهكذا) لتحديد الأسـبقيات P_j ويكتـب نموذجها العام بالشكل (6) الاتي:

(*) لمزيد من التفاصيل:

Zeleny, M., Op. Cit., PP. 280-314.

(**) لمزيد من التفاصيل:

1. Taha, Hamdy A., "Operations Research: An Introduction", 7th ed., 2003, Prentice Hill, USA, PP. 347-360.
2. العلاف، خالد عبدا ، "استخدام البرمجة الهدفية في تخطيط الإنتـاج بـالتطبيق علـى معمل الألبان في الموصل"، 1988، رسالة ماجستير غيـر منـشورة، كليـة الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل.

$$\left.\begin{array}{l} \min\ [P_1W_1\ (\underline{d}^-, \underline{d}^+), P_2W_2\ (\underline{d}^-, \underline{d}^+), \ldots, P_LW_L\ (\underline{d}^-, \underline{d}^+)] \\ \quad \text{s. to: } g_i\ (\underline{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \\ \quad\quad f_j\ (\underline{x}) + d_j^- - d_j^+ = b_j \\ \quad\quad d_i^-, d_i^+ \geq 0 \\ \quad\quad d_i^- \,.\, d_i^+ = 0, \\ \quad\quad\quad j = 1,2,\ldots, k \\ \quad\quad\quad i = 1,2,\ldots, m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_L \\ \quad W_1, W_2, \ldots\ldots\ldots, W_L \quad \text{(Cardinal Number)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ومن أهم طرائق الحل لهذا النموذج هي:

1. S.S.M.
2. Modifed S.M.
3. M.S.M.

3. نموذج (MOMP) مع أوزان معلومة الدوال:

وفي هذا النوع من النماذج يوجد لدى متخذ القرار معلومات محـددة عـن أهمية كل معيار (الممثل بدالة هدف) معبر عنها على شكل أوزان W_j وبهذا يمكن صياغة النموذج (7) الاتي:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\ W_1\ f_1\ (\underline{x}), W_2\ f_2\ (\underline{x}), \ldots, W_j\ f_j\ (\underline{x}), \ldots, W_k\ f_k\ (\underline{x})] \\ \quad \text{s. to: } g_i\ (\underline{x}) \leq o, \\ \quad\quad\quad j = 1,2,\ldots, k \\ \quad\quad\quad i = 1,2,\ldots, m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1 \\ \quad 0 \leq W_j \leq 1 \quad \forall\ W_j \quad \text{and must be known} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

وتسمى طرائق الحل لهـذه النمـاذج بـالطرائق التفاعليـة Interactive Methods ويمكن أن نجد العديد منها:

1. Interactive MOLP.
2. Interactive GP.
3. Method of Satisfactory Goals.

وأهم ما يميز هذه الطرائق اعتمادها على التفاعل ما بين متخذ القرار ومراحل الحل وبهذا سيكون متخذ القرار شريكاً في الحل وتعتمد النتائج بصورة أساسية على ما يقدمه من تفضيلات أثناء الحل.

4. نموذج (MOMP) مع أوزان مجهولة الدوال:

وفي هذا النوع من النماذج تكون الأوزان غير معلومة الأهمية النسبية للدوال قيد الحل. وبهذا يمكن التعبير عن نموذجها العام بالشكل (8) الاتي:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ [\ W_1 f_1 (\underline{x}), W_2 f_2 (\underline{x}), \ldots, W_j f_j (\underline{x}), \ldots, W_k f_k (\underline{x})] \\ \quad \text{s. to: } g_i (\underline{x}) \le o, \\ \qquad j = 1,2,\ldots, k \\ \qquad i = 1,2,\ldots, m \\ \quad \text{Such that:} \\ \quad W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1 \\ \quad 0 \le W_j \le 1 \quad \forall\ W_j \quad \text{and unknown} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

والطرائق الخاصة بإيجاد الحلول النهائية لهذا النوع تسمى بالطرائق المولدة Generation Methods وهي من الطرائق المعقدة والصعبة والتي تعطينا أعدادا كبيرة من الحلول النهائية على متخذ القرار أن يقيمها ويعطي الأوزان بحقها.

ومن أهم الطرائق المتعارف عليها هي:

1. Parametrices Method.
2. Constraints Method.

ثالثاً. ماهية طريقة المعيار الشامل

إن طريقة المعيار الشامل تعتبر من الطرائق القلائل التي اهتمت بايجاد الحلول النهائية لمشاكل القرار المقيدة والتي أمكن التعبير عنها رياضياً بالنموذج الرياضي (MOMP) ذي الرقم (4) والمعرف سابقاً، والذي يتميز بعدم وجود أية أسبقيات P_j أو أوزان W_j.

ويرى الباحث إن أهم خصائص هذه الطريقة:

- عدم حاجتها إلى أية معلومات تفضيلية (أسبقيات P_j أو أوزان W_j) عن دوال الأهداف المتعددة التي يحتويها النموذج قيد الحل.

- إمكانية استخدامها في نماذج (MOMP) الخطية منها وغير الخطية.
- تجزئتها للمشكلة الرئيسة Main Problem إلى عدة مـشاكل فرعيـة Sub-Problem أصغر حجماً بعدد الدوال j.
- استخدامها لخوارزميات داخلية معروفة(*) أثناء مراحل الحل مثـل Simplex وSUMT.
- قابليتها على إيجاد عدد كبير من الحلول الممكنة توصف بأنها حلول غير سائدة Non-Dominated Solutions.

أما فلسفة طريقة المعيار الشامل فهي احتوائها على مجموعـة إجـراءات وخطوات تؤدي بالنهاية إلى إيجاد تصغير للدالة Min.F تعبر عن مربع مجمـوع الانحرافات النسبية ما بين الحلول المثلى للمسائل الفرعية f_j ($\underline{x}$*) ودوالهـا f_j ($\underline{x}$) الأصلية.

ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بنموذج لا خطي (تربيعي) يكتـب عـادةً بالنموذج ذي الرقم (9) الاتي:

(*) تعرف طريقة Simplex بأنها " مجموعة من الخطوات التي تبدأ بـافتراض حـل أساسـي صفري ومن ثم تحسن الحل اعتماداً على اختيار المتغير الداخل والخارج وباعتماد العنـصر المحوري يتم الحصول على حل أفضل وهكذا على عدة خطوات حتى التوصل إلـى الحـل النهائي الأمثل". ولمزيد من التفاصيل أنظر:

Render, Op. Cit., PP. 233-445.

أما تقنية (SUMT) فيمكن تعريفها بأنها " طريقة تعتمد دالة افتراضية أولية لتجميـع دالـة الهدف والقيود ومن ثم اختيار قيم افتراضية أولية للحصول على حل أولي ومن ثـم تحـسين الحل باعتماد العديد من الإجراءات الرياضية المعقدة ". وينوه الباحث بصعوبة العمـل بهـذه الطريقة يدوياً ولابد من اللجوء إلى البرامج المحوسبة لإيجاد الحلول حتى لو كانت المـسائل بسيطة أو قليلة المتغيرات. ولمزيد من التفاصيل:

1. Taha, Op. Cit., PP. 450-520.
2. سعيد، همسة ثروت، "التقصي في خوارزميات الأمثلية العامة بالاعتماد على النمـاذج التربيعية وغير التربيعية "، 2005، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كليـة العلـوم، جامعة الموصل.

$$\left.\begin{aligned}&\min F_p=\left[\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{f_j(\underline{x}^*)-f_j(\underline{x})}{f_j(\underline{x}^*)}\right]\right]^p\\&\quad\text{s. to: } g_i(\underline{x})\le o,\\&\qquad j=1,2,\ldots,k\\&\qquad i=1,2,\ldots,m\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

رابعاً. خوارزمية المعيار الشامل والمخطط الانسيابي لها

تحقيقاً لأهداف البحث، تم إنجاز خوارزمية تفـصيلية لمراحـل الـصياغة وإيجاد الحل النهائي باستخدام طريقة المعيار الشامل لحل مشكلة البحث وكالآتي:

. البداية.

خ$_1$. صياغة مشكلة القرار الرئيسة (MCDM) وفق نمـوذج (MOMP) الاتـي تحديداً.

$$\left.\begin{aligned}&VMP\Rightarrow \max\,[\,f_1(\underline{x}),\,f_2(\underline{x}),\,\ldots,\,f_j(\underline{x}),\,\ldots,\,f_k(\underline{x})]\\&\quad\text{s. to: } g_i(\underline{x})\le o,\\&\qquad j=1,2,\ldots,k\\&\qquad i=1,2,\ldots,m\end{aligned}\right\}$$

نموذج ذي الرقم (4) السابق

Such that:

$P_1 = P_2 = \ldots = P_k = 1$

$W_1 = W_2 = \ldots = W_k = 1$

خ$_2$. تجهيز عداد:

$J = 0$

$J = J + 1$

خ$_3$. اشتقاق نموذج المشكلة الفرعية عند (J = 1):

$$\left.\begin{aligned}&\max\,[\,f_1(\underline{x})\,]\\&\text{s. to: } g_i(\underline{x})\le o,\quad i=1,2,\ldots,m\end{aligned}\right\}$$

خ$_4$. اختبار خطية النموذج الفرعي (J = 1) وكالآتي:

.. إذا كان النموذج خطياً (نستخدم طرائق حل نماذج البرمجة الخطية مثل Simplex).

.. إذا كان النموذج غير خطي (نستخدم طرائق حل النماذج غير الخطية مثل SUMT).

خ5. إنشاء جدول بالحلول المثلى الأولية المستخرجة من المشاكل الفرعية وكالآتي:

$[\, f_1 (\underline{x}^*), \underline{x}^*, \ldots, f_k (\underline{x}^*), (\underline{x}^*)]$

خ6. اختبار العداد (J < K) وكالآتي:

.. إذا كان (J < K). أذهب إلى خ2.

.. إذا كان (J = K). استمر.

خ7. إعادة صياغة نتائج الحلول المثلى الأولية وفق نموذج (الانحرافات النسبية) الاتي تحديداً:

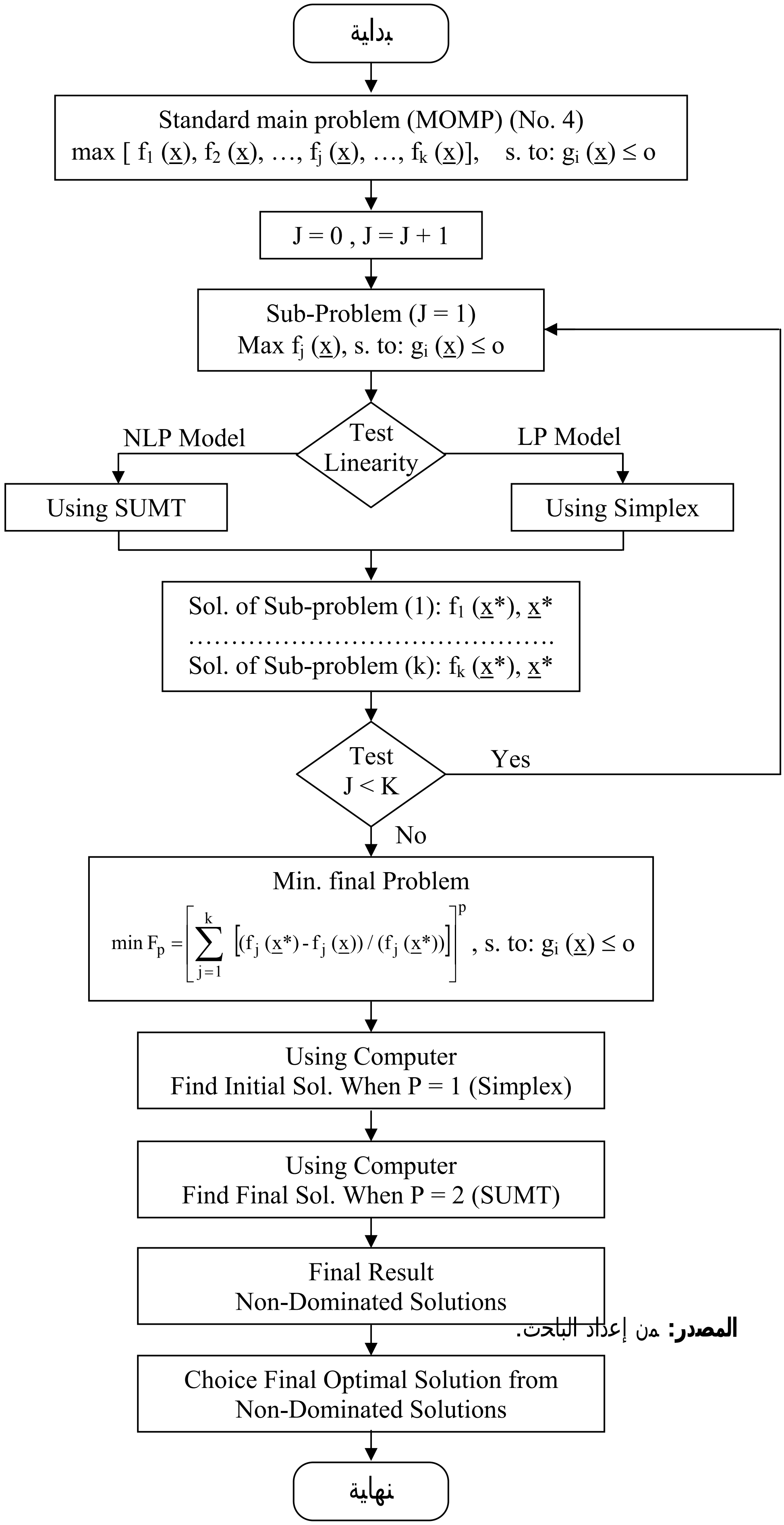
$$\left.\begin{aligned} \min F_p &= \left[\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{f_j (\underline{x}^*) - f_j (\underline{x})}{f_j (\underline{x}^*)}\right]\right]^p \\ \text{s. to: } & g_i (\underline{x}) \le o, \\ & j = 1,2,\ldots, k \\ & i = 1,2,\ldots, m \end{aligned}\right\} \text{نموذج رقم (9) السابق}$$

خ8. لإيجاد الحل الأولي للنموذج الخطي عند (P = 1). باستخدام Simplex Method.

خ9. لإيجاد الحل النهائي للنموذج التربيعي بوضع (P = 2) باستخدام SUMT Method.

خ10. عمل جدول بأفضل الحلول الممكنة النهائية ومن ضمنها الحل الأمثل (الحلول غير السائدة).

ويمكن التعبير عن الخوارزمية المقترحة أعلاه بالمخطط الانسيابي الاتي:



المصدر: من إعداد الباحث.

خامساً. ماهية الحلول غير السائدة

استمر البحث(*) ومحاولة الوصول إلى الحل الأمثل Optimal Solution (والذي يمثل الحد الأقصى الممكن الوصول إليه، ولا يوجد حل أفضل منه إطلاقاً وغالباً ما يكون وحيداً) طوال عقود الخمسينات والستينات والسبعينات أيضاً. وفي عقدي الثمانينات والتسعينات أخذت مصطلحات وحلول أخرى بالظهور فعلياً والاستخدام في كثير من التطبيقات منها مصطلح الحلول المرضية Satisfactory Solutions (والذي يمكن تعريفه بأن متخذ القرار يقبل ببديل أقل من الحد الأمثل أو الأقصى) ومصطلح الحلول غير السائدة Non-Dominated Solutions تأخذ حيزاً أكبر في التحليلات والاستخدام والسبب يعود طبعاً إلى تطور نماذج البرمجة الرياضية (MP) إلى (MOMP) المولدة لهذه الحلول وسعة استخدامها في عملية اتخاذ القرارات وتحليلها تحت عدة معايير (MCDM, MCDA).

ويعرف الحل السائد كالآتي:

" حلاً ممكناً حيث أن الزيادة في قيمة أي معيار يمكن إنجازها فقط على حساب نقصان قيمة على الأقل أحد المعايير الأخرى "،

أو

" حلاً ممكناً لا نستطيع فيه زيادة قيمة أحدى الدوال المعظمة إلا بالتأثير سلبياً على الأقل في قيمة دالة تعظيمية أخرى ".

الجانب العملي

بأخذ ما ورد في متن مشكلة البحث النظرية وأهدافه المعلنة، يمكن تمثيل مشكلة البحث بوصفها حالة دراسية مفترضة على إحد المستشفيات الخاصة لصعوبة الحصول على بيانات ذات شفافية ومصداقية عالية في وقتنا الراهن.

(*) ينوه الباحث بان الحل الأمثل سيبقى الهدف الأسمى الذي يشغل بال متخذي القرار. وفي هذا الصدد يقول العالم H. Simon ما معناه " لا أحد سيقبل بالحل المرضي (الذي هو دون الحل الأمثل) إذا ما كان باستطاعته الوصول إلى الحد الأقصى (الحل الأمثل) ".

ولأن الهدف من البحث هو إبراز طريقة المعيار الشامل بوصفها إحدى الطرائق الملائمة لإيجاد العديد من الحلول غير السائدة للمشكلة التي تواجه متخذ القرار والموصوفة نظرياً في مشكلة البحث سابقاً.

وأدناه التعبير عن المشكلة الموصوفة نظرياً بأخذها كحالة دراسية عملية:

" مستشفى خاص لديه الرغبة بتعظيم أرباحه من العمليات الجراحية للأطفال، وفي ذات الوقت لديه الرغبة بتعظيم أرباحه من العمليات الجراحية النسائية في ظل محدودية الموارد البشرية المشخص أهمها بالملاك الطبي التخصصي والمساعدين ومحدودية الموارد المادية المشخص أهمها بعدد صالات العمليات ".

وفيما يأتي الخطوات التفصيلية لإيجاد الحل النهائي للمشكلة أعلاه:

أولاً. صياغة المشكلة

في هذه الخطوة الأولية تم تحديد ما يأتي:

1. **متغيرات القرار** : وتم تحديدها كالآتي:

X_1 عدد العمليات الكبرى الخاصة بجراحة الأطفال.

X_2 عدد العمليات الوسطى الخاصة بجراحة الأطفال.

X_3 عدد العمليات الكبرى الخاصة بجراحة النسائية.

X_4 عدد العمليات الوسطى الخاصة بجراحة النسائية.

2. **المعايير والأهداف**: وتم تحديدها كالآتي:

المعيار الأول: أرباح قسم جراحة الأطفال: ممثلة بدالة الهدف الأولى f_1 (تعظيم الأرباح المتأتية من جراحة الأطفال).

المعيار الثاني: أرباح قسم الجراحة النسائية: ممثلة بدالة الهدف الثانية f_2 (تعظيم الأرباح المتأتية من جراحة النساء).

علماً أنه لا وجود لأية تفضيلات أو أوزران أو أسبقيات لهذه الدوال لدى متخذ القرار.

3. القيود (الإمكانيات): وتم افتراضها كالآتي:

أ. محدودية الملاك الطبي التخصصي.

ب. محدودية الملاك الطبي المساعد.

ج. محدودية صالات العمليات.

ثانياً. بناء النموذج الرياضي

لتمثيل مشكلة البحث المبين أبعادها عند الصياغة، تم اختيار التمثيل الرياضي لها بواسطة "نموذج برمجة رياضية متعددة الدوال" بوصفه أفضل نموذج يمثل واقع المشكلة قيد الدراسة وكالآتي:

1. متجه تعظيم المشكلة Vector Maximize Problem

وهو ما يقابل مصطلح دالة الهدف في البرمجة الرياضية التقليدية، وفي هذا النموذج دالتان تراكميتان موصوفة خطياً كالآتي:

$$VMP \Rightarrow \quad \max f_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\max f_2 = c_3 x_3 + c_4 x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

2. القيود Constraints

وتمثل قيود الموارد المتاحة البشرية والمادية المفترضة بشكلٍ خطي وكالآتي:

1. قيد محدودية الملاك الطبي التخصصي

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \leq b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

إذ يمثل القيد الأول عدد ساعات العمل المتاحة من قبل الأطباء المتخصصين في جراحة الأطفال حصراً، والقيد الثاني يمثل عدد ساعات العمل المتاحة من قبل الأطباء المتخصصين في الجراحة النسائية.

2. قيد محدودية الملاك الطبي المساعد

$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4 \quad \leq b_3$ …………. (3)

3. قيد محدودية صالات العمليات

$a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4 \quad \leq b_4$ …………. (4)

أما القيود المنطقية فيمكن تحديدها $(x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0)$ كقيود عدم سالبية ويفضل توفر قيد الأعداد الصحيحة لمتغيرات القرار قدر الإمكان Integer Number x_1, x_2, x_3, x_4.

وبهذا نلاحظ أن النموذج الرياضي المتعدد الدوال يحتوي على (a, b) دالة هدف بأربعة متغيرات قرار و(4) قيود فنية وقيدين منطقيين.

وبهذا يكون نموذج البرمجة الرياضية المتعدد الدوال الخاص بالحالة الدراسية قيد الحل هو:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{VMP} \Rightarrow & \max f_1 = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 & \\
 & \max f_2 = c_3\,x_3 + c_4\,x_4 & \\
\text{s. to:} & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 & \leq b_1 \\
 & \qquad a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 & \leq b_2 \\
\multicolumn{2}{l}{a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4} & \leq b_3 \\
\multicolumn{2}{l}{a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4} & \leq b_4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \quad \text{Integer Number} &
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ثالثاً. خطوات الحل اليدوي والمحوسب بطريقة المعيار الشامل

نظرا لعدم توافر حزمة برمجية متكاملة خاصة بإيجاد الحلول النهائية بطريقة المعيار الشامل، فإن التوصل إلى الحلول النهائية سيكون مجموعة من الخطوات اليدوية والمحوسبة بناء على ما ورد في الخوارزمية والمخطط الانسيابي المقترحين لإنجاز الحلول النهائية.

وبالأخذ بحقيقة إن المشكلة قيد الدراسة في بحثنا هذا هي مشكلة قرار ممثلة رياضياً بالنموذج ذي الرقم (4) والمعرف ضمن نماذج (MOMP) بدوال وقيود خطية العلاقة، واحتوائه على أقل عدد من دوال الأهداف $(K = 2)$ سيؤدي هذا

الوصف والتشخيص للمشكلة إلى اختصار خطوات الخوارزمية العامة عملياً إلـى عدد أقل من الخطوات وكالآتي:

خ$_1$. تدوين المشكلة الرئيسية:

يجب أن تكون المشكلة المصاغة عملياً علـى وفـق النمـوذج الرياضـي (MOMP) ومن دون أية أسبقيات P_j أو أوزان W_j مطلقاً وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{llr} VMP \Rightarrow & \max f_1 = 120\$\ x_1 + 130\$\ x_2 & \\ & \max f_2 = 65\$\ x_3 + 40\$\ x_4 & \\ s.\ to: & 2x_1 + 1.5x_2 & \le 35 \\ & 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 50 \\ \multicolumn{2}{l}{0.5x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 + 1.5x_4} & \le 55 \\ \multicolumn{2}{l}{2x_1 + 1.5x_2 + 1.8x_3 + 1.3x_4} & \le 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & & \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} & \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

خ$_2$. تجزئة المشكلة الرئيسية إلى K من المشاكل الفرعية:

وبهذا سنحصل على المشاكل الفرعية الاتية:

1. When J = 1 $\Rightarrow$ Sub-Problem 1 :

$$\left.\begin{array}{llr} \max f_1 = 120\$\ x_1 + 130\$\ x_2 & & \\ s.\ to: & 2x_1 + 1.5x_2 & \le 35 \\ & 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 50 \\ \multicolumn{2}{l}{0.5x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 + 1.5x_4} & \le 55 \\ \multicolumn{2}{l}{2x_1 + 1.5x_2 + 1.8x_3 + 1.3x_4} & \le 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & & \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} & \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

وبتفحص وتحليل المشكلة الفرعية (1) والممثلة بالنموذج (12) نلاحظ بأنها مشكلة برمجة خطية عامة يمكن حلها بكل سهولة بطريقة السمبلكس. وإن النتـائج النهائية المثلى لها يمكن تدوينها بالمتجه الاتي:

$$[\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 23,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ f_1^* = 2290\$,\ f_2^* = 0\$\ ]$$

1. When J = 2 ⇒ Sub-Problem 2 :

$$\left.\begin{array}{lr} \max f_2 = 65\$\ x_1 + 40\$\ x_2 & \\ \text{s. to:}\quad 2x_1 + 1.5x_2 & \le 35 \\ 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 50 \\ 0.5x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 + 1.5x_4 & \le 55 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 1.8x_3 + 1.3x_4 & \le 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \text{Integer Number} & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

وبتفحص وتحليل المشكلة الفرعية (2) والممثلة بالنموذج (13) نلاحظ بأنها مشكلة برمجة خطية عامة يمكن حلها بكل سهولة بطريقة الـسمبلكس أيـضاً. وإن النتائج النهائية المثلى لها يمكن تدوينها بالمتجه الاتي:

$$[\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 22,\ x_4^* = 0,\ f_1^* = 0\$,\ f_2^* = 1430\$\ ]$$

خ3. إنشاء جدول الحلول النهائية المثلى للمشاكل الفرعية:

وهنا يتم تدوين الحلول النهائية المثلى التي تم الحـصول عليهـا فـي خ2 حصراً، وتكتب على شكل جدول يطلـق عليـه جـدول الـدفع Pay off Table وكالآتي:

الجدول (1)

جدول الدفع

$f_j(\underline{x})$ \ $f_j(\underline{x}^*)$	$f_1(\underline{x}^*)$	$f_2(\underline{x}^*)$	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
$f_1(\underline{x}) = 120\$\ x_1 + 130\$\ x_2$	2990$	0	0	23	0	0
$f_2(\underline{x}) = 65\$\ x_1 + 400\$\ x_2$	0	1430$	0	0	22	0

خ4. صياغة نموذج الانحرافات النهائي:

استناداً إلى ما تم إنجازه من حلول مثلى أولية مدونة في جدول الدفع رقـم (1) أعلاه. يمكن صياغة نموذج تدنية مربع مجموع الانحرافات النسبية للفروقـات ما بين نتائج الحلول المثلى $f_j(\underline{x}^*)$ والدوال الأصلية $f_j(\underline{x})$ وكالآتي:

$$\min F_p = \left[\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{f_j(\underline{x}^*) - f_j(\underline{x})}{f_j(\underline{x}^*)}\right]\right]^p$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{f_j(\underline{x}^*) - f_j(\underline{x})}{f_j(\underline{x}^*)}\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{2290 - (120\,x_1 + 130\,X_2)}{2290}\right]^2 + \left[\frac{1430 - (65\,x_1 + 40\,X_2)}{1430}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\begin{aligned} \text{s. to:}\quad & 2\,x_1 + 1.5\,x_2 \le 35 \\ & 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \le 50 \\ & 0.5\,x_1 + 0.75\,x_2 + 1.5\,x_3 + 1.5\,x_4 \le 55 \\ & 2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.8\,x_3 + 1.3\,x_4 \le 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

خ5. استخراج أفضل الحلول الممكنة النهائية:

يمكن ملاحظة أن النموذج أعلاه ذا الرقم (14) اعلاه يمثل مشكلة برمجة لا خطية (تربيعية) يمكن حلها بالاعتماد على تقنية التصغير المتعاقـب غيـر المقيـد SUMT المحوسبة وكالآتي:

إن تقنية SUMT تتطلب جهداً متميزاً لتحديد المتغيرات الأساسية الأوليـة (Initial Value) للوصول إلى الحل الأمثل النهائي.

وبإجراء أكثر من 40 محاولة إدخال، تم حصر أفضل 10 نتائج ودونـت تفاصيلها في الجدول (2) الاتي:

الجدول (2)

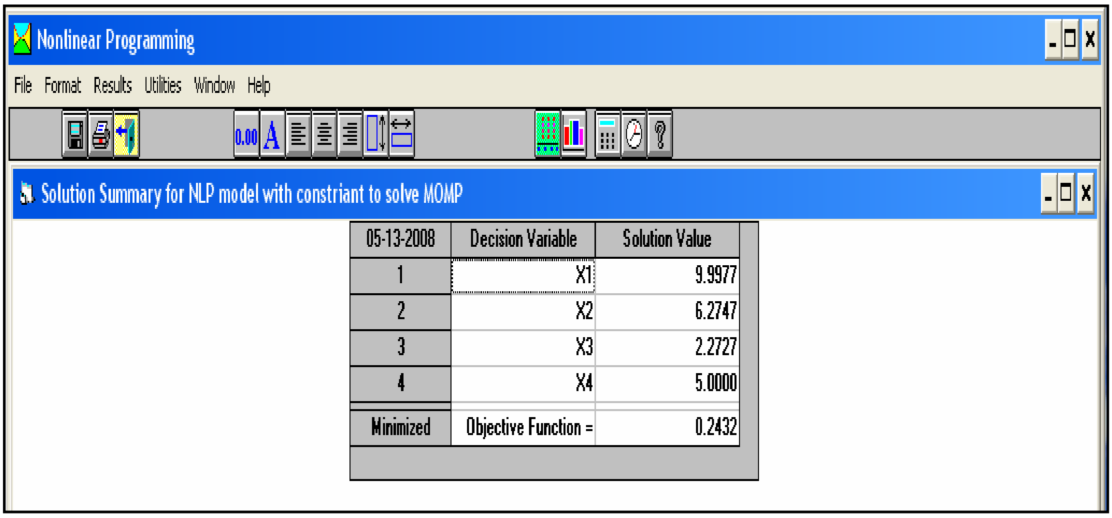
أفضل الحلول الممكنة بأعدادها الكسرية الأصلية

No.	Decision Variables				Min $F_{P=2}$
	X_1	X_2	X_3	X_4	Min
1	8.4990	5.0088	5	5	0.4194
2	10.0242	5.0004	3.3061	5	0.3082
3	8.4998	5.0002	5	5	0.4194
4	8.4998	5.0002	5	5	0.4194
5	9.9977	6.2747	2.2727	5	0.2432
6	7.9982	5.6684	5	5	0.4155
7	5.0225	5.023	5.2339	10	0.7349
8	9.9977	5.0692	4	4	0.3062
9	6.1991	6.0005	6	6	0.5433
10	8	5	5	5	0.4194

رابعاً. التحليلات

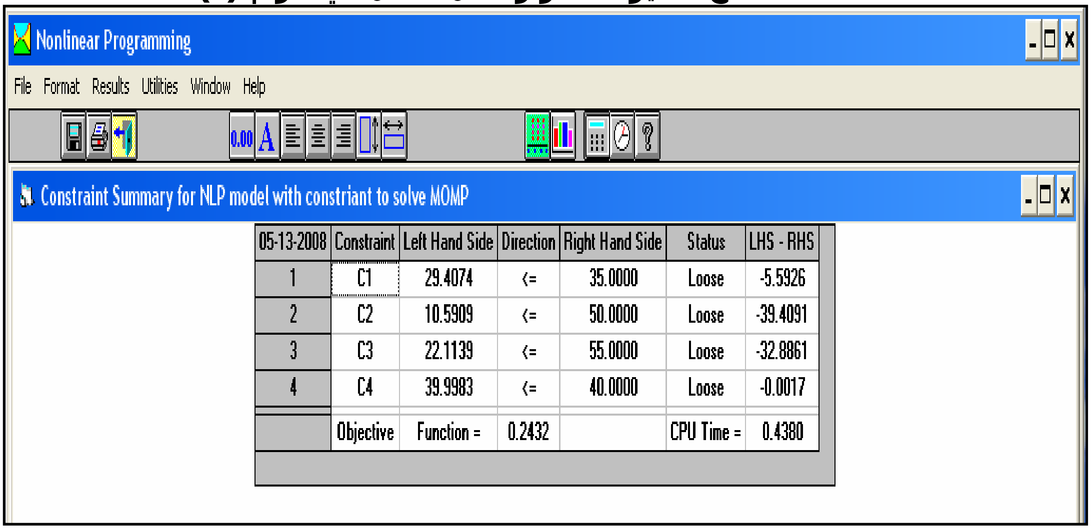
1. التحليلات استناداً إلى نتائج طريقة المعيار الشامل:

- إن الحلول النهائية المتحصل عليها في الجدول (2) السابق الناتجة من الحل بطريقة المعيار الشامل للنموذج (MOMP) من دون أسبقيات P_j ولا أوزان W_j المدون في النموذج التطبيقي ذي رقم (14)، ينطبق عليها عملياً التعريف النظري للحلول غير السائدة مع الانتباه أنه يمكن اعتماد الحل رقم (5) حلاً أمثل من بين هذه الحلول والشكلان (3) و(4) أدناه تمثلان النتائج النهائية لمتغيرات القرار الخاصة بالحل الأمثل ذي الرقم (5) ونتائج القيود الخاصة بذات الحل أيضاً، وسيتم تحليل ذلك تفصيلاً لاحقاً.



الشكل (3)

نتائج متغيرات القرار للحل الأمثل ذي الرقم (5)



05-13-2008	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Status	LHS - RHS
1	C1	29.4074	<=	35.0000	Loose	-5.5926
2	C2	10.5909	<=	50.0000	Loose	-39.4091
3	C3	22.1139	<=	55.0000	Loose	-32.8861
4	C4	39.9983	<=	40.0000	Loose	-0.0017
	Objective	Function =	0.2432		CPU Time =	0.4380

الشكل (4)

نتائج القيود للحل الأمثل ذي الرقم (4)

- إن الحلول الممكنة النهائية في الجدول (2) السابق لا تتلاءم منطقياً مع طبيعة متغيرات القرار (عمليات جراحية) والتي تُمثل بأعداد صحيحة. ولهذا لابد من تقريبها من صورتها الكسرية حالياً إلى أعداد صحيحة.
- عند إجراء عملية التقريب فلابد من الاحتفاظ بجوهر نوعية هذه الحلول والتي هي بالأصل يمكن تعريفها بكل بساطة بأنها حلول ممكنة Feasible Solution وهذا يعني أنها كانت تحقق جميع قيود المشكلة معاً ويجب أن يستمر تحقق هذا الشرط الجوهري ما بعد عملية التقريب واستثناء كل التقريبات التي قد تتجاوز هذه القيود. وسيتم الاعتماد لهذه التقريبات على الفرق ما بين موارد القيد الرابع والمستغل منه وهذا يعني الفرق ما بين R.H.S وL.H.S. للقيد الأكثر تشدداً وفعالية C4 مقارنة ببقية حلول المشكلة التي مازال يوجد فيها فائض غير مستغل.

• الجدول (3) أدناه يمثل ملخص الحلول النهائية بأعدادها الـصحيحة المحولـة بعد استبعاد جميع الحلول غير الممكنة (خارج منطقة الحل الممكنة) وكـذلك حذف المتطابق منها.

الجدول (3)
أفضل الحلول الممكنة بأعدادها الصحيحة

تسلسل الحلول	نتائج متغيرات القرار				نتائج دوال الهدف		الأرباح الإجمالية	معيار min $f_{p=2}$	L.H.S ≤ R.H.S
	x_1	x_2	x_3	x_4	f1*=120$ x_1+120$ x_2	f2*=65$ x_1+40$ x_2	Total Profit= f_1*+f_2*	Criteria	C4
1	8	5	5	5	1610$	525$	2135$	0.4194	39≤40
2	10	5	4	4	1850$	420$	2270$	0.3082	39.9≤40
3	6	6	6	6	1500$	650$	2130$	0.5433	39.6≤40
4	10	6	3	4	1980$	355$	2335$	0.2432	39.6≤40

وبتحليل نتائج الجدول (3) أعلاه نجد ما ياتي:

1. إن الحل الأمثل استناداً إلى مخرجات الحاسوب اعتماداً على خوارزمية المعيار الشامل هو الحل ذي الرقم (4) اعتماداً على أقل قيمة تصغيرية تحققهـا دالـة الانحرافات النسبية min f = 0.2432 بعد التقريب في الجـدول (3) أعـلاه، والذي يمكن تمثيله بالمتجه الاتي:

[x_1 = 10, x_2 = 6, x_3 = 3, x_4 = 4, f_1 = 1980$, f_2 = 355$, Total Profit = 2335$] ...(A)

وهذا يعني تفصيلياً ما ياتي:

$x_1 = 10$ (تمثل عدد العمليات الجراحية أطفال / كبرى)

$x_2 = 6$ (تمثل عدد العمليات الجراحية أطفال / وسطى)

$x_3 = 3$ (تمثل عدد العمليات الجراحية نساء / كبرى)

$x_4 = 4$ (تمثل عدد العمليات الجراحية نساء / وسطى)

وإن أرباح الدوال f_1 وf_2 تفصيلياً هي:

Max f_1 = 1980$
Max f_2 = 335$

وهذا سيؤدي بالاستنتاج إلى أن الأرباح الإجمالية هي:

Total Profit = 2335$

2. إن جميع الحلول النهائية ذو التسلسل 1، 2، 3، 4 المدونة في الجدول (3) السابق هي بالأصل حلول ممكنة لكنها توصف بأنها حلول غير سائدة Non-Dominated Solutions كما ذكرنا سابقاً ويمكن توضيح ذلك تحديداً كالآتي:
   - إذا ما أردنا زيادة قيمة الدالة f_1 المقدرة بـ $1610 في الحل ذي الرقم (1) فإن ذلك ممكناً من خلال الحل ذي الرقم (2) لتصبح $1850 لكن ذلك لن يتم إلا على حساب النقصان في قيمة الدالة f_2 من $525 إلى $420.
   - إذا ما أردنا زيادة قيمة الدالة f_2 تحديداً والمقدرة بـ $420 في الحل ذي الرقم (2) فإن ذلك ممكن أيضاً من خلال الحل ذي الرقم (3) بمقدار $650 لكن ذلك لن يتم إلا على حساب النقصان في قيمة الدالة f_1 من $1850 إلى $1500.
3. إن الحل الأمثل استناداً إلى مجموع الأرباح الإجمالية هو الحل ذي الرقم (4) أيضاً بقيمة مقدارها $2325 وإن الحل الأقرب إليه بالترتيب هو الحل ذي الرقم (2) بقيمة مقدارها $2270 وبعد ذلك سيكون الحل ذي الرقم (1) بقيمة مقدارها $2135 والحل ذي الرقم (3) بقيمة مقدارها $2130 على التوالي.
4. إن محاولة تغيير قيمة الدالة f_1 أو f_2 سيكون له تأثير مباشر على مجموع الأرباح الكلية قد يكون إيجابياً عند تغيير f_1 في الحل ذي الرقم (1) إلى الحل ذي الرقم (2) (من $1135 إلى $2270) أو قد يكون سلبياً في أحيان أخرى فعند تغيير f_2 في الحل ذي الرقم (2) إلى الحل ذي الرقم (3) فإن ذلك سيؤدي إلى نقصان من ($2270 إلى $2230).

2. التحليلات استناداً إلى نتائج (LP) و(MOLP):

لمعرفة موقع الحلول المستخرجة بطريقة المعيار الشامل والمبينة في الجدول (3) على خط الأعداد الحقيقية، سيتم مقارنة هذه النتائج وتحليلها استناداً إلى

ما يمكن التوصل إليه من نتائج نهائية إذا مـا صـيغت المـشكلة قيـد الدراسـة (افتراضياً)(*) على إنها:

1. مشكلة برمجة رياضية (MP) تقليدية تمتلك دالة هدف وحيدة لتعظيم الأربـاح الإجمالية وبهذا سيكون النموذج عند الصياغة هو نموذج برمجة خطية (LP).
2. مشكلة برمجة رياضية متعددة الدوال (MOMP) لكنها تحتوي أسبقيات P_1, P_2 للدوال الربحية المعايير f_1, f_2 ، وبهذا سيكون لدينا تحديداً نموذجان للبرمجـة الخطية المتعددة الدوال (أو الأهداف) (MOLP) متطابقان بالشكل ومختلفـان جوهرياً بتسلسل الأسبقيات للدوال f_1 , f_2 قيد الدراسـة، والنموذجـان اللـذان سيكونان لدينا هما (MOLP1)، (MOLP2).

فيما ياتي تفاصيل الصياغة والحلول لكلا الحالتين أعلاه (1 و2):

1. إن صياغة مشكلة البحث على إنها مشكلة (MP) تقليدية ستشكل لدينا نمـوذج (LP) الاتي:

$$\left.\begin{array}{lll} VMP \Rightarrow & \max f = 120\$\, x_1 + 130\$\, x_2 + 65\$\, x_3 + 40\$\, x_4 & \\ \text{s. to:} & 2\, x_1 + 1.5\, x_2 & \le 35 \\ & 1.8\, x_3 + 1.3\, x_4 & \le 50 \\ 0.5\, x_1 + 0.75\, x_2 + 1.5\, x_3 + 1.5\, x_4 & & \le 55 \\ 2\, x_1 + 1.5\, x_2 + 1.8\, x_3 + 1.3\, x_4 & & \le 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & & \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{Integer Number} & \end{array}\right\} \ldots\ldots (15)$$

إن النتائج النهائية للنموذج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه الاتي:

$$[\, x_1 = 0,\ x_2 = 23,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0,\ \text{Total Profit} = 3185\$\,] \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

2. إن صياغة مشكلة البحث على إنها (MOMP) ذات أسبقيات P_1, P_2 للـدوال f_1, f_2 قيد الدراسة سيشكل لدينا ما ياتي:

(*) إن هذا الافتراض هو بالحقيقة أبسط أنواع تحليل الحساسية المستخدم في نماذج (MCDM) المسمى What...if والغاية منه إظهار موقع النتائج المستخرجة النهائية مقارنة بنتائج بديلـة مفترضة.

أ. نموذج (MOLP1) ذو الرقم (16) يمتلك أسبقيات p_1, p_2 لـ دوال f_1, f_2 وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{lll} VMP \Rightarrow & \max f = [\, P_1\,(120\$\, x_1+130\$\, x_2)\,,\; P_2\,(65\$\, x_3+40\$\, x_4)] & \\ s.\ to: & 2 x_1 + 1.5 x_2 & \leq 35 \\ & 1.8 x_3 + 1.3 x_4 & \leq 50 \\ & 0.5 x_1 + 0.75 x_2 + 1.5 x_3 + 1.5 x_4 & \leq 55 \\ & 2 x_1 + 1.5 x_2 + 1.8 x_3 + 1.3 x_4 & \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \text{Integer Number} & \\ & P_1 >>> P_2 & \end{array}\right\} \ldots\ldots.(16)$$

إن النتائج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه الاتي:

$[x_1 = 0, x_2 = 23, x_3 = 3, x_4 = 0, f_1 = 2990\$, f_2 = 195\$, \text{Total Profit} = 3185\$]$..(C)

ب. يمتلك نموذج (MOLP2) ذو رقم (17) أسبقيات p_1, p_2 لـ دوال f_2, f_1 وكالآتي:

$$\left.\begin{array}{lll} VMP \Rightarrow & \max f = [\, P_1\,(65\$\, x_3+40\$\, x_4)\,,\; P_2\,(120\$\, x_1+130\$\, x_2)] & \\ s.\ to: & 2 x_1 + 1.5 x_2 & \leq 35 \\ & 1.8 x_3 + 1.3 x_4 & \leq 50 \\ & 0.5 x_1 + 0.75 x_2 + 1.5 x_3 + 1.5 x_4 & \leq 55 \\ & 2 x_1 + 1.5 x_2 + 1.8 x_3 + 1.3 x_4 & \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \text{Integer Number} & \\ & P_1 >>> P_2 & \end{array}\right\} \ldots\ldots.(17)$$

إن النتائج أعلاه يمكن تلخيصها بالمتجه الاتي:

$[x_1 = 16, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 3, f_1 = 390\$, f_2 = 1120\$, \text{Total Profit} = 1510\$]$..(D)

بتحليل النتائج الممثلة بالمتجهات أعلاه (B) و(C) و(D) نجد ما ياتي:

1. ارتفاع الأرباح الإجمالية لنموذجي (LP) و(MOLP1) إلى حد أقصى مقدر بـ 3185$.
2. انخفاض الأرباح الإجمالية لنموذج (MOLP2) تحديداً إلى 1510$.
3. نموذجي (LP) و(MOLP1) تحديداً يحتويان على قيماً صفرية لمتغيرات القرار $x_1=x_4=0$ أو $x_3=0$ على التوالي، وهذا يعني إنهما حلان منحلان بلغة البرمجة الرياضية.

3. التحليلات والمقارنات استناداً إلى تحليل القرارات تحت عدة معايير (MCDA):

لمعرفة مدى واقعية الحلول المستخرجة بطريقة المعيار الشامل ومنطقيتها وعقلانيتها عند التطبيق وبما يقدم أفضل المنافع المادية والمعنوية للنظام قيد الدراسة ويقلل المخاطر في المديين القريب والبعيد. لابد من إجراء تحليلات ومقارنات وتقييمات لهذه الحلول مقارنة بالحلول الافتراضية لنموذجي (LP) و(MOLP) وكالآتي:

- **الحل الأمثل باستخدام نموذج (LP):**

[$x_1 = 0$, $x_2 = 23$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, Total Profit = 3185$]............................. (B)

- **الحلول المثلى باستخدام نموذج (MOLP):**

[$x_1 = 0$, $x_2 = 23$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $f_1 = 2990$$, $f_2 = 195$$, Total Profit = 3185$] ....(C)

[$x_1 =16$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $f_1 = 390$$, $f_2 = 1120$$, Total Profit = 1510$] ....(D)

- **الحل الأمثل باستخدام طريقة المعيار الشامل:**

[$x_1= 10$, $x_2= 6$, $x_3= 3$, $x_4= 4$, $f_1= 1980$$, $f_2= 355$$, Total Profit = 2335$] .... …(A)

بتحليل المتجهات أعلاه (A, B, C, D) وتقييمها ومقارنتها يمكن تدوين ما يلي:

1. إن النتائج النهائية لنموذج (LP) ونموذج (MOLP1) تعطينا أرباحا إجمالية قصوى تقدر بـ (3185$) وهي تفوق ما يمكن تحقيقه بطريقة المعيار الشامل والمقدرة (2335$) إلا أن ذلك سيعطل الطاقات الطبية التخصصية والمساعدة المتاحة في أقسام جراحية أخرى بجعل ($x_1=x_4=0$)، بينما الحل الذي تقدمه طريقة المعيار الشامل هو تفعيل شامل لجميع الطاقات الطبية التخصصية والمساعدة بصورة متوازنة ووسطية ممثلة بالنتائج ($x_1=10, x_2=6, x_3=3, x_4=4$).
2. أما النموذج (MOLP2) فيعطي أرباحاً متدنية تقدر بـ 1510$ مقارنة بالنماذج الأخرى القصوى منها (LP) و(MOLP1) والبالغ 3185$ وكذلك طريقة المعيار الشامل البالغ 2335$.
3. توليد بطالة مقنعة تخص الملاك الطبي المتخصص والمساعد في المستشفى بجعل ($x_1=x_4=0$) في نموذجي (LP) و(MOLP1) وبطالة أقل في نموذج (MOLP) بجعل ($x_3=0$) وهذا يمثل هدرا للطاقات البشرية التخصصية والمساعدة ويمثل أيضاً هدرا للأموال التي تدفع كرواتب شهرية لهم.
4. إن هذين الحلين ربما يقدمان أرباحاً عالية قصوى للمستشفى حالياً نموذجي (LP) و(MOLP1) ولا تأخذ عنصر المخاطر العالي (High Risk) في حالة انخفاض الطلب على العمليات من النوع الأكثر ربحية (x_2) أو ارتفاع الطلب على العمليات التخصصية الأخرى وهي (x_1, x_4) وكلا الاحتمالين وارد جداً في المديين القريب والبعيد.

الاستنتاجات:

1. الاستنتاجات النظرية:

- إن (MCDM) و(MCDA) تهتم بإنجاز حلول ممكنة ربما تكون أقل أمثلية لكنها أكثر حكمة وواقعية وأقل مخاطرة عند إجراء التقييمات عليها.

- إن نماذج (MOMP) تمثل العمود الفقري الذي تعتمده عمليات (MCDM) و(MCDA) في الصياغة والحل لمشاكل القرار المقيدة خصوصاً.
- ان طريقة المعيار الشامل ينحصر تطبيقها في نماذج (MOMP) التي لا تحتوي على أسبقيات P_j أو أوزان W_j سواء اكانت خطية أم غير خطية.

2. الاستنتاجات العملية:

- ان طريقة المعيار الشامل تمتلك العديد من الحلول غير السائدة التي يمكن أن يكون إحداهما حلاً أمثل فعلياً يمكن لمتخذ القرار الأخذ بأي منها حسب قناعاته الشخصية، وهذا ينطبق على نتائج بحثنا الممثلة باختصار في الجدول (3).
- ان قيمة الحل الأمثل المقدم من قبل طريقة المعيار الشامل ممثلاً بالمتجه:

[x_1= 10,x_2=6, x_3= 3, x_4= 4, f_1= 1980$, f_2= 355$, Total Profit = 2335$]

يعتبر حلاً أكثر حكمة وأقل مخاطرة ويستطيع أن يواجه التقلبات في الطلب على المستويين القريب والبعيد ومن دون هدر للطاقات أو الأموال داخل المستشفى قيد الدراسة.

- إن أفضل الحلول غير السائدة بطريقة المعيار الشامل تعطي قيماً ربحية إجمالية (2335$) يمكن الزيادة والنقصان بالربحية لكل دالة f_1, f_2 لكن سيتم ذلك على حساب الدالة الأخرى.

التوصيات:

1. الاهتمام بمفاهيم وأساليب (MCDM) و(MCDA) لحل مشاكل القرار المقيدة وغير المقيدة والتي ربما يمكن صياغتها وفق نماذج (MOMP) بأنواعها المختلفة.
2. الاهتمام بأنظمة الدعم العلمي المحوسب (DSS) لاستنتاج قرارات أكثر شفافية وواقعية وثبوتاً على المديين البعيد والقريب.
3. تطبيق طريقة المعيار الشامل على مشكلة القرار قيد الدراسة للحصول على حلول أكثر وسطية واستقراراً وأقل هدراً للأموال والطاقات، كذلك أقل مخاطرةً بالمستقبل حتى إن كانت ذات قيم ربحية إجمالية عليا ليست قصوى.

المصادر:

1. العلاف، خالد عبدا ، " استخدام البرمجة الهدفية في تخطيط الإنتاج بالتطبيق على معمل الألبان في الموصل "، 1988، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل.

2. العلاف، خالد عبدا ، " التغير في صناعة القرار: من المعيار الواحد إلى تعددية المعايير"، 2008، المؤتمر الدولي العلمي الثامن، جامعة الزيتونة الأردنية، عمان، الأردن.

3. سعيد، همسة ثروت، "التقصي في خوارزميات الأمثلية العامة بالاعتماد على النماذج التربيعية وغير التربيعية "، 2005، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل.

4. Hamalainen, Raimo P., "Decisionnarium-Aiding Decisions, Negotiating and Collecting Opinions on the Web" 2008, to appear in Journal of MCDM.

5. Hwang, C. L., S. R. Paidy, K. Yoon and A. S. M. Masud "Mathematical programming with multiple objectives: A Tutorial", "Computer and Operation Research", 1980, Vol. 7.

6. Mustajoki, Jyri and Hamalainen, Raimo P., "Web-Hipre: Global Decision Support by Value tree and AHP Analysis", 2000, INFOR., Vol. 38, No. 3, Aug., PP. 208-220.

7. Render, Barry, Ralph M. Stair Jr. & Michael E. Hanna, "Quantitative Analysis for Management", 8th.ed., 2003, Prentice-Hall, New Jersey, USA.

8. Taha, Hamdy A., "Operations Research: An Introduction", 7th ed., 2003, Prentice Hill, USA.

9. Winston, Wayne L., "Operation research: Applications and algorithm", 1994, Duxbury Press , U. S. A.

10. Zeleny, M., "Multiple Criteria Decision Making", 1982, McGraw-Hill, Inc., USA.