المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (15) 2009
ص ص [147–160]

مقدر جديد للنسبة المنفصل في المعاينة العشوائية الطبقية

خيري بدل رشيد* سيف الدين ضياء الدين سعيد**

الملخص :

يتلخص هذا البحث في اقتراح مقدر جديد للنسبة المنفصل في المعاينة العشوائية الطبقية , حيث تم إثبات أن المقدر الجديد أكثر دقة من مقدر النسبة المنفصل الاعتيادي ومقدر النسبة التجميعي ومقدر النسبة المقترح من قبل (Kadilar & Cingi ; 2005) عن طريق استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدر في العديد من الحالات , كما تم دعم الجانب النظري بأمثلة تطبيقية وتجريبية .

الكلمات الدالة : المعاينة العشوائية الطبقية ، مقدر النسبة ، متوسط مربعات الخطأ .

A new Separated Ratio Estimator in the stratified random sampling

Abstract :

The aim of this research is to find a new separated ratio estimator in the stratified random sampling ,three other estimators are compared with the new separated ratio estimator , namely : ordinary separated ratio estimator , combined ratio estimator, and the suggested ratio estimator by (Kadilar & Cingi ; 2005) . Using the (MSE) as a comparative criterion , we proved that our proposal estimator has more precision than the others . Many numerical and simulation examples have been applied .

Keywords :Stratified Random Sampling ;Ratio–Estimator; Mean Square Errors

* مدرس - كلية علوم الحاسبات والرياضيات / جامعة الموصل
** مدرس مساعد - كلية علوم الحاسبات والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ التسلم: 9 /2/2009 ———— تاريخ القبول : 10 / 6 /2009

1. المقدمة :

إن للبيانات والمعلومات أهمية كبيرة في حياتنا سواء على مستوى الأفـراد أو المؤسسات اذ أنها تمثل الأساس للتخطيط الاقتصادي والاجتماعي وللبرامج الإنمائية كافة, لذا ولأهمية البيانات يتم التعريف بأساليب توفير البيانات والمعلومات انطلاقـاً من مبدأ توسيع القاعدة المعرفية التي تؤول بالنتيجة إلى تعظيم الفائدة في الاتجاهات كافة .

يمكن تقسيم الدراسات والبحوث من حيث درجة الشمول لمفـردات المجتمـع الأصلي إلى بحوث شاملة وبحوث بطريقة العينات , علماً بأن طريقة العينات هـي الطريقة الأكثر شيوعاً اذ تتم من خلالها دراسة جزء من مفردات المجتمع الأصلي ثم بعد ذلك تعميم نتائج الدراسة ككل بتكلفة وجهد ووقت اقل بكثير ممـا لـو تـم استخدام البحث الشامل , وبما أن القياسات المحسوبة من العينة هي قيم تقديرية , لذا فإنه يتم البحث عن الأسلوب والمقدر الأمثل لبيانات العينة .

في بحثنا هذا تناولنا اسلوب المعاينة العشوائية الطبقية والذي يتم استخدامه فـي حالة عدم تجانس وحدات المجتمع ولهذا الأسلوب طرائق تقديرية عدة مـن أهمهـا مقدر النسبة (Ratio Estimator) , حيث يتم تطبيقه في حالة وجـود متغيـرين مرتبطين (احدهما يؤثر في الآخر) يدعى احـدهما بـالمتغير موضـوع الاهتمـام (Variate of Interest) والأخر بالمتغير المساعد (Auxiliary Variate) , وهذا المقدر له أسلوبان للتطبيق في المعاينة العشوائية الطبقية احدهما يدعى بمقدر النسبة التجميعي (Combined Ratio Estimator) والآخر بمقدر النـسبة المنفـصل (Separate Ratio Estimator) , ولقد توصلنا في هذا البحث إلى إيجاد صـيغة جديدة لمقدر النسبة المنفصل اعتمـاداً علـى مـا توصـل اليـه كـل مـن (Kadilar & Cingi ; 2005) في مقدر النسبة التجميعي . اشتمل البحث علـى جزأين ، الأول تم فيه عرض مقدر النسبة والمقدر المقترح . أمـا الجـزء الثـاني فتمثل بتطبيق المقدرات الأربعة في مثالين متنوعين كما تم إجـراء المحاكـاة فـي مثالين آخرين , وكانت المحصلة النهائية دقة المقدر المقترح مقارنة بكل من مقدر

النسبة المنفصل الاعتيادي ومقدر النـسبة التجميعـي والمقـدر الـذي اقترحـه (Kadilar & Cingi ; 2005) وذلك لامتلاكه اقل متوسط مربعات خطأ .

2. مقدر النسبة في المعاينة العشوائية البسيطة والطبقية :

(Ratio Estimator in Simple and Stratified Random Sampling)

تعتمد المقدرات عادةً على مشاهدات لظاهرة واحدة لعينة مأخوذة من مجتمـع الدراسة إلا انه في كثير من الأحوال قد تتوفر لدينا معلومات عن متغيرات أخـرى ذات صلة مباشرة مع الظاهرة محل الدراسة بحيث يمكن الاستفادة منها في تحسين المقدر وزيادة دقته , فمثلاً إن معرفة عدد إناث نوع معين من الحيوانـات والتـي تعيش في منطقة معينة يرتبط بشكل كبير مع عدد المواليد لتلك الحيوانات ومن ثـم يحسِن من مقدر عدد المواليد لها . إن طريقة المقدر باستخدام النسبة ليست نوعـاً من أنواع المعاينة وإنما هي طريقة من طرائق المقدر يمكن تطبيقها فـي مختلـف طرائق المعاينة وذلك لتحسين المقدرات , اذ أن توظيـف العلاقـة بـين المتغيـر موضوع الاهتمام (**y**) والمتغير المساعد (**x**) تعطي دقة اكبر ممـا لـو اسـتخدم المتغير موضوع الاهتمام لوحده , كما أن معرفة مشاهدات ظاهرة معينة في فتـرة زمنية سابقة يحسن أيضاً مقدرات الظاهرة في الفترة الحالية .

يستلزم مقدر النسبة الحصول على مشاهدات (**y**) و(**x**) لكل مفردة من مفردات العينة , فإذا كانت ($y_1 , y_2 ,.....,y_n$) تمثل مشاهدات الظاهرة موضوع الاهتمام في العينة وان ($x_1 , x_2 ,.....,x_n$) تمثل مـشاهدات ظـاهرة أخـرى إضافية (مساعدة) مرتبطة بشكل كبير مع (y_i) , عندئذٍ يعرف مقدر النسبة **y** إلى **x** بالصيغة الاتية :

[الناصر والصفاوي، (2001)]

$$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{y}{x} \qquad ......(1)$$

وان القيمة الحقيقية(النسبة في المجتمع) لهذا المقدر تكون بالصيغة الاتية :

$$R = \frac{\overline{\overline{Y}}}{\overline{\overline{X}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sum_{i=1}^{N} Y_i} = \frac{Y}{X} \qquad \ldots\ldots (2)$$

ويعتبر مقدر النسبة من المقدرات المتسقة ولكنه متحيز .

إن الصيغة الخاصة بحساب الوسط الحسابي لمقدر النسبة هي :

$$\hat{\overline{\overline{Y}}}_R = \overline{\overline{X}}\,\hat{R} \qquad \ldots\ldots (3)$$

وبتباين قدره :

$$V(\hat{\overline{\overline{Y}}}_R) = \frac{(1-f)}{n}\left[\sigma^2_{(y)} - 2R\sigma_{(xy)} + R^2\sigma^2_{(x)}\right] \qquad \ldots\ldots (4)$$

حيث أن $f = \frac{n}{N}$: كسر المعاينة .

أما في حالة تقسيم المجتمع إلى طبقات فإن مقدر النسبة للطبقة (h) يكون بالصيغة الاتية :

$$\hat{R}_h = \frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} = \frac{y_h}{x_h} \quad , \quad h = 1,2,3,\ldots,L \qquad \ldots\ldots(5)$$

حيث أن:

L : تمثل عدد الطبقات .

$\overline{y}_h, \overline{x}_h$: الوسط الحسابي للطبقة (h) في العينة لكل من المتغيـر (y,x) علـى التوالي .

كما أن النسبة الحقيقية للطبقة (h) تكون بالصيغة الاتية :

$$R_h = \frac{\overline{\overline{Y}}_h}{\overline{\overline{X}}_h} = \frac{Y_h}{X_h} \qquad \ldots\ldots(6)$$

في المعاينة العشوائية الطبقية هناك طريقتان للحصول على مقدر النسبة (R) وهما: **[Taro Y. (1967)]**

1. مقدر النسبة التجميعي $\hat{R}_C$ Combined Ratio Estimator
2. مقدر النسبة المنفصل $\hat{R}_S$ Separate Ratio Estimator

حيث أن :

$$\hat{R}_C = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h} \quad \ldots\ldots (7)$$

وان الوسط الحسابي لهذا المقدر يكون بالصيغة الاتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{RC} = \hat{R}_C \ \bar{X} \quad \ldots\ldots (8)$$

وبتباين قدره :

$$V(\hat{\bar{Y}}_{RC}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma_{y_h}^2 - 2R\sigma_{x_h y_h} + R^2 \sigma_{x_h}^2) \quad \ldots\ldots (9)$$

حيث أن : $\gamma_h = \frac{1 - f_h}{n_h}$, $f_h = \frac{n_h}{N_h}$. $W_h = \frac{N_h}{N}$ وتمثل وزن الطبقة **h**.

أما بالنسبة الى مقدر النسبة المنفصل فيكون بالصيغة الاتية:

$$\hat{R}_S = \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h \quad \ldots\ldots (10)$$

و الوسط الحسابي لهذا المقدر يكون بالصيغة الاتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \ \hat{R}_h \ \bar{X}_h \quad \ldots\ldots (11)$$

وبتباين قدره :

$$V(\hat{\bar{Y}}_{RS}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma_{y_h}^2 - 2R_h \sigma_{x_h y_h} + R_h^2 \sigma_{x_h}^2) \quad \ldots\ldots (12)$$

3. متوسط مربعات الخطأ لمقـدر النـسبة: (Mean Square Error of Ratio Estimator)**[Kadilar and Cingi, (2004)]**

من المعروف أن مقدر النسبة من المقدرات المتحيـزة , إلا انـه وباسـتخدام سلسلة تايلور وعند التقريب من الدرجة الأولى نجد انه يتحول إلى مقدر غير متحيز وبالصورة الاتية :

$$\because \quad \hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

$$\therefore \hat{R} = R \left[1 + \frac{(\bar{y} - \bar{Y})}{\bar{Y}} - \frac{(\bar{x} - \bar{X})}{\bar{X}} + \frac{(\bar{x} - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} - \frac{(\bar{x} - \bar{X})(\bar{y} - \bar{Y})}{\bar{X}\,\bar{Y}} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

وإذا استعملنا تقريباً من الدرجة الأولى (حذف الحدود بعد الحـد الثـاني) فـإن المعادلة الأخيرة ستكون بالصيغة الاتية :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\left[\mathbf{1} + \frac{(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{Y}})}{\bar{\mathbf{Y}}} - \frac{(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}})}{\bar{\mathbf{X}}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad E(\hat{\mathbf{R}}) = \mathbf{R}$$

وفي هذه نجد أن متوسط مربعات الخطأ للوسط الحسابي لمقدر النسبة التجميعـي يكون مساويا لتباين المقدرنفسه أي أن :

$$\mathbf{MSE}(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}}) = \mathbf{V}(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}}) = \sum_{\mathbf{h=1}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{h}}^{2}\gamma_{\mathbf{h}}(\sigma_{\mathbf{y_h}}^{2} - \mathbf{2R}\sigma_{\mathbf{x_h y_h}} + \mathbf{R}^{2}\sigma_{\mathbf{x_h}}^{2}) \qquad \ldots\ldots (13)$$

وان مقدار التحيز لـ $(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}})$ في حالة عدم التقريب هو :

$$E(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}} - \bar{\mathbf{Y}}) = \frac{\mathbf{1}}{\bar{\bar{\mathbf{X}}}}\sum_{\mathbf{h=1}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{h}}^{2}\gamma_{\mathbf{h}}(\mathbf{R}\sigma_{\mathbf{x_h}}^{2} - \sigma_{\mathbf{x_h y_h}}) \qquad \ldots\ldots (14)$$

أما بالنسبة لمتوسط مربعات الخطأ للوسط الحسابي لمقدر النسبة المنفـصل فإنـه يكون مساويا لتباين المقدر نفسه أيضاً أي أن :

$$\mathbf{MSE}(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RS}}) = \mathbf{V}(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RS}}) = \sum_{\mathbf{h=1}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{h}}^{2}\gamma_{\mathbf{h}}(\sigma_{\mathbf{y_h}}^{2} - \mathbf{2R_h}\sigma_{\mathbf{x_h y_h}} + \mathbf{R}_{\mathbf{h}}^{2}\sigma_{\mathbf{x_h}}^{2}) \qquad \ldots\ldots (15)$$

وان مقدار التحيز لـ $(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RS}})$ في حالة عدم التقريب هو :

$$E(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RS}} - \bar{\mathbf{Y}}) = \frac{\mathbf{1}}{\bar{\bar{\mathbf{X}}}}\sum_{\mathbf{h=1}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{h}}^{2}\gamma_{\mathbf{h}}(\mathbf{R_h}\sigma_{\mathbf{x_h}}^{2} - \sigma_{\mathbf{x_h y_h}}) \qquad \ldots\ldots (16)$$

4. مقدر النسبة المقترح: (The Suggested Ratio Estimator) :

[Kadilar and Cingi, (2005)]

في المعاينة العشوائية الطبقية اقترح (Kadilar & Cingi) مقـدراً لمتوسـط النسبة التجميعي كالآتي :

$$\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC(KC)}} = \mathbf{k}\ \hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}} \qquad \ldots\ldots (17)$$

حيث أن المعامل **(k)**

$$\mathbf{k} = \frac{\bar{\mathbf{Y}}^{2}}{\bar{\mathbf{Y}}^{2} + \mathbf{Var}(\hat{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{RC}})}$$

في المعاينة العشوائية الطبقية تم اقتراح مقدر النسبة المنفصل الاتي :

$$\hat{\hat{Y}}_{RS(Pr.)} = k^* \hat{\hat{Y}}_{RS} \qquad \ldots\ldots (18)$$

وعليه فإن متوسط مربعات الخطأ لهذا المقدر هو كما ياتي :

$$MSE(\hat{\hat{Y}}_{RS(Pr.)}) = E(\hat{\hat{Y}}_{RS(Pr.)} - \overline{Y})^2$$
$$= E(k^* \hat{\hat{Y}}_{RS} - \overline{Y})^2$$
$$= E(k^{*2} \hat{\hat{Y}}^2_{RS} - 2\,k^* \hat{\hat{Y}}_{RS} \overline{Y} + \overline{Y}^2)$$
$$= k^{*2} E(\hat{\hat{Y}}^2_{RS}) - 2k^* \overline{Y} E(\hat{\hat{Y}}_{RS}) + \overline{Y}^2$$

وبإضافة وطرح $(k^{*2}\,\overline{Y}^2)$نحصل على ما ياتي :

$$= k^{*2} E(\hat{\hat{Y}}^2_{RS}) - 2k^* \overline{Y}\,\overline{Y} + \overline{Y}^2 + k^{*2}\,\overline{Y}^2 - k^{*2}\,\overline{Y}^2$$
$$= k^{*2} E(\hat{\hat{Y}}^2_{RS}) - 2k^* \overline{Y}^2 + \overline{Y}^2 + k^{*2}\,\overline{Y}^2 - k^{*2}[E(\hat{\hat{Y}}_{RS})]^2$$
$$= k^{*2} [E(\hat{\hat{Y}}^2_{RS}) - \{E(\hat{\hat{Y}}_{RS})\}^2] + \overline{Y}^2 (k^* - 1)^2$$
$$= k^{*2} V(\hat{\hat{Y}}_{RS}) + \overline{Y}^2 (k^* - 1)^2$$

$$\therefore MSE(\hat{\hat{Y}}_{RS(Pr.)}) = k^{*2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma^2_{y_h} - 2R_h \sigma_{x_h y_h} + R_h^2 \sigma^2_{x_h}) + \overline{Y}^2 (k^* - 1)^2$$

… (19)

ولإيجاد قيمة k^* التي تجعل متوسط مربعات الخطأ (MSE) اقل ما يمكن , نأخذ المشتقة الأولى للمعادلة (19) بالنسبة إلى k^* ومساواة المشتقة بالصفر وكما ياتي :

$$\frac{\partial\, MSE(\hat{\hat{Y}}_{RS(Pr.)})}{\partial\, k^*} = 2\,k^* \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma^2_{y_h} - 2R_h \sigma_{x_h y_h} + R_h^2 \sigma^2_{x_h}) + 2\,\overline{Y}^2 (k^* - 1) = 0$$

$$2k^* V(\hat{\hat{Y}}_{RS}) + 2\,\overline{Y}^2 k^* - 2\,\overline{Y}^2 = 0$$
$$2k^* [V(\hat{\hat{Y}}_{RS}) + \overline{Y}^2] = 2\,\overline{Y}^2$$

$$\therefore k^* = \frac{\overline{Y}^2}{\overline{Y}^2 + Var(\hat{\hat{Y}}_{RS})} = \frac{\overline{Y}^2}{\overline{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma^2_{y_h} - 2R_h \sigma_{x_h y_h} + R_h^2 \sigma^2_{x_h})} \qquad (20)$$

حيث أن : $(0 < k^* < 1)$.

5. دقة المقدر المقترح : (Precision of Suggested Estimator**)**

إذا قارنا (MSE) مقدر النسبة المنفصل الاعتيادي مع (MSE) لمقـدر النسبة المقترح سنحصل على الشرط الاتي :

$$\textbf{Let} \quad V = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h (\sigma_{y_h}^2 - 2R_h \sigma_{x_h y_h} + R_h^2 \sigma_{x_h}^2)$$

$$MSE(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS(Pr.)}) < MSE(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS})$$

$$MSE(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS(Pr.)}) - MSE(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS}) < 0$$

$$k^{*2} \; V(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS}) + \bar{Y}^2(k^* - 1)^2 - V(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{RS}) < 0$$

$$k^{*2} \; V - V + \bar{Y}^2(k^* - 1)^2 < 0$$

$$V(k^{*2} - 1) + \bar{Y}^2(k^* - 1)^2 < 0$$

$$V(k^* - 1)(k^* + 1) + \bar{Y}^2(k^* - 1)(k^* - 1) < 0$$

$$(k^* - 1)\,[V\,(k^* + 1) + \bar{Y}^2(k^* - 1)] < 0$$

بما أن : $0 > (k^* - 1)$ لان $(1 > k^* > 0)$. فمن الواضح أن :

$$V\,(k^* + 1) + \bar{Y}^2(k^* - 1) > 0$$

$$V\,k^* + V + \bar{Y}^2 k^* - \bar{Y}^2 > 0$$

$$V\,k^* + \bar{Y}^2 k^* + V - \bar{Y}^2 > 0$$

$$k^*\,(\bar{Y}^2 + V) - (\bar{Y}^2 - V) > 0$$

$$\therefore \quad k^* > \frac{(\bar{Y}^2 - V)}{(\bar{Y}^2 + V)} \qquad \ldots\ldots (21)$$

وعند تحقق(الشرط) المعادلة (21) , فان المقدر المقترح يكون أكثر دقة من مقدر النسبة المنفصل , وبما أن الشرط أعلاه هو دائماً متحقق , فبذلك يمكننا القول بـأن المقدر المقترح أكثر دقة من مقدر النسبة المنفصل الاعتيادي .

6. الجانب التطبيقي :

تم في هذا الجانب تطبيق ماورد في الجانب النظري على مثالين تطبيقيين وكالاتي:

المثال الاول :

يتضمن هذا المثال توزيع عينة عشوائية حجمها (100) على ثلاث طبقات باستخدام التوزيع المتناسب والجدولان (1) و(2) الاتيان يبينان المعلومات والنتائج التي تم الحصول عليها على التوالي . **[William G. Cochran ,(1977)]**

الجدول (1) المعلومات الخاصة بالبيانات

Strata	N_h	n_h	$\bar{X}_h$	$\bar{Y}_h$	R_h	W_h	$\sigma^2_{x_h}$	$\sigma^2_{y_h}$	$\sigma_{x_h y_h}$	γ_h
I	**47**	**18**	**53.80**	**69.48**	**1.2914**	**0.1836**	**5186**	**8699**	**6462**	**0.0343**
II	**118**	**46**	**31.07**	**43.64**	**1.4046**	**0.4609**	**2367**	**4614**	**3100**	**0.0133**
III	**91**	**36**	**56.97**	**66.39**	**1.1654**	**0.5962**	**4877**	**7311**	**4817**	**0.0168**
	N	n	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	R					
	256	**100**	**44.45**	**56.47**	**1.2704**					

الجدول (2) النتائج التي تم الحصول عليها والمتمثلة بمتوسط مربعات الخطأ وناتج الشرط

نوع المقدر	المقدر	متوسط مربعات الخطأ (MSE)	قيمة المعامل (k)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - V)}{(\bar{Y}^2 + V)}$
التجميعي (Combined)	$\hat{\bar{Y}}_{RC}$	**19.88846075**	**0.993801803**	**0.987603606**
	$\hat{\bar{Y}}_{RC(KC)}$	**19.76518815**		
المنفصل (Separate)	$\hat{\bar{Y}}_{RS}$	**18.53905671**	**0.994219911**	**0.988439822**
	$\hat{\bar{Y}}_{RS(Pr.)}$	**18.43189931**		

من ملاحظة نتائج الجدول (2) نجد أن الطريقة المقترحة والمستخدمة لمقدر متوسط النسبة المنفصل قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلـك لامتلاكهـا لأقل متوسط مربعات خطأ . كما يمكن ملاحظة تحقق الشرط للمعادلة (21) .

المثال الثاني :

يتضمن هذا المثال توزيع عينة عشوائية حجمها (140) على ستة طبقات باستخدام توزيع نيمان والجدولان (3) و(4) الاتيان يبينان المعلومـات والنتـائج المستحصل عليها على التوالي . **[Kadilar and Cingi, (2005)]**

الجدول (3) المعلومات الخاصة بالبيانات

Strata	N_h	n_h	$\bar{X}_h$	$\bar{Y}_h$	R_h	W_h	$\sigma^2_{x_h}$	$\sigma^2_{y_h}$	$\sigma_{x_h y_h}$	γ_h
I	**106**	**9**	**24375**	**1536**	**0.0630**	**0.1225**	**2419557721**	**41280625**	**259152246.5**	**0.102**
II	**106**	**17**	**27421**	**2212**	**0.0807**	**0.1225**	**3301766521**	**133448704**	**570858945.9**	**0.049**
III	**94**	**38**	**72409**	**9384**	**0.1296**	**0.1096**	**25842813049**	**894428649**	**4326983639**	**0.016**
IV	**171**	**67**	**74365**	**5588**	**0.0751**	**0.2**	**81569073609**	**820421449**	**8098721462**	**0.009**
V	**204**	**7**	**26441**	**967**	**0.0366**	**0.2388**	**2061432409**	**5712100**	**77044350.7**	**0.138**
VI	**173**	**2**	**9844**	**404**	**0.0410**	**0.2025**	**353214436**	**894916**	**15823420.36**	**0.006**
	N	n	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	R					
	854	**140**	**37600**	**2930**	**0.07793**					

الجدول (4) النتائج التي تم الحصول عليها والمتمثلة بمتوسط مربعات الخطأ وناتج الشرط

نوع المقدر	المقدر	متوسط مربعات الخطأ (MSE)	قيمة المعامل (k)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - V)}{(\bar{Y}^2 + V)}$
التجميعي (Combined)	$\hat{\bar{Y}}_{RC}$	**212011.896**	**0.975**	**0.951798563**
	$\hat{\bar{Y}}_{RC(KC)}$	**206909.3711**		
المنفصل (Separate)	$\hat{\bar{Y}}_{RS}$	**159137.3878**	**0.981800468**	**0.963600936**
	$\hat{\bar{Y}}_{RS(Pr.)}$	**156241.1618**		

من ملاحظة الجدول (4) نجد أن الطريقة المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلك لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ . كما يمكن ملاحظة تحقق الشرط للمعادلة (21) .

7- الجانب التجريبي :

في هذا الجانب تم عمل نموذج محاكاة لحالتين الأولى تضمنت تكوين ست طبقات والثانية ثلاث طبقات . كل طبقة مؤلفة من المتغيرين (Y_{hi}, X_{hi}) وبأحجام وأوساط وتباينات طبقية مختلفة بحيث تم تكوين حالة ترابط بين كل متغيرين داخل الطبقة الواحدة بدرجة معينة من الارتباط وحسب المعادلتين الاتيتين **[Chrishtopher Z. M. , (1997)]**:

$$Y_{hi} = (1-\alpha^2)^{1/2} Z^*_{hi} + \alpha Z_{hi}$$
$$X_{hi} = (1-\alpha^2)^{1/2} Z^{**}_{hi} + \alpha Z_{hi}$$

حيث أن :

α : درجة الارتباط بين المتغيرين (Y_{hi}, X_{hi}) داخل الطبقة (h) .

(Z^*_{hi}, Z^{**}_{hi}) : هما على الترتيب متغيران عشوائيان تم توليدهما بحيث يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي بمعدل وتباين مختلفين لكل منهما .

Z_{hi}: متغير عشوائي تم توليده بحيث يتبع التوزيع الطبيعي بمعدل (0) وتباين (1).

وبعد تكوين المجتمعات الفرعية من الطبقات لكل حالة يتم حساب حجم العينة المناسب والواجب سحبه باستخدام العلاقة الاتية :

$$n=\frac{N\,t^2\sum_{i=1}^{N}(Y_i-R\,X_i)^2}{N(N-1)\,d^2\overline{X}^2+t^2\sum_{i=1}^{N}(Y_i-R\,X_i)^2}$$

ومن ثم توزيع حجم العينة على الطبقات باستخدام توزيع نيمـان وأخيـراً إجـراء العمليات الحسابية الاعتيادية للحصول على المقدرات للطرائـق الأربعـة الـسابقة ونتائج التجربتين هي كما موضحة في الجداول الاتية :

التجربة الأولى :

الجدول (5) المعلومات الخاصة بالبيانات

Strata	N_h	n_h	$\overline{X}_h$	$\overline{Y}_h$	R_h	W_h	$\sigma^2_{x_h}$	$\sigma^2_{y_h}$	$\sigma_{x_h y_h}$
I	5000	197	24697	2979	0.120622	0.122	346257664	5108052.01	34485871.46
II	4500	282	26059	4706.8	0.180621	0.122	391604521	12984491.56	61324607.04
III	3750	548	61324	10901	0.177761	0.110	2204396401	70324996	354357977.4
IV	3000	131	32875	3226.8	0.098154	0.200	642521104	6265009	62811583.56
V	2750	52	30243	1475.1	0.048633	0.239	493328521	1155840.01	16954122.73
VI	2500	12	7786	367.33	0.047178	0.202	33252829	74643.7041	1402285.842

N	n	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	R
21500	1222	37600	2930	0.07793

الجدول (6) النتائج التي تم الحصول عليها والمتمثلة بمتوسط مربعات الخطأ وناتج الشرط

نوع المقدر	المقدر	متوسط مربعات الخطأ (MSE)	قيمة المعامل (k)	ناتج الشرط $\frac{(\overline{Y}^2-V)}{(\overline{Y}^2+V)}$
التجميعي (Combined)	$\hat{\overline{Y}}_{RC}$	53989.76964	0.997034482	0.994068965
	$\hat{\overline{Y}}_{RC(KC)}$	53829.66203		
المنفصل (Separate)	$\hat{\overline{Y}}_{RS}$	13481.01937	0.999257871	0.998515743
	$\hat{\overline{Y}}_{RS(Pr.)}$	13471.01472		

من ملاحظة الجدول (6) نجد أن الطريقة المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلك لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ . كما يمكن ملاحظة تحقق الشرط للمعادلة (21) .

التجربة الثانية :

الجدول (7) المعلومات الخاصة بالبيانات

Strata	N_h	n_h	$\bar{X}_h$	$\bar{Y}_h$	R_h	W_h	$\sigma^2_{x_h}$	$\sigma^2_{y_h}$	$\sigma_{x_h y_h}$
I	985	62	26168	5141	0.1965	0.1836	327067225	9979281	45704412
II	2196	48	34161	1763.4	0.0516	0.4610	445547664	1203847.84	21306921.79
III	1020	8	5186	490.2	0.0945	0.5962	10291264	146156.29	956606.352
	N	n	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	R				
	4201	118	25252	2246.2	0.0890				

الجدول (8) النتائج التي تم الحصول عليها والمتمثلة بمتوسط مربعات الخطأ وناتج الشرط

نوع المقدر	المقدر	متوسط مربعات الخطأ (MSE)	قيمة المعامل (k)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - V)}{(\bar{Y}^2 + V)}$
التجميعي (Combined)	$\hat{\bar{Y}}_{RC}$	8861.382544	0.9982	0.9965
	$\hat{\bar{Y}}_{RC(KC)}$	8845.846372		
المنفصل (Separate)	$\hat{\bar{Y}}_{RS}$	5718.817436	0.9989	0.9977
	$\hat{\bar{Y}}_{RS(Pr.)}$	5712.342677		

من ملاحظة الجدول (8) نجد أن الطريقة المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلك لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ . كما يمكن ملاحظة تحقق الشرط للمعادلة (21) .

8. الاستنتاجات :

1- بشكل عام يمكن الاستنتاج بان مقدر النسبة المنفصل هو أدق مـن مقـدر النسبة التجميعي لذا يفضل استخدام هذا النوع من طرائق التقدير في إيجاد المقدرات .

2- من ملاحظة النتائج في الجداول [(2)، (4) ،(6) و(8)] السابقة نجـد أن الطريقة المقترحة والتي تم من خلالها حساب الوسط الحسابي لمقدر النسبة المنفصل قد امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ مما يدل على دقة الطريقـة مقارنةً بالطرائق الأخرى.

3- تحقق الشرط الموضوع في المعادلة (21) دائما مما يبقي الطريقة المقترحة ذات دقة أعلى دائماً.

9- المصـــادر :

1- الناصر ، عبد المجيد حمزة و الصفاوي ، صفاء يونس ، (2001) ، " العينات (النظرية والتطبيق) " ، دار الكتب للطباعة والنشر – جامعة الموصل .

2-Chrishtopher, Z. M. , (1997)," Monte Carlo Simulation", SAGE publication , New Delhi .

3- Kadilar C. and Cingi H. , (2004) , " Ratio Estimator in Simple Random Sampling " ,Applied Mathematics and computation ,151, PP.(893-902).

4- —————————— ,(2005) , "A New Ratio Estimator in Stratified Random Sampling " , Communications in statistics Theory and methods , 34, PP.(597-602).

5- Taro Yamane , (1967) , "Elementary Sampling Theory " , Prentice Hall ,Inc., Englewood Cliffs ,N.J. Inc. ,USA .

6- William G. Cochran , (1977) , " Sampling Techniques " , 3rd. edition , John Wiley & Sons , Inc. ,USA