المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (16) 2009
ص ص [149–160]

خوارزمية مقترحة لايجاد الحل الامثل في البرمجة العددية اللاخطية

نعم عبد المنعم عبد المجيد*

الملخص:

تم في هذا البحث اقتراح خوارزمية جديدة لحل نوع من مسائل البرمجة العددية اللاخطية والخاصة بمسألة تخصيص الموارد البشرية لغرض ايجاد الحل الامثل، وتم الاستنتاج بان هذه الخوارزمية بسيطة نسبيا وكفوءة لحل هذا النوع من المسائل اذا ما تمت مقارنتها بالطرائق التقليدية او الكلاسيكية الاخرى مثل (Kuhn-Tucker Conditions) وطريقة عوامل لاكرانج.

An Algorithm Proposed to Find an Optimal Solution in Nonlinear Integer Programming

ABSTRACT:

This paper proposed a new algorithm for solving a nonlinear integer programming for human resources allocation problem to find an optimal solution. It has been concluded that this algorithm is relatively simple and efficient for solving this type of problems, if it is compared to the other traditional approaches such as Kuhn-Tucker conditions and Lagrange multipliers method.

* مدرس مساعد / كلية علوم الحاسبات والرياضيات – قسم الاحصاء والمعلوماتية – فرع بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

تاريخ التسلم: 2009/5/18 ـــــــــــــــ تاريخ القبول : 16 /2009/8

1- الجانب النظري

1- المقدمة:

ليس مبالغاً فيه ان يكرس بعض الناس حياتهم في اتخاذ قرار حول ما هـو الامثل بطريقة او باخرى من ناحية فان العديد من القرارات جعلت المـسائل فـي التطبيقات الحقيقية تؤدي الى مسائل الامثلية بصيغة البرمجة العددية، ومن ناحيـة اخرى فان البرمجة العددية كانت واحدة من التحديات العظيمـة لبحـوث الامثليـة المشتركة لسنوات عديدة بسبب صعوباتها الحسابية كـالنمو او التطـور المتزايـد بتعقيداته الحسابية حسب بعد المسألة او المشكلة.

التطبيقات في البرمجة العددية اللاخطيـة يمكـن ايجادهـا فـي مختلـف المجالات: علوم الحاسبات، الهندسة، علوم الادارة وبحوث العمليـات. تطبيقاتهـا الابرز تتضمن على سبيل المثال: اختيار أو تشكيل حقيبة وزارية، ميزانيـة رأس المال، تخطيط الانتاج، تخصيص الموارد، شبكات الحاسـبات، شـبكات المعوليـة والهندسة الكيمياوية. وبسبب اللاخطية فان المثيودولوجيات النظرية وايجاد الحـل لمسائل البرمجة العددية اللاخطية تكون مختلفة جوهريا عـن البرمجـة العدديـة الخطية. وقد اقترح العديد من الاجراءات الخوارزمية لحل مسائل البرمجة العدديـة اللاخطية ولكن مجموعة منها اثبتت فعليا انها مفيدة في التعامل مع مسائل واقعية.

2- البرمجة العددية اللاخطية (التصنيف والصياغات):

لقد درست البرمجة العددية اللاخطية بشكل موسع من قبـل العديـد مـن الباحثين (Fletcher, 1987) و (Li and Sun, 2006) و (Schrijiver, 1986) و(Karlof, 2006) و (Lange, 2004)، الصيغة العامة لمسائل البرمجة العدديـة اللاخطية:

$$
\begin{aligned}
\text{(NLIP)} \quad & \min f(x) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) \le b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

حيث ان f و g_i دوال ذوات قيم حقيقية في R^n وان X مجموعـة جزئيـة محددة في Z^n مجموعة من جميع النقاط العددية الصحيحة في R^n.

مسألة (NLIP) يمكن تصنيفها الى انواع او اصناف فرعية مختلفة وفقا لتركيبها الخاص (Li and Sun, 2006) و (Leunberger, David & Ye, 2008) وكما ياتي :

1- **البرمجة العددية اللاخطية غير المقيدة:** عندما تكون قيود المتباينة في (NLIP) غير موجودة او مفقودة فان المسألة تسمى مسألة البرمجة العددية اللاخطية غير المقيدة. يوجد نوعان مهمان من مسائل البرمجة العددية اللاخطية غير المقيدة وهما مسائل الامثلية متعددة الحدود غير المقيدة (0-1) ومسائل الامثلية التربيعية غير المقيدة (0-1).
2- **البرمجة العددية اللاخطية احادية القيد:** عندما تكون (m=1) اي وجود قيد واحدة في (NLIP) فان المسألة تسمى مسألة البرمجة العددية اللاخطية احادية القيد.
3- **البرمجة العددية اللاخطية متعددة القيود:** عندما تكون (m≥2) فان مسألة (NLIP) تسمى مسألة البرمجة العددية اللاخطية متعددة القيود.
4- **البرمجة العددية المحدبة:** اذا كانت جميع دوال f و g_i , i=1, 2, … m محدبة في الـ (Convex Hull) لـ X في مسألة (NLIP)، عندئذ تسمى المسألة مسألة البرمجة العددية المحدبة. نلاحظ ان التحدبية تعتبر شرطا كافيا للحصول على الحل الكامل في (NLIP).
5- **البرمجة العددية المنفصلة:** عندما تكون الدالة بشكل متجمع او متزايد بالنسبة لجميع متغيراتها فان الدالة تسمى منفصلة (separable). في كثير من الحالات فان دالة الهدف ودوال القيود في (NLIP) تكون منفصلة. صيغة البرمجة العددية اللاخطية المنفصلة تأخذ الشكل الاتي:

$$
\text{(SIP)} \quad \min f(x)
$$
$$
\text{s.t.} \quad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i \;, \quad i = 1, \dots, m
$$
$$
x \in X = \{x \in Z^n \; l_j \le x_j \le u_j \;, j = 1, \dots, n\}
$$

ان مسألة تخصيص الموارد اللاخطية هي حالة خاصة من (SIP) حيث ان جميع دوال f_j's و g_{ij}'s هي دوال محدبة. في كثير من مسائل تخصيص المـوارد اللاخطية فان قيدا واحدا فقط يكون موجودا في (SIP) بالصيغة الاتية:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j = N$$

اذا كانت جميع f_j's في (SIP) بالشكل او الصغية التربيعية لـ x_j و ان

$$f_j(x_j) = q_j x_j^2 + c_j x_j$$

عندئذ فان (SIP) تصنف كمسألة برمجة عددية لاخطيـة منفـصلة بدالـة هـدف تربيعية.

6- **البرمجة العددية غير المنفصلة:** عندما تكون على الاقل واحدة من دالة الهدف وكذلك دوال القيود لـ (NLIP) غير منفصلة فـان (NLIP) تـسمى مـسألة البرمجة العددية غير المنفصلة. توجد حالات حقيقية كثيرة من نماذج البرمجـة العددية اللاخطية حيث ان بعض من الدوال الضمنية غير منفصلة. مثال علـى مثال في امثلية المعولية فان دالة المعولية للنظام ككل هي دالة خطية متعـددة لمستويات المعولية لجميع الانظمة الفرعية الفردية.

7- **مسألة Knapsack اللاخطية:** اذا كانت جميع f_j's متناقـصة فـي مـسألة البرمجة العددية اللاخطية المنفصلة (SIP) بينما جميع او كـل g_{ij}'s متزايـدة عندئذ تسمى المسألة مسألة Knapsack اللاخطية او مسألة الحقيبة الظهريـة اللاخطية. اذا كانت كل او جميع f_j's مقعرة في مـسألة Knapsack وكـذلك جميع g_{ij}'s خطية عندئذ تسمى المسألة مسألة Knapsack المقعرة.

8- **مسألة البرمجة العددية اللاخطية الرتيبة او التماثليـة (Monotone):** فـي مسألة البرمجة العددية غير المنفصلة (NLIP) اذا كانت f متناقصة بينما جميع g_i's متزايدة عندئذ تسمى المسألة مسألة البرمجة العددية اللاخطية الرتيبـة او التماثلية او تسمى مسألة Knapsack غير المنفصلة.

9- **البرمجة اللاخطية (1-0):** عندما تكون جميع المتغيرات العدديـة الـصحيحة x_j's مقيدة بـ (0) او (1) في (NLIP)، فالمسألة تـسمى مـسألة البرمجـة اللاخطية (1-0).

10- البرمجة متعددة الحدود (0-1): في صيغة البرمجة اللاخطيـة (0-1)، اذا كانت جميع الدوال f و g_i's هي بصيغة (Multi-linear polynomial):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{K} q_k \pi_{i \in S(k)} x_j$$

حيث ان S(k) هي مجموعة الدليل بـ $|S(k)| \geq 2$، عندئذ تسمى المسألة مسألة البرمجة متعددة الحدود (0-1) او (Pseduo-Boolean Optimization Problem).

وبصورة خاصة اذا كانت f و g_i's بالصيغة الاتية من الدوال التربيعية:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

عندئذ تسمى المسألة مسألة البرمجة التربيعية (0-1). ولقـد درس هـذان النوعان من المسائل بصورة موسعة في السنوات الثلاثين الماضية.

3- البرمجة العددية اللاخطية لمسألة تخصيص الموارد:

البرمجة العددية اللاخطية لمسألة تخصيص الموارد (RIP) يمكن تمثيلهـا بالصيغة الاتية (Liu, Chuang & Hwang, 2006):

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{x_j}$$

$$\text{(RIP)}\quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{N} x_j \leq K$$

……… (1)

$x_j \geq 1$

x_j is an integer, a_j>o

النموذج (RIP) تـم الحـصول عليـه مـن البرمجـة العدديـة (HIP) وهـو صـيغة خاصـة مـن مـسألة تخـصيص المـوارد البـشرية (Du & Pardalos, 1998):

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{N} P_j \left(T_j - \frac{a_j}{x_j} \right)$$

$$\text{(HIP)} \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{N} x_j \leq K$$

$x_j \geq 1$, x_j is a positive integer …….. (2)

4- الاساس النظري للخوارزمية المقترحة
(Theoretical Foundation of Algorithm)

لقد طورت الخوارزمية لتكوين متتالية من الحلـول المقبولـة او الممكنـة تكراريا. هذه الخوارزمية تبدأ بحل ممكن او مقبول هو $(x_j = 1)$ لجميع قيم $j=1, 2, \dots, N$ وتنتهي الخوارزمية عندما نصل الى الحل الامثل. لتكن منطقـة الحـل الممكن لـ (HIP) هي (Liu & Konvalina, 1991):

$$X = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_N) : \sum_{j=1}^{N} x_j \le K, x_j \ge 1 \; \forall_j = 1, 2, \dots, N\right\} \dots (3)$$

وايضا نفرض ان :

$$X_p = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_N) : \sum_{j=1}^{N} x_j = N + P, x_j \ge 1\right\} \dots (4)$$

حيث ان:

$L = K - N$

إن $\{X_p: p=0, 1, 2, \dots, L\}$ هي جزء من X.

لجميع قيم $P = 0, 1, \dots, L$ نفرض ان:

$$X(p) = (x(p,1), x(p,2), \dots, x(p,N)) \in x_p \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$d(p) = (d(p,1), d(p,2), \dots, d(p,N)) \quad \dots\dots\dots (6)$$

حيث ان:

$$d(p,j) = \begin{cases} 1, \text{if } j = M \text{ for exactly one given } M \in \{1,2,\dots,N\} \\ 0, \text{if } j \ne M \text{ for all } j \in \{1,2,\dots,N\} \end{cases} \quad \dots(7)$$

عندئذ فانه عندما تكون (p=0) فان جميع عناصر x(p) تساوي واحد اي ان:

$$x(p) = (1, 1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

وان:

$$x(p+1) = x(p) + d(p), \text{ for all } p = 0, 1, 2, \dots, L \quad \dots\dots\dots (9)$$

وهكذا فان:

$$f\big(x(p)\big) - f\big(x(p+1)\big) = \frac{a_M}{x(p,M)(x(p,M)+1)} > 0$$

$$\text{for all } 0 \le p \le L, x(p) \in X_p \quad \dots\dots\dots (10)$$

اذن $\{f(x(p))\}$ هي متتالية متناقصة لـ p عندما $0 \le p \le L$.

$$\forall\, x(p) = \left(x(p,1), x(p,2), \ldots x(p,N)\right) \in X_p$$
$$\forall\, x(p+1) = \left(x(p+1,1), x(p+1,2), \ldots x(p+1,N)\right) \in X_{p+1}$$
$$\bar{x}(p) = \left(x(p,1), \bar{x}(p,2), \ldots \bar{x}(p,N)\right)$$
$$\bar{x}(p+1) = \left(\bar{x}(p+1,1), \bar{x}(p+1,2), \ldots \bar{x}(p+1,N)\right)$$

اذا اختيرت (M) بحيث ان:

$$f(\bar{x}(p)) - f(\bar{x}(p+1)) = \frac{a_M}{\bar{x}(P,M)\overline{(x}(P,M)+1)} = \max_{1\le j\le N} \frac{a_j}{x(p,j)(x(p,j)+1)} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

عندئذ يوجد (q) بحيث ان:

$$y(k,q) = x(k+1,q)$$

وكذلك فان:

For all $j \neq q$, $y_j = x_j$

وهذا يؤدي الى ان:

$$\frac{a_M}{\bar{x}(k,M)(\bar{x}(k,M)+1)} \ge \frac{a_q}{x(k,q)(x(k,q)+1)}$$

نفرض ان المتتالية $\{\bar{x}(p) \epsilon X_p : p = 0, 1, 2, \ldots, L\}$ وان d(p) هي كما معرفة في المعادلات (5) و (6) و (7) و (8) و (9) عندئذ فان:

$$f(\bar{x}(p)) \le f(x) \text{ for all } x\epsilon\, X_p \text{ and for all } P = 0, 1, 2, \ldots, L \quad \ldots (12)$$

عندئذ ينتج لدينا:

$$\bar{x}(L), L = K - N$$

هـــي الحـــل الامثـــل لمـــسألة البرمجـــة العدديـــة اللاخطيـــة (RIP) (Liu, Chuang & Hwang, 2006).

5- الخوارزمية المقترحة:

الخطوات لايجاد الحل الامثل للخوارزمية المقترحة هي:

1. افرض ان ($x_j=1$) لجميع قيم $j=1, 2, \ldots, N$.
2. احسب قيمة (t_j) لجميع قيم $j=1, 2, \ldots, N$ حيث ان:

$$t_j = \frac{a_j}{x_j}$$

3. ايجاد اعظم او اعلى jmax لـ $\max\ \{t_j, j=1, 2, \ldots, N\}$ واذا كانت jmax هي (Mutiple) فيتم اختيار اول واحدة.
4.

$$x_{jmax} = x_{jmax} + 1$$

5. اعادة تكرار العملية من الخطوة (2) الى الخطوة (4) حتى الحصول على:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = K$$

6. حساب دالة الهدف $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ حيث ان:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{x_j} = \min_{x \epsilon X} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

6- الجانب التطبيقي

اذا كانت لدينا دالة الهدف الاتية:

$$\min \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{20}{x_1} + \frac{20}{x_2} + \frac{30}{x_3} + \frac{40}{x_4}$$

$$\text{s.t.} \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \le 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 1$$

صمم برنامج بلغة (Matlab 7.4) وبما يتلاءم مع خطـوات الخوارزميـة المقترحة وكانت النتائج كما مبينة في الجدول الاتي:

جدول يبين نتائج تطبيق الخوارزمية المقترحة لتكوين متتالية من الحلول المقبولة تكراريا لغرض الحصول على الحل الامثل

j / i	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	t_{imax}	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	$\sum_j x_{ij}$	Min f
t_{j1}	20	20	30	40	40	1	1	1	2	5	90
t_{j2}	20	20	30	20	30	1	1	2	2	6	75
t_{j3}	20	20	15	20	20	2	1	2	2	7	65
t_{j4}	10	20	15	20	20	2	2	2	2	8	55
t_{j5}	10	10	15	20	20	2	2	2	3	9	48.3
t_{j6}	10	10	15	13.3	15	2	2	3	3	10	43.3
t_{j7}	10	10	10	13.3	13.3	2	2	3	4	11	40
t_{j8}	10	10	10	10	10	3	2	3	4	12	36.67
t_{j9}	6.67	10	10	10	10	3	3	3	4	13	33.3
t_{j10}	6.67	6.67	10	10	10	3	3	4	4	14	30.83
t_{j11}	6.67	6.67	7.5	10	10	3	3	4	5	15	28.83
t_{j12}	6.67	6.67	7.5	8	8	3	3	4	6	16	27.5

من الجدول اعلاه يتضح بان الحل الامثل هو:

$x_1 = x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$

وان:

$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 27.5$

وباستخدام طريقة عوامل Lagrange و Kuhn-Tucker conditions

وهي صيغة رياضية لحل مسائل في البرمجة اللاخطية يتضح ان:

$L(x_1, x_2, x_3, x_4, Z, \lambda)= f(x_1, x_2, x_3, x_4)- \lambda[g((x_1, x_2, x_3, x_4)+Z^4]-16$

$x_1+ x_2+ x_3+ x_4-16+Z^4=0$

$g(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1+ x_2+ x_3+ x_4-16=\mathbf{0}$

$$\therefore L(x_1, x_2, x_3, x_4, Z, \lambda)= \frac{20}{x_1}+\frac{20}{x_2}+\frac{30}{x_3}+\frac{40}{x_4}-\lambda[x_1+x_2+x_3+x_4-16+z^4]$$

عندئذ فان (Stationary Points) هي :

$$L_{x_1} = f_{x_1} + \lambda g_{x_1} = 0 \Rightarrow \frac{-20}{x_1^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20}{x_1^2} \qquad \ldots\ldots. (1)$$

$$L_{x_2} = f_{x_2} + \lambda g_{x_2} = 0 \Rightarrow \frac{-20}{x_2^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20}{x_2^2} \qquad \ldots\ldots. (2)$$

$L_{x_3} = f_{x_3} + \lambda g_{x_3} = 0 \Rightarrow \frac{-30}{x_3^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{30}{x_3^2}$ .... (3)

$L_{x_4} = f_{x_4} + \lambda g_{x_4} = 0 \Rightarrow \frac{-40}{x_4^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{40}{x_4^2}$ .... (4)

$\lambda g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$

$L_Z = -4\lambda Z^3 = 0$ ....(5)

$L_\lambda = -[g((x_1, x_2, x_3, x_4) + Z^4] = 0$

$L_\lambda = -[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 + Z^4]$ ....(6)

الشروط اعلاه تسمى (Kuhn-Tucker Conditions) حيث ان $(\lambda \geq 0)$.

$\lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16) = 0$ .... (7)

من (1) و (2) نحصل على :

$x_1 = x_2$ .... (8)

من (1) و (3) نحصل على :

$x_3 = \frac{3}{2}x_1$ ....(9)

من (1) و (4) نحصل على :

$x_4 = 2x_1$ ...... (10)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$

الحل الامثل هو:

$x_1 = x_2 = \frac{32}{11} = 2.9$

$x_3 = \frac{48}{11} = 4.36$

$x_4 = 5.81$

وان:

$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 27.6$

يتبين انه من خلال مقارنة نتائج تطبيق الخوارزمية المقترحة مـع طريقـة عوامل Lagrange و(Kuhn-Tucker Conditions) ان قـيم x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و $\min f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ تكون متقاربة بتقارب بسيط جدا اي تقريبا متساوية مما يدل على دقة وكفاءة الخوارزمية المقترحة في ايجاد الحل الامثل.

3- الاستنتاجات

لقد خاص البحث الى جملة من الاستنتاجات للحل اهمها:

1- ان الخوارزمية المقترحة في حل مسائل البرمجة العددية اللاخطية لمسألة تخصيص الموارد البشرية بسيطة نسبيا وكفوءة وذات دقة عالية وافضل اذا ما تمت مقارنتها بالطرائق التقليدية او الكلاسيكية الاخرى مثل طريقة عوامل Lagrange و (Kuhn-Tucker Conditions) وتبين ذلك من خلال النتائج المتقاربة التي تم التوصل اليها.

2- وجد من خلال النتائج في تطبيق الخوارزمية المقترحة لمسألة تخصيص الموارد انه يمكن تكوين متتالية من الحلول الممكنة او المقبولة تكراريا حيث يوجد فقط (K-N=12) من التكرارات و (N=4) من التقسيمات و (K-N=12) من المقارنات لغرض الحصول على الحل الامثل.

3- يمكن التوصل الى النتائج نفسها اذا ما تم تطبيق الخوارزمية المقترحة اذا كانت:

$$t_j = \frac{a_j}{x_j(x_j+1)}$$

4- المصادر

1- Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L. and Stein, Clifford, (2002), “Introduction to Algorithms”, Second Edition, McGrew-Hill Book Company, MIT Press.

2- Du,D.-Z. and Pardalos, P.M., (1998), “Handbook of Combinatorial Optimization”, Kluwer Academic Publishers.

3- Fletcher, R., (1987), “Practical Methods of Optimization”, Second Edition, John Wiley & Sons, New York.

4- Karlof, John K. (2006), “Integer programming: Theory and Practice”, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC.

5- Lange, Kenneth, (2004), “Optimization”, Springer-Verlag NY, LLC, USA.

6- Li, Duan and Sun, Xiaoling, (2006), "Nonlinear Integer Programming", Springer Science + Business, LLC.

7- Liu, Y.H. and Konvalina, J., (1991), "Zero-One Matrices without Consecutive Ones", Applied Mathematics Letters, Vol. 4, No. 2, PP. 35-37.

8- Liu, Y.H., Chudng, J.M. and Hwang, Ming-Jiu, (2006), "Solving a Nonlinear Integer Program for Allocating Resources", Mathematical and Computer Modelling, 44, PP. 377-381.

9- Leunberger, David G. and Ye, YinYu, (2008), "Linear and Nonlinear Programming", Third Edition, Springer Science + Business Media, LLC.

10- Schrijver, A., (1986), "Theory of Linear and Integer Programming", Wiley – Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons.