المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (16) 2009
ص ص [53– 72]

تقدير معلمات توزيع وايبل

ميسون مال ا عزيز* نصر الدين عيد**

الملخص:

يتعلق البحث بتقدير معلمات توزيع وايبل الذي دالة كثافة احتماله معطاة بـ

$$w(\chi;\alpha,\beta)=\beta\alpha^{\beta}\chi^{\beta-1}\exp\left[-(\alpha\chi)^{\beta}\right] \quad ,\chi\geq 0,\alpha>0,\beta>0 .$$

أخذت عينات بأحجام مختلفة تمت محاكاتها 1000 مـرة للحـصول علـى الخصائص الإحصائية للمقدرات. تم الحصول على المقدرات بطريقـة المربعـات الصغرى لمنشور تايلور ، للحالتين وجود وغياب الحد من الرتبة الثانية في منشور تايلور وتمت المقارنة بين الحالتين . المقدرات اقل تحيز في حالة وجـود تقريـب الرتبة الثانية في منشور تايلور موجود .

لفحص النموذج تم اختبار البواقي لعينة بحجم 50 و بـ 5 محاكـاة للحـالتين وجود وغياب تقريب الرتبة الثانية في منشور تايلور. الأخطاء لها معـدل صـفر وتباين ثابت .

تم الحصول على النتائج من خلال استخدام الحاسب الالكتروني .

Estimation of Weibull Distribution Parameters

Abstract :

This paper is concerned with the estimation of the parameters of Weibull distribution whose density function is given by

$$w(\chi;\alpha,\beta)=\beta\alpha^{\beta}\chi^{\beta-1}\exp\left[-(\alpha\chi)^{\beta}\right] \quad ,\chi\geq 0,\alpha>0,\beta>0$$

---

* قسم الرياضيات/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل/ تفرغ علمي - جامعة حلب

** قسم الإحصاء الرياضي/كلية العلوم/جامعة حلب

Samples for each of the different sample sizes were simulated 1000 times computer simulation is used to obtain the statistical properties of the estimators .

Estimators have been obtained by method of least squares,for the two cases, presence and absence of the second order approximation in the Taylor expansion, and comparison between the two cases is made. The estimators is less biased for the case where second approximation in Taylor expansion is present than for other case.

In order check the model examination of the residual is carried out for a sample of size 50 with 5 simulations for both in case of presence and absence of second order approximation in the Taylor expansion.

The errors have zero mean and constant variance.

The calculation is carried out by computer.

المقدمة

شهد العالم في العقود الخمس الأخيرة ثورة صناعية وتكنولوجية كبيرة ، وبحكم المنافسة في السوق العالمية تقوم الشركات والمصانع بتحسين إنتاجها وتطويره، وذلك من خلال معرفة حالات وأوقات فشل المعدات والأجهزة ، ولذلك تم استحداث هندسة المعولية (دقة الأداء) Reliability Engineering التي هي من احدث الاختصاصات التي تهتم بدراسة وتحليل تأثير الأعطال الفجائية في أداء المعدات الصناعية وتبحث عن الطرق والأساليب التي تستهدف الحد من الأعطال الفجائية وتقليل تأثيرها في كفاءة الأداء والسلامة.

(Shuo, 2002) , (Padgett & Mason, 1995)

ويعد توزيع وايبل احد التوزيعات المستمرة واهم النماذج الشائعة الذي له أهمية في حقل المعولية وعدد من اختبارات الحياة (Life Testing) درست مسائل مختلفة لها علاقة بالتوزيع من قبل باحثين ، وأصبح واسع الانتشار ويعتبر النموذج المناسب لوصف أوقات الفشل(Failor times) لاحظ(Olsson, 1994)

التوزيع الرياضي لأوقات الفشل

أوقات الفشل لأي وحدة هي أي عدد موجب توزيعه مستمر ويوضح إما بدالة كثافة الاحتمال $w(x)$ أو بدالة التوزيع التراكمي $W(x)$ ، اذ ان احتمالية وحدة تفشل بالفترة من x إلى $x+\Delta x$ معطاة بـ $w(x)\Delta x$. أيضا احتمالية الوحدة تفشل بوقت إلى x معطاة بـ $W(x)$، دالة المعولية $R(x)$ (Survivor function) تعطي احتمالية ان الوحدة لم تفشل حتى الوقت x ، أي $R(x) = 1 - W(x)$ سلسلة أوقات الفشل تعرف بـ $o \le x_1 \le x_2 \le .... \le x_n$.

المسألة هي تقدير الدوال $w(x)$ ، $W(x)$، $R(x)$ من أوقات الفشل المعطاة .

عندما يكون نوع التوزيع الرياضي غير معلوم غالبا نقدر الدالة الشرطية لنسبة الفشل (age specific failure rate function)

معطاة بـ
$$C(x) = \frac{w(x)}{R(x)}$$

من المهم جداً ان نبين ان هذه الدالة تمثل احتمالية شرطية ، وان $C(x)$ هي دائماً اكبر من $w(x)$ لان $R(x)$ دائماً اصغر من 1 . الدالة $C(x)$ تصف توزيع اوقات الفشل وتعتبر هي طريقة القياس الاساسية للمعولية . رياضياً احتمال فشل وحدة خلال الفترة $(x; x+\Delta x)$ هو

$$C(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_r(x < X \le x + \Delta x / X = x)}{\Delta x}$$

العلاقة بين $C(x)$ و $R(x)$ نوجدها بالطريقة الاتية

$$w(x) = \frac{dW(x)}{dx} = -\frac{dR(x)}{dx}$$

$$\therefore\ C(x) = \frac{w(x)}{R(x)} = -\frac{d \ln R(x)}{dx}$$

وبالعكس

$$R(x) = \exp\left[-\int_o^x C(u)\ du\right]$$

∴ نسبة الفشل الشرطي لنموذج وايبل معطاة بـ

$$C(x) = \beta\alpha^{\beta} x^{\beta-1}$$

الدالة تعتمد على معلمتين β و α حيث β هي معلمة الشكل و α هي معلمة القياس . عندما $\beta=1$ فان $C(x) = \alpha$ لهذا النموذج الاسي هو حالة خاصة من نموذج وايبل . تم اشتقاق دالة المعولية ، دالة التوزيع التراكمي ، التباين ، معامل الاختلاف لنموذج وايبل ، حيث ان

دالة المعولية لنموذج وايبل $R(x) = \exp\left[-(\alpha x)^{\beta}\right]$

دالة التوزيع التراكمي $W(x) = 1-\exp\left[-(\alpha x)^{\beta}\right]$

المعدل $\mu = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ ،

التباين $\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$ ،

ومعامل اختلاف $\frac{\sigma}{\mu} = \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}$

مقدرات المربعات الصغرى

تعريف

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة بنفس التباين والتوقعات التي هي دوال للمعلمات $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ فان مقدرات المربعات الصغرى للمعلمات هي تلك القيم بحيث يكون $\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x_i))^2$ اصغر ما يمكن.

مبرهنة (A) (Aziz, 1979)

اذا كان x_r يمثل زمن الفشل الرائي ، فان المقدر غير المتحيز لـ $W(x_r)$ هو $\frac{r}{n+1}$ ، والمقدر غير المتحيز لدالة المعولية هو $\frac{n+1-r}{n+1}$ ، كما ان تباين W هو $\frac{r(n+1-r)}{(n+1)^2(n+2)}$ ، حيث ان $x_1 \le x_2 \le \ldots . \le x_n$ تمثل مجموعة من n من المشاهدات المرتبة من توزيع وايبل .

البرهان :

لكي نبرهن $E[W(x_r, \alpha, \beta)] = \frac{r}{n+1}$

دالة كثافة احتمال الإحصائي الذي ترتيبه r وليكن x_r ، هي

$$f(x_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [W(x_r)]^{r-1} [1 - W(x_r)]^{n-r} dW(x_r)$$

فان دالة كثافة احتمال $W(x_r)$ هي

$$f(W) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} W^{r-1} 1 - W^{n-r} \quad , 0 \le W \le 1$$

وباستعمال $f(W) = f(x_r) \left| \frac{d\, x_r}{dW} \right|$

حيث

$f(x_r) \ne o$ فان $f(W)$ تمثل دالة كثافة احتمال توزيع بيتا . اذن

$$E(W) = \int_o^1 W f(W)\, dW = \frac{r}{n+1}$$

$$E(R) = 1 - E(W) = \frac{n+1-r}{n+r}$$

الان $E(W^2) = \int_o^1 W^2 \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} W^{r-1}(1-W)^{n-r}\, dW$

$$E(W^2) = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

اذن $Var(W) = \dfrac{r(n+1-r)}{(n+1)^2(n+2)}$

التطبيق على توزيع وايبل

دالة التوزيع لنموذج وايبل

$$W(x_1 \alpha_1 \beta) = 1 - \exp\left[-(\alpha x)^{\beta}\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

افرض $z(x, \alpha, \beta) = (\alpha x)^{\beta}$ ، المتغير العشوائي $(\alpha x)^{\beta}$ له دالة توزيع $F(z) = 1 - \exp(-z)$

بأخذ $\log_e$ لمعادلة (1) نحصل على

$$\ln[1 - W] = -(\alpha x)^{\beta} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \ln[-\ln(1-W)] = \beta \ln \alpha + \beta \ln x$$

تمثل علاقة خطية بين $\ln[-\ln(1-W)]$ و $\ln x$.

معطى $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجموعة مرتبة بـ n من المشاهدات و $x_r = \ln x_r$ تبعا لـ $y_r = E[\ln[-\ln(1-W(x_r))]]$ نأخذ

$$y_r = \ln\left[-\ln(1 - \frac{r}{n+1})\right] \quad \ldots\ldots\ (3)$$

$\therefore$ (2) تصبح $y_r = \beta \ln \alpha + \beta \ln x_r + \varepsilon_r \quad \ldots (4)$

الآن نستعمل (2) لإيجاد مقدرات المربعات الصغرى

وبتفاضل (5) جزئيا بالنسبة لـ α و β ومساواتها بالصفر نحصل على

$$\ln \hat{\alpha} = \frac{\sum_{r=1}^{n} y_r}{n\beta} - \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r}{n}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{r=1}^{n} y_r x_r - \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r \sum_{r=1}^{n} y_r}{n}}{\sum_{r=1}^{n} x_r^{\ 2} - \frac{(\sum_{r=1}^{n} x_r)^2}{n}} \qquad ...(6)$$

حيث x_r و y_r معرفتان في (3) . افرض

$$z_r = (\alpha x_r)^{\beta} \qquad .... (7)$$

بأخذ $\log_e$ لمعادلة (7) نحصل على $\ln x_r = \frac{1}{\beta} \ln z_r - \ln \alpha$

وبالتعويض في معادلة (6) نحصل على

$$\frac{\hat{\beta}}{\beta} = \frac{n\sum_{r=1}^{n} y_r \ln z_r - \sum_{r=1}^{n} y_r \ln z_r}{n\sum_{r=1}^{n} [\ln z_r]^2 - \left[\sum_{r=1}^{n} \ln z_r\right]^2} \qquad ....(8)$$

حيث $z_1 \le z_2 \le ... \le z_n$ عينة مرتبة من توزيع أُسي

$\therefore \ \frac{\hat{\beta}}{\beta}$ لا يعتمد على أية معلمة.

المسألة هو كيف نحسب y_r . القيمة التقديرية لـ y_r يمكن الحصول عليها كما ياتي . إذا كان x متغيرا عشوائيا و $E(x)=\mu$ و $G(x)$ هي دالة لـ x فإنه باستعمال منشور تايلور نحصل على

$$G(x) \cong G(\mu) + (x-\mu)G'(\mu) + \frac{(x-\mu)^2}{2!}G''(\mu) \qquad ....(9)$$

نأخذ التوقع لـ (9) نحصل على

$$E[G(x)] \approx G(\mu) + \frac{G''(\mu)}{2!}V(x) \qquad ....(10)$$

في مسألتنا

$$\text{y} = \text{G}(W) = \ln[-\ln(1-\text{W})] \qquad ...(11)$$

$\therefore$ التقريب الاول لـ y_r هو

$$y_r = G(\mu) = \ln\left[-\ln(1-\frac{r}{n+1}\right] \qquad ...(12)$$

المشتقة الثانية لـ (11)

$$\text{G}''(W) = -\frac{1+\ln(1-\text{W})}{(1-\text{W})^2[\ln(1-W)]^2}$$

$$\therefore \quad \text{G}''(\mu) = -\frac{1+\ln(1+\frac{\text{r}}{\text{n}+1})}{(1-\frac{\text{r}}{\text{n}+1})^2\left[\ln(1-\frac{\text{r}}{\text{n}+1})\right]^2}$$

باستعمال (10) ، (11) ومبرهنة A نحصل

$$\text{y}_r = \ln\left[-\ln(1-\frac{r}{n+1})\right] - \frac{r}{2!(\text{n}+2)(\text{n}+1-\text{r})}\cdot\left[\frac{1}{(\ln\frac{n+1-r}{n+1})^2} + \frac{1}{\ln\frac{n+1-r}{n+1}}\right] ...(13)$$

$$\therefore \qquad \frac{\hat{\beta}}{\beta} = \frac{n\sum y_\gamma \ln \text{z}_\gamma - \sum y_\gamma \ln \text{z}_\gamma}{n\sum(\ln \text{z}_\gamma)^2 - (\sum \ln \text{z}_\gamma)^2}$$

حيث y_γ معرفة بـ (13) .

التباين والتباين المختلط للمقدرات

مصفوفة التباين – التباين المختلط لـ $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$

$$=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 \log_e W}{\partial \alpha^2}\right]_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} & -E\left[\frac{\partial^2 \log_e W}{\partial \alpha \partial \beta}\right]_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \\ -E\left[\frac{\partial^2 \log_e W}{\partial \alpha \partial \beta}\right]_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} & -E\left[\frac{\partial^2 \log_e W}{\partial \beta^2}\right]_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} V(\hat{\alpha}) & \operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \\ \operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & V(\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

التطبيق على نموذج وايبل

$w(x,\alpha,\beta)$ **هي دالة كثافة احتمال توزيع وايبل**

$$\log w = \log\beta + \beta\log\alpha + (\beta-1)\log x - (\alpha x)^{\beta} \qquad ...(14)$$

نجد المشتقة الثانية الجزئية بالنسبة لـ α و β في (14)

$$\frac{\partial \log w}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}(\alpha x)^{\beta} ...(15)$$

$$\frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha^2} = -\frac{\beta}{\alpha^2}\left[1 + (\alpha x)^{\beta}(\beta-1)\right]$$

$$\frac{\partial \log w}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta} + \log\alpha + \log x - (\alpha x)^{\beta}\log(\alpha x)$$

$$\frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{(\alpha x)^{\beta}}{\alpha}\left[1 + \beta\log(\alpha x)\right] \qquad ...(16)$$

$$\frac{\partial^2 \log w}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\beta^2} - (\alpha x)^{\beta}\left[\log(\alpha x)\right]^2 \qquad ...(17)$$

بأخذ التوقع السالب لـ (15) ، (16) ، (17) نحصل على

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \beta^2}\right]=\frac{\beta}{\alpha^2}+\int_0^\infty \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^2}(\alpha x)^\beta \alpha^\beta x^{\beta-1}e^{-(\alpha x)^\beta}dx$$

ليكن $u=(\alpha x)^\beta$

$$\therefore \quad -E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha^2}\right]=\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^2}\frac{\beta}{\alpha^2}+\int_0^\infty ue^{-u}du=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha \partial \beta}\right]=-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (\alpha x)^\beta (1+\beta \ln(\alpha x)\beta\alpha^\beta x^{\beta-1}e^{-(\alpha x)^\beta}dx$$

$$=-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty u(1+\ln u)e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\int_0^\infty u\ln ue^{-u}du$$

باستعمال معادلة (2) في الملحق

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha \partial \beta}\right]=-\frac{1}{\alpha}(0.4228)$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \beta^2}\right]=-\frac{1}{\beta^2}\left[1+\int_0^\infty u(\ln u)^2 e^{-u}du\right]$$

وباستعمال معادلة (1) في الملحق

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log w}{\partial \beta^2}\right]=\frac{1.823}{\beta^2}$$

$\therefore$ مصفوفة المعلومات (information matrix)
$$\begin{bmatrix}\frac{\beta^2}{\alpha^2} & \frac{0.4228}{\alpha}\\ \frac{0.4228}{\alpha} & \frac{1.823}{\beta^2}\end{bmatrix}$$

بأخذ المقلوب لمصفوفة التباين نجد ان

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha^2} & \frac{0.4228}{\alpha} \\ \frac{0.4228}{\alpha} & \frac{1.823}{\beta^2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1.108745\frac{\alpha^2}{\beta^2} & (-0.2571)\alpha \\ (-0.2571)\alpha & (0.608)^2\beta^2 \end{bmatrix} \quad ...(18)$$

الحد الأدنى لكرامر راو (Gramer-Rao) يعطي الحد الأدنى للمقدرات غير المتحيزة .

المحاكاة والنتائج

دالة التوزيع التراكمي لتوزيع وايبل

$$W(x,\alpha,\beta) = 1-\exp\left[-(\alpha\beta)^{\beta}\right] \qquad , x \ge 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

حيث $z = (\alpha x)^{\beta}$

فان دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع المنتظم بالفترة (0,1) هي

$$F(z) = 1 - e^{-z} = RANDOM(JJ)...(19)$$

حيث $z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_n$

من (19) نحصل على $z = -\log(1-F(z))...(20)$

بما أن التوزيع لـ $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ لا يعتمد على α و β

المعادلة (20) يمكن أن توضح بالصيغة

$$x = -\log(1-F(z))...(21)$$

وبوضع $\alpha = \beta = 1$ ،

للحصول على خصائص $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ المعطاة بـ (8) و (13) ، عينات عشوائية

$x_1 \ldots x_n$ تمت محاكاتها بأعداد عشوائية بالفترة صفر الى واحد.

عينات عشوائية حجمها $n = 10,20,30,40,50$. تمت محاكاتها من توزيع وايبل للحالتين وجود وغياب الحد من الرتبة الثانية في منشور تايلور بمعلمات $\alpha = 1, \beta = 1$ لكل n . العينات تمت محاكاتها 1000 مرة المقدر $\hat{\beta}$ تم الحصول عليه بطريقة المربعات الصغرى .

الجدول I يبين قيم المعدل $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ التي تم حسابهما للحالتين .

للمقدر غير المتحيز متجه المعدل يجب أن يكون قريبا جدا من الواحد، الاخطاء القياسية المقدرة لتوزيع $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ موضحة بين الأقواس .

الحد الأدنى لكرامر راو لتباين المقدرات غير المتحيزة لـ β معتمدة على عينات عشوائية حجمها n هو $\frac{0.608\beta^2}{n}$ الذي معطى بـ (18) . العمود الأخير في الجدول I قيم لـ $\sqrt{\frac{0.608}{n}}$ معطاة لمقارنة الأخطاء القياسية للحالتين .

الجدول I

المعدلات (μ) ، الاخطاء القياسية (σ) ، معاملات الاختلاف ($c.v$) لمقدرات التوزيعات لعينة بأحجام $n = 10,20,30,40,50$

n		الحالة الاولى غياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور	الحالة الثانية وجود التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور	$\sqrt{\frac{0.608}{n}}$
10	μ	0.8563	0.9763	(0.2465)
	σ	(0.2700)	(0.3057)	
	$c.v$	0.3153	0.3131	
20	μ	0.8953	0.9842	(0.1743)
	σ	(0.2036)	(0.2211)	
	$c.v$	0.2274	0.2246	
30	μ	0.9105	0.9829	(0.1423)

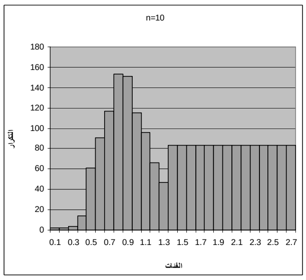
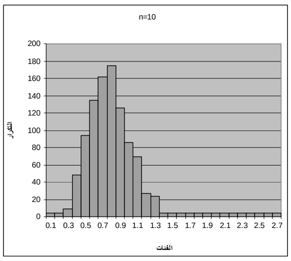
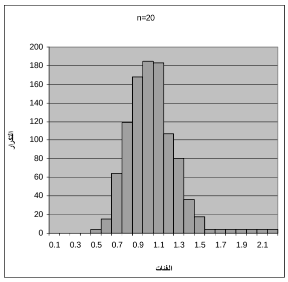
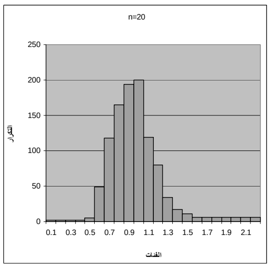
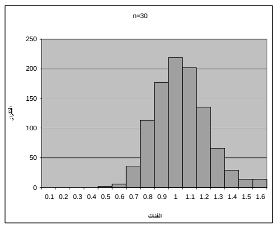
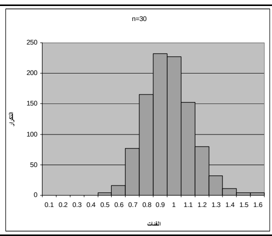
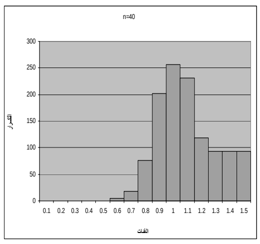
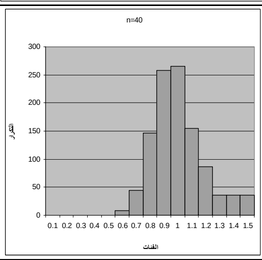
	σ	(0.1558)	(0.1767)	
	$C.V$	0.1821	0.1797	
40	μ	0.9233	0.9856	(0.1232)
	σ	(0.1461)	(0.1538)	
	$C.V$	0.1582	0.1560	
50	μ	0.9335	0.9887	(0.1103)
	σ	(0.1355)	(0.1417)	
	$C.V$	0.1451	0.1433	

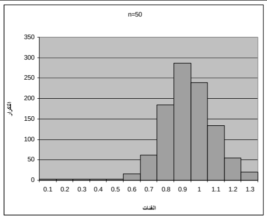
النتائج لـ $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ عندما $n = 10,20,30,40,50$ وبغياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور تتفق مع نتائج البحث(Trustrum&Jayatilaka, 1978).

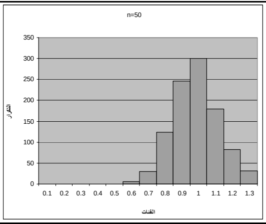
من الجدول I يتبين ان المقدرات $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ التي تم الحصول عليها من طريقة المربعات الصغرى كلها متحيزة بغياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور واقل تحيز بوجود التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور. والتحيز بصورة عامة اقل من الخطأ المعياري وكلما يزداد حجم العينة تزداد معدلات التوقع وتكون مقاربة للواحد في الحالة الثانية ، هذه الحالة أفضل كثيراً من الحالة الأولى لأن الحد الأدنى للخطأ المعياري للمقدر يتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي لحجم العينة n ، وللحالتين عندما يزداد حجم العينة يقل الخطأ المعياري لكن معامل الاختلاف للحالة الأولى اقل مما هو عليه في الحالة الثانية .

لإيجاد شكل توزيعات المقدرات $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ تم رسم مدرجات تكرارية وبأحجام عينات مختلفة للحالتين بوجود التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور وبغياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور، بصورة عامة تبين ان لكل حجم عينة، ان شكل التوزيع للمقدرات بوجود التقريب من الرتبة الثانية افضل مما هو عليه بغياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور وذلك لان الاشكال التكرارية في حالة وجود التقريب من الرتبة الثانية تكون اقل التواء Less skew مما هي عليه بغياب التقريب من الرتية الثانية. وشكل التوزيع تدريجياً يقترب من التوزيع الطبيعي كلما يكبر حجم العينة كما موضح في الاشكال التكرارية الاتية :

المدرجات التكرارية لـ $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ لعينة حجمها n

بوجود التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور	بغياب التقريب من الرتبة الثانية في منشور تايلور
	
	
	
	





اختبار البواقي

البواقي $i=1,2,...,n$, $e_i = y_i - \hat{y}_i$ حيث y_i هي القيمة المشاهدة و $\hat{y}_i$ هي القيمة التقديرية . مقدرات المربعات الصغرى غير متحيزة ولها اقل من تباين شرط الأخطاء تكون غير مترابطة ومعدلاتها تساوي صفرا وتباينها يكون ثابتا.

في مسألتنا القيمة المشاهدة y_i معرفة في (3) للحالة الاولى والقيمة المقدرة $\hat{y}_i$ معرفة بـ

$$\hat{y}_i = \bar{y} + \frac{\hat{\beta}}{\beta}\left[\log(x_i)\right] - \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\log(x_i)}{n}\right]$$

حيث $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ و x_i معرفة في (21) في حالة وجود التقريب من الرتبة الثانية التعبير الجبري اعلاه ، القيمة المشاهدة y_i كما معرفة في (13) ، تم للحالتين توليد اعداد عشوائية لعينة بحجم 50 ومحاكاتها خمس مرات ، لكل محاكاة المعدل $\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n}$ والتباين $\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2}{n-1}$ و $\sum_{i=1}^{n} e_i \hat{y}_i$ تم حسابهما ، للخمس محاكاة وللحالتين الشروط $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} e_i \hat{y}_i = 0$ متحققة ، لاختبار فيما اذا كانت البواقي عشوائية لكل محاكاة وللحالتين وباستعمال اختبارالتشغيل(run test)

عدد البواقي باشارات موجبة في كل محاكاة = n_1

عدد البواقي باشارات سالبة في كل محاكاة = n_2

حجم العينة = $n = n_1 + n_2$

عدد المشغلات في كل محاكاة

(Number of runs in each simulation) r=

المعدل = $Mean = \mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1$

الانحراف القياسي $\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_2)}{n_1+n_2(n_1+n_2-1)}}$

حيث $z = \frac{r-\mu_r}{\sigma_r}$

في الجدول II قيم Z و $P(Z \le z)$ لكل محاكاة وللحالتين

الجدول II

المحاكاة	الحالة الأولى		الحالة الثانية	
	Z	$P(Z \le z)$	Z	$P(Z \le z)$
1	-4.25	0.009	-4.22	0.009
2	-5.71	0.009	-5.14	0.009
3	-4.25	0.009	-2.84	0.009
4	-6.30	0.009	-6.30	0.009
5	-4.42	0.009	-5.96	0.009

بمستوى معنوية 1% و 5% نرفض بان البواقي عشوائية أي البـواقي مترابطـة ، لهذا نقترح إضافة حدود تقريبية أخرى في التقريب بمنشور تايلور لتقدير المعلمة .

الاستنتاجات

1- يتبين من الجدول I ان المقدرات $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ التي تم الحصول عليهـا بطريقـة المربعات الصغرى كلها متحيزة في غياب تقريب الرتبة الثانية (الحالة الأولى) واقل تحيز في وجود تقريب الرتبة الثانية (الحالة الثانية) ، التحيز بصورة عامة اقل كثيرا من الخطأ المعياري(Standard error) .

بازدياد حجم العينة تزداد الأوساط المقدرة تزداد وتكون مقاربة للواحد فـي الحالة الثانية ، لهذا فان الحالة الثانية أفضل من الحالة الأولى .

2- الحد الأدنى للخطأ المعياري يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعـي لحجـم العينة n ، لهذا كلما يزداد حجم العينة يقل الخطـأ المعيـاري فـي الحـالتين ولجميع قيم حجم العينة يكون الخطأ المعياري في الحالة الأولى اقل ممـا هـو عليه في الحالة الثانية بينما يكون معامل الاختلاف للحالة الأولى مما هو في الحالة الثانية .

3- بيانيا ومن المدرجات التكرارية للمقدرات $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ ولكل حجم عينة يظهـر أن شكل التوزيع للمقدرات في الحالة الثانية أفضل بكثير من الحالة الأولى لأنه اقل (انحراف) وشكل التوزيع مقارب جدا للتوزيع الطبيعي خاصة للعينات ذوات الاحجام الكبيرة .

4- من اختبار البواقي نستنتج ان البواقي مترابطة لهذا فان طريقة المربعـات الصغرى تكون غير مقنعة في تقدير β في الحالتين .

التوصيات

(1) نوصي باجراء طريقة بيانية بسيطة (Simple graphical methode) قبل اجراء التقدير لان الطريقة البيانية البسيطة مفيدة في المراحل الاولى للبحـث ، وتبين مدى ملاءمة نموذج وايبل للبيانات .

(2) بما ان البواقي مترابطة نوصي بإضافة حدود تقريبية أخرى في منشور تايلور

(3) امكانية تقديرالمعلمات بطرق أخرى مثل طريقة الامكان الأعظم وطريقة العزوم والمقارنة بينهما.

المصادر

[1] Aziz , M. M. (1979), "Estimation of the parameter of Weibull distribution", M.Sc. thesis university of Sussex , Brighton, U.K.

[2] Courant, R . , (1936), "*Differential and integral calculus " Vol 2 , PP 334-336.*

[3] Huang, P. F Hwang, T. (2006*): " On new moment Estimation*

of parameters of the generalized gamm Distribution", Taiwanese Journal of Mathematics, Vol.10, No.4,PP1083-1093

[4]Olsson ,karl- Erik, (1994). "Weibull Analysis of Fatigue Test Data", Quality and Reliability", *Engineering international ,Vol..10 ,No. 5, PP437-438,,*

[5] Padgett,w.J.Durham, S. D. And mason, A. M (1995), "weibull analysis of the strength of carbon Fibers using linear and power law model for Length Effect", *Journal of composite materials, vol. 29, No. 14 , PP 1873- 1884*

[6] Shuo, J. W, (2002):" *Estimation of parameters of the Wiebull Distribution with Progressiveely Censored Data", J. Japa. Sta*tist. Soc. Vol. 32, No. 2. PP 155-163.

[7] Trustrum, K. and Jayatilaka A.des. (1978), Estimating the Weibull modulus for britlle material, *J . Mater , Sci.*

الملحق

التحليل التقريبي والطرق العددية

افرض

$$\int_0^\infty u e^{u} (\ln u)^2 \, du = A \quad ...(1.1)$$

حيث

$$\Gamma x = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du \quad ...(1.2)$$

المشتقة الاولى لـ (1.2) هي

$$\Gamma^{1} x = \int_0^\infty e^{-u} (\ln u) u^{x-1} du \qquad ...(1.3)$$

المشتقة الثانية لـ (1.2) هي

$$\Gamma^{11} x = \int_0^\infty e^{-u} (\ln u)^2 u^{x-1} du \quad ...(1.4)$$

من (1.1) و (1.4) نحصل على

$$\Gamma^{11} 2 = A \quad ....(1.5)$$

ايضا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^{-m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \frac{d}{dx^m} [\ln \Gamma x] \quad , \quad m \ge 2 \quad .....(1.6)$$

(Courant, 1936)

$$\therefore \quad \frac{\Gamma x^{1}}{\Gamma x} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+n)} - \frac{1}{n} \right) \qquad .... (1.7)$$

حيث γ هو ثابت اويلرس Eulers Constant

(Huang & Hwang, 2006)

$$\gamma = 0.5772$$

$$\left(\frac{\Gamma x^{1}}{\Gamma x} \right)^{1} = \frac{\Gamma x^{11}}{\Gamma x} - \left(\frac{\Gamma x^{1}}{\Gamma x} \right)^{2} \quad ...(1.8)$$

وباستعمال (1.5) و (1.6) و (1.7) و (1.8)نحصل على

$$\Gamma 2^{11} = \Gamma 2 \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma x \right)_{x=2} + \left(\frac{d \ln \Gamma x}{dx} \right)^2_{x=2} \right]$$

يعني

$$\Gamma 2^{11} = 1.\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+n} = \frac{\pi^2}{6} - 1\right] + \left[\frac{-1}{2} - 0.5772 - \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2+n} - \frac{1}{n}\right)\right]^2$$

$$\Gamma 2^{11} = 0.823 \quad ...(1.9)$$

الآن افرض

$$\Gamma 2^{11} = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \left[-1.0772 + 1.5\right]^2$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} e^{-u} (\ln u)^2 u du = 0.823 \quad ...(1)$$

$$\int_0^{\infty} u\, e^{-u} \ln u\, du = B \quad ...(2.1)$$

من (1.3) و (2.1) نحصل على

$$\Gamma 2^{1} = B \quad ...(2.2)$$

(1.7) تعطي

$$\Gamma 2^{1} = 1.\left[-\frac{1}{2} - 0.5772 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\Gamma 2^{1} = 0.4228 \quad ...(2.3)$$

(2.1) ، (2.2) ، (2.3) تعطي

$$\int_0^{\infty} u\, e^{-u} \ln u\, du = 0.4228 \quad ...(2)$$