

تحليل الاستقرار لطبقة رقيقة من بخار دموع على عدسة لاصقة

د. رتيبة جاسم العطيوي*
زينة طلال النعيمي**

الملخص

الهدف من هذا البحث هو تحليل الاستقرار لمنظومة من معادلات تبخر وجريان طبقة رقيقة من السائل الدمعي خلال السطح الخارجي (PrLTF) لعدسة لاصقة موجودة على قرنية عين مصابة بمرض جفاف العين (متلازمة العين الجافة) وهذا التحليل تم عن طريق استخدام طريقة كالاركين (Galerkin) اذ تمكنا من ايجاد نمو الاضطراب من عدمه وذلك بعد جعل النظام خطي (Linearization) إذ تم ايجاد المعاملات التي تؤثر في زيادة كثافة الغشاء الدمعي ومن ثم التقليل من عملية التبخر المسببة لهذا المرض.

Stability Analysis of the Evaporation of a Tear Film over a Contact Lens

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyse the stability of a system of flow and evaporation liquid of tear film through the pre-lens tear film (PrLTF) of contact lens in eye porous layer which infected by dry-eye (dry eye syndrome) and this analysis was done by using Galerkin method which enables to find disturbance growth from its nonexistence after making the system linearization we find the parameters which affect the increase of the density of tear film and as a result reduces the evaporation operation that cause this disease.

1-المقدمة

ان الطبقة الدمعية الرقيقة التي تفرش على سطح العين امام القرنية تتكون من ثلاث طبقات (زيتية، ومائية، مخاطية)

* مدرس/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل
** مدرس مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

تفرز الطبقة الزيتية الخارجية من مجموعة من الغدد الصغيرة الموجودة على حافة جفن العين والعمل الأساسي لهذه الطبقة هو تسهيل انزلاق الجفن على سطح العين أثناء الرفيف وتقليل نسبة تبخر الدموع

الطبقة الوسطى وهي أكبر الطبقات الثلاثة يكون الماء نسبة 90% منها تكون ما يطلق عليه مجازا (الدموع) وهذه الطبقة المائية تفرزها غدد صغيرة متناثرة على الملتحمة وهي غشاء رقيق يبطن جفن العين ويغطي مقلة العين وهذه الطبقة تغسل العين وتنظفها من الأجسام الغريبة أما الطبقة الداخلية فتتكون من مخاط يفرز من خلايا أخرى في الملتحمة وتسمح هذه الطبقة بانتشار الطبقة المائية على سطح العين وتساعد على بقاء العين رطبة وبدونها لا تلتصق الدموع بالعين فإذا ما تعرضت الطبقة الزيتية للتمزق فان الطبقة السائلة سوف تتعرض للتبخر وهذا يؤدي إلى حدوث مرض جفاف العين الذي هو اعتلال شائع الحدوث حيث إن الغشاء الدمعي الذي فوق العين يستنفذ ويجعل العين جافة وهذا النظام يكون أكثر تعقيدا في حالة وجود العدسات اللاصقة التي تكون نفاذة وبذلك تسمح بمرور السائل الدمعي بين الغشاء الدمعي ما بعد العدسة (PoLTF) وهو السائل الواقع بين سطح القرنية والعدسة اللاصقة ، وبين الغشاء الدمعي ما قبل العدسة (PrLTF) وهذا هو السائل الواقع فوق العدسة اللاصقة والمتعرض للهواء وهذا بسبب نضوب السائل تحتها والذي من الممكن ان ينتج عنه التصاق بين العدسة والقرنية

ان نموذج الغشاء الدمعي خاصة يسمح بمرور السائل خلال العدسة ويتضمن تأثيرات التبخير للغشاء الدمعي ما قبل العدسة (PrLTF) ، ان هذا النموذج يوسع العمل على التبخير الذي قام به (Braun) و (Fitt) و (Winter) والعمل على العدسات اللاصقة من قبل (Nong) و (Anderson) [5]

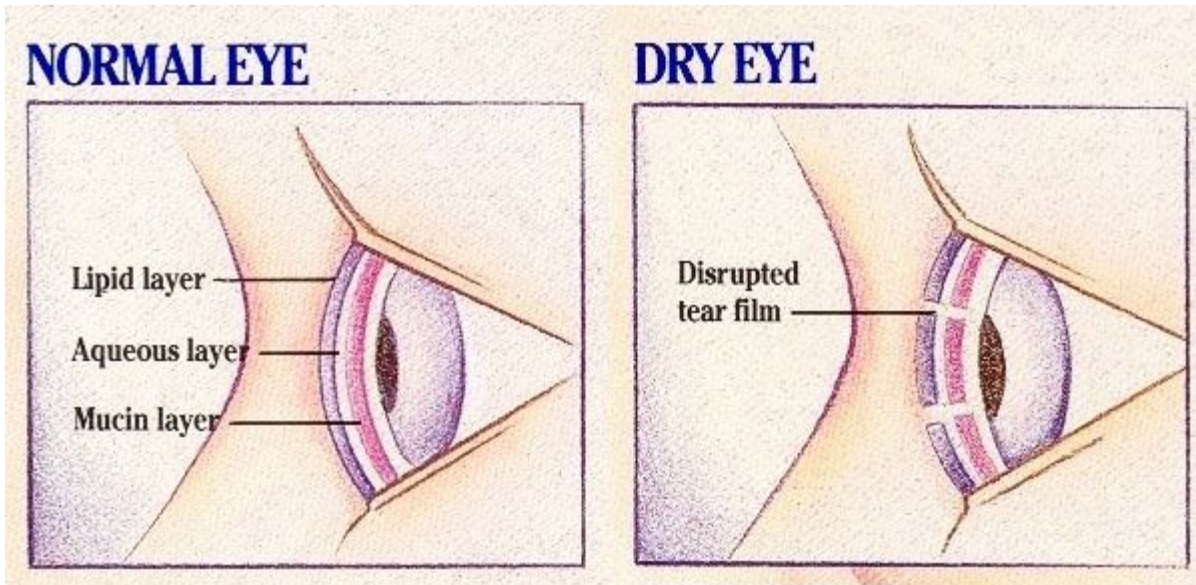
إن أي نظام ، ومنه نظام معادلات التدفق لطبقة رقيقة من شريحة الصابون مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما S فيقال ان الحالة S (Stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S . و كذلك النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حاليا في حالة معتمدة على الزمن ذلك ان الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي اضافي صغير الى النظام الشمسي فان هذا النظام لا يتأثر بصورة مهمة اذ لا تتأثر الحالة الاصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة اي ان النظام الشمسي مستقر فيما له علاقة بهذه الإزعاجات [2]

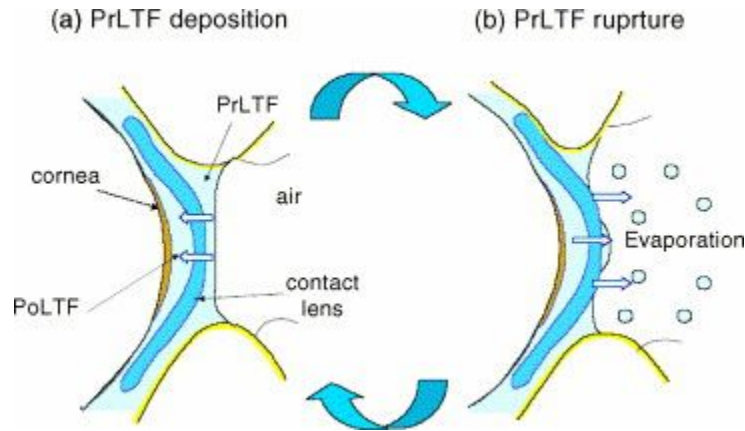
2- النموذج الرياضي

ليكن لدينا طبقة رقيقة من دمعة على سطح خارجي لعدسة لاصقة كما في الشكلين (1) و (2). في النظام ثنائي البعد تكون المعادلات التي تحكم الجريان متمثلة بمعادلة الاستمرارية للجريان غير القابل للانضغاط ومعادلة نافير- ستوكس (Navier- Stokes) ومعادلة الحرارة (Heat equation) المتضمنة درجة الحرارة T والضغط P والسرعة u في الطبقة الخارجية [8] PrLTF

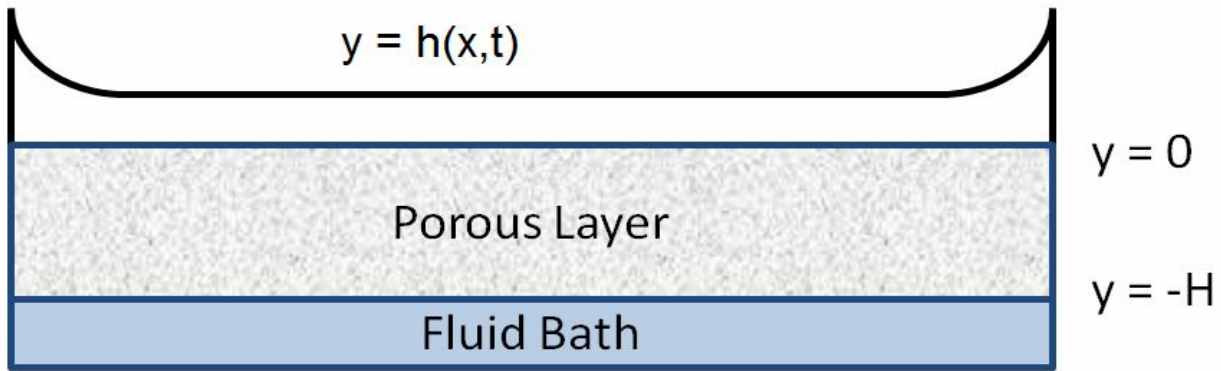
-: $0 < y < h(x,t)$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \right) &= -\nabla p' + \mu \nabla^2 \mathbf{u}' + \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla T' &= K \nabla^2 T' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$





الشكل (1)



شكل (2)

حيث ان ρ كثافة السائل الدمعي و K معامل الانتشار الحراري للسائل الدمعي و μ اللزوجة و g التعجيل الارضي

3- المعاملات والمعادلات اللابعديّة (Non Dimensional Form)

لغرض إيجاد المعادلات اللابعديّة للنظام (1) سوف نفرض بعض القيم اللابعديّة وعلى افتراض إن θ هي الزاوية الناتجة من ارتفاع سطح المائع عن المحور X بسبب تأثير الحرارة ، و d هي مسافة ثابتة معلومة وكالاتي [4] :

$$x' = xd , y' = yd , t' = t\sqrt{d/g} , u' = u\sqrt{dg}$$

$$v' = v\sqrt{dg} , p' = pdg , T' = \theta T$$

وعند استخدام نظرية التزييت (Lubrication) يكون الحد $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ مهملًا بالمقارنة بالحد $\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$ بسبب ان $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \ll 1$ وتعويض الكميات والقيم اللابعدية نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot u &= 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

حيث أن R هو Reynold's Number ومعرف كالآتي [4] :

$$R = \frac{gpd^2}{\mu \sqrt{dg}}$$

وان a هو قابلية توصيل الحرارة ومعرف كالآتي [4] :

$$a = \frac{K\sqrt{d/g}}{d^2}$$

4 - تحليل الاستقرار (Stability Analysis)

لغرض تحليل الاستقرار للنظام (2) نجزأ كلاً من u, v, p, θ باستخدام المعادلات الآتية [4]:

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,t) &= u_1(x) + u_2(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= v_1(x) + v_2(x,y,t) \\ p(x,y,t) &= p_1(x) + p_2(x,y,t) \\ \theta(x,y,t) &= \theta_1(x) + \theta_2(x,y,t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

إذ أن $u_1(x)$ و $v_1(x)$ و $p_1(x)$ و $\theta_1(x)$

تمثل الأجزاء المستقرة وتكون صغيرة جداً مقارنة بالجزء الآخر وهو الجزء المهم في حساب

الاستقرارية لـ $u_2(x,y,t)$ و $v_2(x,y,t)$ و $p_2(x,y,t)$ و $\theta_2(x,y,t)$

وبتعويض (3) في (2) وفصل الحالتين حيث ان أي حد يحوي على حاصل ضرب

الاستقرارية بالاضطراب سوف يكون غير مستقر لذلك فان الحالة المستقرة في كل الكميات

الموجودة في المعادلات يجب أن تكون بدلالة u_1, v_1, p_1, θ_1 فقط أي أن المعادلات

المستقرة ستتمثل بـ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0 \\ u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

وعليه حتى نصف الجريان الأساسي نسبة إلى الاضطراب يجب أن نتحقق من إهمال الحدود

غير الخطية لذلك يمكن كتابة المعادلات غير المستقرة بالشكل الآتي :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) / R \\
 \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) / R \\
 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} &= a \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

إذ أن الشروط الحدودية هي :

$$\theta_2 \quad v_2=0 \text{ at } y=0, \quad u_2=0 \text{ at } y=0, \quad =1 \text{ at } y=0$$

5- الاضطراب الحادث بالاتجاهين x, y

لإيجاد الحل لهذه المنظومة من المعادلات ، نتصور ان الاضطراب حاصل بالاتجاهين x, y وأن السعة ثابتة ، يمكن كتابة المعادلات بالصورة الآتية [2]

$$\left. \begin{aligned}
 U_2 &= U(y) e^{\alpha t} . e^{ikx} \\
 V_2 &= V(y) e^{\alpha t} e^{ikx} \\
 P_2 &= P(y) e^{\alpha t} e^{ikx} \\
 \theta_2 &= \theta(y) e^{\alpha t} . e^{ikx}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

إذ أن k تمثل قيمة حقيقية لا بعدية لطول الموجة بالاتجاهين x, y , سرعة الموجة وهي قيمة معقدة (complex) $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ وأن القيمة الموجبة أو السالبة لـ α_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي إلى نمو الاضطراب أو تلاشيها على التوالي . فعندما تكون $\alpha_1 > 0$

فالمنظومة تكون غير مستقرة (unstable) وعندما تكون $\alpha < 0$ فمنظومة المعادلات تكون مستقرة (stable) [2] .

كما أن $U(y), V(y), P(y), \theta(y)$ تمثل سعة الموجة (Amplitude functions) بعد اهمال الحدود الصغيرة وغير الخطية بالنسبة للاضطراب وتعويض (6) في (5) نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} ikU(y) + V'(y) &= 0 \\ [\alpha + iku_1]U(y) + \frac{ik}{\rho}P(y) - \frac{1}{R}U''(y) &= 0 \\ [\alpha + iku_1]V(y) + \frac{1}{\rho}P'(y) - \frac{1}{R}V''(y) &= 0 \\ [\alpha + iku_1]\theta(y) - a\theta''(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

في النظام (7) نشق المعادلة الثانية بالنسبة ل y والثالثة بالنسبة ل x ونضربها ب $(-ik)$ ثم نجمع المعادلتين وتعويض المعادلة الاولى في المعادلة الناتجة من الجمع نحصل على:-

$$\left. \begin{aligned} [-\frac{1}{ik}(\alpha + iku_1) + \frac{ik}{R}]V''(y) - ik[\alpha + iku_1]V(y) + \frac{1}{ikR}V'''(y) &= 0 \\ [\alpha + iku_1]\theta(y) - a\theta''(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

اذ ان $e^{at+ikx} \neq 0$

الان سوف نقوم بتطبيق طريقة كالاركين (Galerkin method) على النظام (8) وكما يأتي [3]:

لتكن :

$$V(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n y + B_n \sin \lambda_n y)$$

$$V(y) = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y$$

الحد النموذجي هو

$$y = 0 \Rightarrow V(0) = A + 0 = 0$$

$$\therefore V(y) = B \sin \lambda y$$

$$y = 1 \Rightarrow V(1) = B \sin \lambda = 0$$

يمكن الحصول على الحل الصفري (trivial solution)

$$\lambda = n\pi \text{ عندما}$$

$$V(y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi)y$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة

$$\theta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(n\pi)y$$

وبتعويض $\theta(y), V(y)$ في (8) نحصل على

$$-n^2 \left[-\frac{1}{ik} (\alpha + iku_1) + \frac{ik}{R} \right] B_n \sin(n\pi)y - ik[\alpha + iku_1] B_n \sin(n\pi)y + \frac{n^4}{ikR} B_n \sin(n\pi)y = 0$$

$$[\alpha + iku_1] D_n \sin(n\pi)y + an^2 D_n \sin(n\pi)y = 0$$

المتبقي R_1 (Residual) هو :

$$R_1 = \sum_{n=1}^p \left[-n^2 \left[-\frac{1}{ik} (\alpha + iku_1) + \frac{ik}{R} \right] - ik[\alpha + iku_1] + \frac{n^4}{ikR} \right] B_n \sin(n\pi)y$$

وكذلك

$$R_2 = \sum_{n=1}^p [\alpha + iku_1 + an^2] D_n \sin(n\pi)y$$

بما ان المتبقي (Residual) متعامد مع $\sin(m\pi)y$

اذن

$$\left. \int_0^1 \{R_1\} \sin(m\pi)y = 0 \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$$\int_0^1 \{R_1\} \sin(m\pi)y = 0$$

اذ ان (9) تمثل معادلات جبرية متجانسة عند B_n, D_n . للملاءمة اكثر يمكن كتابة

$$X_1(n, m) = \int_0^1 \left[-n^2 \left[-\frac{1}{ik} (\alpha + iku_1) + \frac{ik}{R} \right] - ik[\alpha + iku_1] + \frac{n^4}{ikR} \right] \sin(n\pi)y \sin(m\pi)y dy$$

$$X_2(n, m) = 0$$

$$Y_1(n, m) = 0$$

$$Y_2(n, m) = \int_0^1 [\alpha + iku_1 + an^2] \sin(n\pi)y \sin(m\pi)y dy$$

حيث ان

$$m=1,2,3,\dots,n$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 هي مصفوفات مربعة والتي تتشئ المصفوفة المربعة X

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

المعادلة (9) تبين أن الثوابت D_n, B_n تحقق المعادلات الجبرية المتجانسة

$$X_1(m, n)B_n + Y_1(m, n)D_n = 0$$

$$X_2(m, n)B_n + Y_2(m, n)D_n = 0$$

أو بالمصفوفات التي بالشكل

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (11)$$

المعادلة (11) تمثل نظاماً من المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة وكما هو معلوم هذا النظام له حل إذا فقط إذا كانت

$$|X| = 0$$

المصفوفة X هي مصفوفة مربعة $(p \times p)$ ، إذ ان $p = 2n$

الآن لنتخذ $n = 2$ إذن كل من المصفوفات X_1, X_2, Y_1, Y_2 هي برتبة 2×2
 (يمكن اختيار $n > 2$ والتي تعطينا نتائج متكافئة)
 إذن X يجب أن تكون 4×4 وكما يأتي :

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{ik}(\alpha + iku_1) - \frac{ik}{R} - ik[\alpha + iku_1] + \frac{1}{ikR} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{ik}(\alpha + iku_1) - \frac{4ik}{R} - ik(\alpha + iku_1) + \frac{16}{ikR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + iku_1 + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + iku_1 + 4a \end{bmatrix}$$

وباستخدام برنامج في نظام الـ MATLAB [3] يمكن حساب

$$|X| \quad .1$$

.2 حل المعادلة $|X| = 0$ بالنسبة لـ α وكما يأتي :

$$\left[\frac{1}{ik}(\alpha + iku_1) - \frac{ik}{R} - ik[\alpha + iku_1] + \frac{1}{ikR} \right] \left[\frac{4}{ik}(\alpha + iku_1) - \frac{4ik}{R} - ik(\alpha + iku_1) + \frac{16}{ikR} \right] [\alpha + iku_1 + a][\alpha + iku_1 + 4a] = 0$$

⇒

أما

$$\alpha = -\frac{1}{R} - iku_1$$

⇒

$$\alpha_1 = -\frac{1}{R}$$

أو

$$\alpha = -\frac{4}{R} - iku_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4}{R}$$

أو

$$\alpha = -a - iku_1$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = -a$$

أو

$$\alpha = -4a - iku_1$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = -4a$$

الحالة الاولى

$\alpha_1 < 0$ عندما تكون قيمة $R > 0$ وهذا يؤدي الى استقرارية النظام [4]

الحالة الثانية

$\alpha_1 < 0$ عندما تكون قيمة $a > 0$ وهذا يؤدي الى استقرارية النظام [4]

6-الاستنتاجات

بعد تحليل مسألتنا وجدنا ان شريحة الدمع تضمحل خطيا حتى تصل الى حالة الاستقرار التي عندها يجتاز السائل الدمعي السطح الداخلي خلال العدسات اللاصقة حتى يوازن تأثير التبخر ومع ذلك لا يؤثر في ارتفاع الحالة المستقرة. المعامل α له التأثير الاكبر في ارتفاع الحالة المستقرة لشريحة الدمع وزيادة سرعة المائع خلال العدسة اللاصقة

المصادر:

1-ستريتيفكتورل ،بنيامين ويلي (1984)"ميكانيك الموائع"ترجمة نبيل زكي مرقص وفوزي ابراهيم ،جامعة صلاح الدين،.

[2]-A.V.Lyushnin,A.A.Golovin ,N.L.M.Pisme,(2002)"Fingering

instability of thin evaporating liquid film"Phys.Rev E65

[3]-D.Gao,N.B.Morley,V.Dhir,(2003) "Numerical simulation of wavy

falling film flow using VOF method" Journal of computational Physics

192,624-642.

- [4]–E.Sultan,A.Boudaoud and M.Ben Amar.(2005) "Evaporation of a thin film :diffusion of the vapour and marangoni instabilities"J.Fluid Mech.
- [5] –K.Nong and D.M.Anderson (2010) "Thin film evolution over a thin porous layer: Modeling a tear film on contact lens" SIAM J.Applied Math.
- [6]–K.N.Winter,D.M.Anderson and R.J.Baraun,(2009) "A model for wetting and evaporation of a post–blink precorneal tear film"Math.Med.Biol.
- [7]–R.J.Braun and A.D.Fitt,(2003) "Modeling the drainage of precorneal tear film after blink" Math.Med.Biol.20–28.
- [8]–T. Kevin,D.M.Anderson (2010)"Modeling the evaporation of tear film over a contact lens" SIAM J.Applied Math.