المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [477– 493]

طريقة تحليل أدوماين لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد

د.عبد الغفور محمد امين* محمود حازم يحيى**

الملخص

في هذا البحث تم الحل التقريبي لمعادلات تفاضلية جزئية خطية في ثلاثة أبعاد من نوع القطع المكافئ باستخدام طريقة تحليل أدومـاين. بمقارنـة النتائج العدديـة للطريقة مـع نتائج الحل المضبوط لوحظ أن النتائج متطابقة تماماً و قريبة جداً.

Adomian Decomposition Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations in Three Dimensions

ABSTRACT

In this paper, we use the approximate solution of linear partial differential equations in three dimensions of the parabolic type by using Adomian Decomposition Method (ADM). Comparing the numerical results of method with result of the exact solution we observed that the results correlate well and are very close.

Introduction — 1. المقدمة

طريقـة التحليـل قـدمها و طورهـا العـالم أدومـاين (Adomian) (1923–1996) فـي الثمانينـات لحـل المعـادلات الخطيـة و غيـر الخطيـة مثـال علـى ذلـك (الجبريـة و التفاضـلية و المعـادلات التفاضـلية الجزئيـة و أنظمـة عديـدة و التكامليـة و المعـادلات التفاضـلية المتـأخرة و المعادلات التفاضلية التكاملية .... الخ) هذهِ الطريقة تؤدي إلى حسابات دقيقة و حلـول تقريبيـة مـتقاربة للـمعادلات المـؤثرة المحـددة، المتفـق عـليها و العـشوائية الخطيـة وغيـر الخطيـة و الحـل يمكن أن يتحقق إلى أية درجة من التقريب للمعادلات التفاضلية [3].

* أستاذ مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل
** طالب ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

تاريخ التسلم :2011/10/1 ـــــــــ تاريخ القبول : 21 /12 /2011

لاقت طريقة تحليل أدومايين Adomian الكثير من الاهتمام في السنوات الأخيرة في الرياضيات التطبيقية بشكل عام وفي نطاق حلول السلسلة بشكل خاص الطريقة أثبتت لكي تكون فعالة و قوية ويمكن أن تعالج بسهولة صنفاً عريضاً من المعادلات التفاضلية الجزئية أو الاعتيادية الخطية أو غير الخطية ومعادلات تكاملية الخطية أو غير الخطية. لقد تبين أن لطريقة التحليل تقارباً سريعاً للحل وتزود بعدة فوائد مهمة لذا في هذا السياق الطريقة ستستخدم بنجاح لمعالجة أنواع كثيرة من المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في عدة نماذج فيزيائية وتطبيقات علمية. تعامل الطريقة المسألة على نحو مباشر وفي أسلوب بسيط بدون استعمال اضطرابات خطية أو أي فرضية تقليدية أخرى التي قد تغير السلوك الفيزيائي للنموذج تحت المناقشة [7].

في السنوات العشرين الماضية قُدّمت تقريب طريقة تحليل أدومايين (Adomian) للحصول على الحلول المضبوطة لصنف كبير من كلا المعادلات التفاضلية الجزئية المحددة و العشوائية التي تستخدم بصورةً مباشرة الشروط الابتدائية في إيجاد الحل التقريبي للمعادلة الأصلية وحيثُ أن طريقة التحليل تنتج حلولاً متسلسلة متقاربة بسرعة إلى الحل المضبوط باستخدام بضعة تكرارات المعادلات المحددة و العشوائية الخطية و غير الخطية كليهما، إذ إن الفائدة لهذه الطريقة أنها تزودنا بطريقة مباشرة لحل المسائل و بمعنى أخر بدون الحاجة الى التخطيط و الاضطرابات و حسابات هائلة و إلى أية تحويلات أخرى [4].

قدم الباحثون F.Sanchez ، K. Abbaoui و Y. Cherruault في [6] تحري عن ضعف التقريب لطريقة تحليل Adomian لمعادلة الصفيحة الرقيقة وتقاربها واقترحوا تطوير رتب عليا تسمح لزيادة مدة التقارب ويبقى الاعتماد اللاخطي للمتغيرات .

كما قدم INC Mustafa في [3] حلاً تقريبياً لمعادلة تفاضلية من نوع القطع المكافئ في فضاء ذي بعدين باستخدام طريقة تحليل Adomian وقد وجد أنها أفضل تقريب دقيق للحل من الطرائق الأخرى ودرس التقارب لطريقة (ADM) في حالة المعادلات غير الخطية في بعدين باستخدام فضاء (Hilbert) .

استخدم Shaher Momani في [2] طريقة تحليل Adomian لتقريب حلول مسائل انتشار الانتقال غير المستقرة المحققة وان الحل التقريبي محسوب على شكل سلسلة متقاربة بالعناصر الأساسية المحسوبة بسهولة الحسابات المعجلة باستعمال ظواهر شروط الضوضاء للمسائل غير المتجانسة واستنتج أن طريقة التحليل Adomian استعملت لإيجاد الحلول المضبوطة والتقريبية لمسائل انتشار الانتقال وحصل على النتائج العددية التي لها فائدة في هذا النوع من المسائل و لاحظ أن الحالة غير المتجانسة عولجت عملياً باستخدام تأثير

ظاهرة شروط الضوضاء و أيضاً إن طريقة تحليل Adomian تقنية قوية و ذات كفاءة عالية في إيجاد الحلول المضبوطة والتقريبية لصنوف عريضة من المسائل.

بعد ذلك قدم Santanu Saha Ray في [5] حلاً تحليلياً لمعادلة Fokker Planck الجزئية بطريقة تحليل Adomian باستعمال الشروط الابتدائية، إذ أن الحل الصريح للمعادلة قدم في الشكل المغلق، وبعد ذلك الحل العددي تمثل بشكل تخطيطي، ولقد طبقت الطريقة بتطبيق طريقين مختلفين مما ادى إلى حالة جيدة جداً من ناحية الكفاءة والبساطة، كما استنتج أن طريقة تحليل Adomian بسيطة وليست هناك فرضيات تقيدها، وتراكيب السلسلة يمكن حسابها باستعمال أي رموز رياضية بسهولة التي تتلاقى عموماً بسرعة كبيرة في المسائل الطبيعية الحقيقية، و عندما تكون الحلول محسوبة بشكل عددي فإن التقارب السريع يكون واضحاً ولاحظ كذلك أنهُ لم يواجه ضرورة للذاكرة ووقتاً حسابياً كبيراً ولذلك فإن الحجم الحسابي سيكون منخفضاً.

في هذا البحث ندرس الحل التقريبي لنموذج من المعادلات التفاضلية الجزئية في ثلاثة أبعاد من نوع القطع المكافئ باستخدام طريقة تحليل أدوماين (Adomian) الذي يكون الحل على شكل متسلسلة منتهية تعطي نتائج عددية سريعة التقارب إلى الحل المضبوط.

2. طريقة تحليل أدوماين [7] Adomian Decomposition Method (ADM)

إن طريقة تحليل أدومـاين (Adomian) تتضمن تحليل الدالة المجهولة $u(x,y)$ لأي معادلة إلى مجموع من الأعداد أللانهائية للعناصر الأساسية التي تُعرف بسلسلة التحليل

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y) \qquad (1)$$

حيثُ إن العناصر الأساسية $u_n(x,y)$ و $n \geq 0$ ستحدد بطريقة تكرارية، طريقة التحليل التي تهتم بإيجاد العناصر الأساسية $u_0,u_1,u_2,\ldots$ بشكل منفرد، إذ إن تحديد هذهِ العناصر الأساسية يمكن أن تنجز بطريقة سهلة عن طريق علاقة تكرارية تتضمن تكاملات بسيطة.

لإعطاء نظرة توضيحية عامة عن طريقة تحليل أدومـاين (Adomian) نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية أولاً نكتبها في شكل المؤثر على النحو الآتي:−

$$Lu+Ru=g \qquad (2)$$

حيثُ إن L في اغلب الأحيان هي اشتقاق الرتبة المنخفضة التي هي فرضية لكي تكون معكوسة و R مؤثر تفاضلي خطي آخر و g هو الحد المطلق. الآن نقدم تطبيق المؤثر المعكوس L^{-1} إلى كلا الجانبين للمعادلة (2) و يستخدم الشروط المعطاة للحصول على:−

$$u=f-L^{-1}(Ru) \qquad (3)$$

حيثُ أن f تمثل الحدود الظاهرة عن مكاملة الحد المطلق g و من استعمال الشروط المعطاة التي نفرضها لكي توصف. كما أشير إليه قبل ذلك عَرفت طريقة أدومابن (Adomian) الحل u بسلسلة لانهائية من العناصر الأساسية التي تُعطى كما يأتي:−

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{4}$$

حيثُ العناصر الأساسية $u_0, u_1, u_2, \ldots$ تحدد عادةً بشكل متكرر. نستبدل المعادلة (4) إلى كلا الجانبين في المعادلة (3) تؤدي إلى

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\left(R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)\right) \tag{5}$$

للبساطة المعادلة (5) يمكن أن نعيد كتابتها بالشكل الآتي:−

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = f - L^{-1}\left(R\left(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\right)\right) \tag{6}$$

لتركيب العلاقة التكرارية تحتاج الى تحديد العناصر الأساسية $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ من المهم ملاحظة أن طريقة تحليل أدومابن (Adomian) تقترح بان العنصر الأساسي الصفري u_0 هو عادةً يُعرف بالدالة f التي وصفت أعلاه و بمعنى آخر لجميع الحدود التي لم تتضمن تحت المؤثر المعكوس L^{-1} الذي يظهر من البيانات الابتدائية و من مكاملة الحدود غير المتجانسة. وفقاً لذلك، العلاقة التكرارية المشكلة يمكن تعريفها بالشكل الآتي:−

$$\begin{aligned} u_0 &= f \\ u_{k+1} &= -L^{-1}\left(R\left(u_k\right)\right), k \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

أو بشكل مكافئ

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_1 &= -L^{-1}\left(R\left(u_0\right)\right), \\ u_2 &= -L^{-1}\left(R\left(u_1\right)\right), \\ u_3 &= -L^{-1}\left(R\left(u_2\right)\right), \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8}$$

تبين بشكل واضح بان العلاقة (8) خفضت المعادلة التفاضلية قيد الاعتبار إلى تصميم رائع من العناصر الأساسية المحسوبة، بعد أن نحدد هذه المكونات الأساسية، ثم نحنُ نستبدل إلى المعادلة (4) للحصول على الحل في شكل سلسلة [7].

تبين بشكل أساسي من خلال العديد من الباحثين الذين وجدوا الحل المضبوط للمسائل أن السلسلة الحاصلة تتقارب بسرعة كبيرة إلى ذلك الحل، إن مفهوم تقارب سلسلة التحليل تتحرى كلياً من قبل العديد من الباحثين لتأكيد التقارب السريع للسلسلة الناتجة [7].

على أية حال للمسائل المعقدة الذي يكون شكل الحل مغلقاً و ليس قابلاً للحصول فتبين للعديد من الباحثين أن تلك السلسلة حصلت عليه بتقييم بضعة شروط تعطي تقريباً بدرجة عالية من الدقة و أن العدد المقطوع من الشروط يستخدم عادة للأغراض العددية، عند مقارنتها بالتقنيات العددية الأخرى، لدراسة المقارنة بين طريقة أدوماين (Adomian) و طريقة متسلسلة تايلور (Taylor) اختبرت كذلك لتبين أن طريقة تحليل أدومناين (Adomian) تتطلب اقل عمل حسابي إذا كانت مقارنة مع متسلسلة تايلور (Taylor) و المقارنات الأخرى بالطرائق التقليدية مثل طريقة الفروقات المنتهية التي أجريت مقارنة معها و تبين للعديد من الدارسين أن بضعة حدود لمتسلسلة التحليل تعطي نتائج عددية بدرجة عالية من الدقة [7].

من اجل توضيح ما ذكر أعلاه نأخذ على سبيل المثال المعادلات الآتية:-

$$u'(x)=u(x) \qquad , \qquad u(0)=A. \tag{9}$$

نكتب المعادلة (9) بشكل المؤثر فتصبح

$$Lu=u, \tag{10}$$

حيثُ إن المؤثر التفاضلي L يعطى بالشكل الآتي:-

$$L=\frac{d}{dx}, \tag{11}$$

و لذا المؤثر المعكوس L^{-1} يُعرف بواسطة

$$L^{-1}(\cdot)=\int_0^x(\cdot)dx \tag{12}$$

نطبق L^{-1} على جانبي المعادلة (10) و نستخدم الشروط الابتدائية نحصل على:-

$$L^{-1}(Lu)=L^{-1}(u), \tag{13}$$

لذلك يكون لدينا

$$u(x)-u(0)=L^{-1}(u) \tag{14}$$

أو بشكل مكافئ

$$u(x)=A+L^{-1}(u) \tag{15}$$

نستبدل السلسلة المفروضة من معادلة (5) إلى كلا الجانبين للمعادلة (15) تُعطي

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=A+L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right) \tag{16}$$

يكون للمعادلة (16) العلاقة التكرارية الآتية:-

$$u_0(x) = A$$
$$u_{k+1}(x) = L^{-1}(u_k(x)), k \geq 0, \qquad (17)$$

يتبع مباشرةً، و لذلك نحصل عليهم

$$u_0(x) = A,$$
$$u_1(x) = L^{-1}(u_0(x)) = Ax,$$
$$u_2(x) = L^{-1}(u_1(x)) = A\frac{x^2}{2!}, \qquad (18)$$
$$u_3(x) = L^{-1}(u_2(x)) = A\frac{x^3}{3!},$$
$$\vdots$$

نستبدل العلاقة (18) في المعادلة (5) تعطي الحل في شكل متسلسلة على النحو الآتي:-

$$u(x) = A\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right), \qquad (19)$$

و في شكل مغلق يكون الآتي:-

$$u(x) = Ae^x \qquad (20)$$

و المعادلة المشهورة تعد كذلك معادلة Airy التي تكون بالشكل الآتي:-

$$u''(x) = xu(x) \ \ , \ u(0) = A \ , \ u'(0) = B \qquad (21)$$

نكتب المعادلة (21) بشكل المؤثر فتصبح

$$Lu = xu \qquad (22)$$

حيثُ أن المؤثر التفاضلي L يعطى بالشكل الآتي:-

$$L = \frac{d^2}{dx^2} \qquad (23)$$

و لذا المؤثر المعكوس L^{-1} يُعرف بواسطة

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x\int_0^x (\cdot)dxdx \qquad (24)$$

مع المؤثر L^{-1} على كلا الجانبين للمعادلة (21) و باستخدام الشروط الابتدائية نحصل عليهم

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(xu) \qquad (25)$$

و لذلك تكون

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = L^{-1}(xu) \qquad (26)$$

أو بشكل مكافئ

$$u(x) = A + Bx + L^{-1}(xu), \qquad (27)$$

نستبدل السلسلة المفروضة من معادلة (5) إلى كلا الجانبين للمعادلة (27) تُعطي

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + L^{-1}\left(x\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \tag{28}$$

بعد طريقة التحليل نحصل على العلاقة التكرارية الآتية :-

$$\begin{aligned} &u_0(x) = A + Bx, \\ &u_{k+1}(x) = L^{-1}(xu_k(x)), k \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

و لذلك نحصل عليهم

$$\begin{aligned} &u_0(x) = A + Bx, \\ &u_1(x) = L^{-1}(xu_0(x)) = A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^4}{12} \\ &u_2(x) = L^{-1}(xu_1(x)) = A\frac{x^6}{180} + B\frac{x^7}{504} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{30}$$

نستبدل العلاقة (30) في المعادلة (5) تعطي الحل في شكل متسلسلة على النحو الآتي:-

$$u(x) = A\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + B\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right) \tag{31}$$

العناصر الأساسية الأخرى يمكن أن تحسب بسهولة لتحسين دقة التقريب.

2.1 اشتقاق طريقة تحليل أدومايين (Adomian) للمعادلات التفاضلية الجزئية ثلاثية الأبعاد:

من معادلات التوصيل الحراري من نوع القطع المكافئ في فضاء ثلاثي الأبعاد التي تكون بالشكل الآتي:-

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{32}$$

حيثُ إن $0 \leq x, y, z \leq a$ و $t \geq 0$

وباستخدام الشروط الابتدائية للمعادلة (32) تكون بالشكل الآتي:-

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \tag{33}$$

حيثُ أن $0 \leq x, y, z \leq a$

و إن $u \equiv u(x, y, z, t)$ تدل على درجة الحرارة لأية نقطة محدد مكانها في الموقع (x, y, z) لحجم المستطيل في أي وقت كان t [7].

نعيد أولاً كتابة المعادلة (32) في شكل المؤثر على النحو الآتي:-

$$L_t u = L_x u + L_y u + L_z u \tag{34}$$

حيثُ إن المؤثرات التفاضلية L_z, L_y, L_x, L_t تُعرف بالشكل الآتي:-

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

فضلاً عن إن المؤثر التكاملي أو المعكوس L_t^{-1} موجود و معطى كما يأتي:-

$$L_t^{-1}(\cdot)=\int_0^t(\cdot)dt \qquad (35)$$

نطبق المؤثر التكاملي L_t^{-1} إلى كلا الجانبين للمعادلة (34) و نستخدم الشروط الحدودية تؤدي إلى

$$L_t^{-1}(L_t u)=L_t^{-1}(L_x u+L_y u+L_z u) \qquad (36)$$

نعالج الجانب الأيسر من المعادلة (36) بالنسبة إلى t و باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على:-

$$L_t^{-1}(L_t u)=\int_0^t\frac{\partial u}{\partial t}dt=u(x,y,z,t)\Big|_0^t$$

$$=u(x,y,z,t)-u(x,y,z,0)$$

$$L_t^{-1}(L_t u)=u(x,y,z,t)-f(x,y,z) \qquad (37)$$

و بناءاً على ذلك نستبدل المعادلة (37) في المعادلة (36) ينتج الآتي:-

$$u(x,y,z,t)=f(x,y,z)+L_t^{-1}(L_x u+L_y u+L_z u) \qquad (38)$$

طريقة تحليل أدومـاين (Adomian) تُعرف الحل $u(x,y,z,t)$ على شكل متسلسلة تُعطى بواسطة

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,z,t) \qquad (39)$$

نستبدل المعادلة (39) إلى كلا الجانبين المعادلة (38) يحصل الآتي:-

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=f(x,y,z)+L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_z\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\right) \qquad (40)$$

العناصر الأساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n\geq 0$ يمكن أن تحدد بالكامل باستخدام العلاقة التكرارية الآتية:-

$$\begin{aligned}&u_0(x,y,z,t)=f(x,y,z),\\&u_{k+1}(x,y,z,t)=L_t^{-1}(L_x u_k+L_y u_k+L_z u_k),k\geq 0\end{aligned} \qquad (41)$$

العناصر الأساسية يمكن أن تحدد بشكل تكراري بقدر ما يلائم و لذلك، العناصر الأساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n\geq 0$ تحدد بالكامل و الحل على شكل متسلسلة.

3. النتائج العددية Numerical Results

و من اجل توضيح النتائج العددية لطريقة تحليل أدوماين (Adomian) سنستخدمها في مناقشة مثالين لمعادلات الحرارة من نوع القطع المكافئ ثلاثية الأبعاد مع الشروط الحدودية و الابتدائية كما يأتي:-

مثال (1) [1]:

نعتبر مسألة القيم الحدودية و الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad 0 < x,y,z < 1\ ;\ t > 0 \qquad (42)$$

$$u(x,y,z,0)=\sin(x+y+z), \qquad (0\le x,y,z\le 1) \qquad (43)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,y,z,t)=e^{-3t}\sin(y+z), & \\ u(1,y,z,t)=e^{-3t}\sin(1+y+z), & (0\le y,z\le 1; t\ge 0) \\ u(x,0,z,t)=e^{-3t}\sin(x+z), & \\ u(x,1,z,t)=e^{-3t}\sin(x+1+z), & (0\le x,z\le 1; t\ge 0) \\ u(x,y,0,t)=e^{-3t}\sin(x+y), & \\ u(x,y,1,t)=e^{-3t}\sin(x+y+1), & (0\le x,y\le 1; t\ge 0) \end{array}\right\} \qquad (44)$$

و نأخذ قيم المعلمات بالنسبة إلى خطوات الطول $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\frac{1}{10}$ و خطوة الزمن $\Delta t=r(\Delta x)^2$ حيثُ أن $r=\frac{1}{8}$ و من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (42) $u(x,y,z,t)=e^{-3t}\sin(x+y+z)$ حيثُ إن $0\le x,y,z\le 1$ و $t\ge 0$.

سنستخدم طريقة تحليل أدوماين (Adomian) على المثال (1) بالنسبة للمعادلة (42) نطبق المؤثر التفاضلي L إلى جانبي المعادلة نحصل على:-

$$L_t u = L_x u + L_y u + L_z u$$

نطبق المؤثر المعكوس L_t^{-1} على وفق معادلة (36) و معادلة (37) نستخدم الشرط الابتدائي (43) ينتج الآتي:-

$$u(x,y,z,t)=\sin(x+y+z)+L_t^{-1}\left(L_x u+L_y u+L_z u\right) \qquad (45)$$

الآن نستخدم متسلسلة تحليل أدوماين (Adomian)

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,z,t) \qquad (46)$$

نستبدل المعادلة (46) إلى كلا الجانبين للمعادلة (45) ينتج الآتي:-

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sin(x+y+z)+L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_z\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\right) \qquad (47)$$

العناصر الأساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n\ge 0$ يمكن أن تحدد باستخدام العلاقة التكرارية الآتية:-

$$u_0(x,y,z,t)=\sin(x+y+z),$$
$$u_1(x,y,z,t)=-3t\sin(x+y+z),$$
$$u_2(x,y,z,t)=\frac{(3t)^2}{2}\sin(x+y+z),$$
$$u_3(x,y,z,t)=-\frac{(3t)^3}{6}\sin(x+y+z),$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

وعلى وفق ذلك نحصل على متسلسلة التحليل المعادلة (45) و ذلك بجمع العناصر الأساسية أعلاه فينتج الحل الآتي:-

$$u(x,y,z,t)=\sin(x+y+z)\left(1-3t+\frac{(3t)^2}{2!}-\frac{(3t)^3}{3!}\mp\cdots\right) \qquad (48)$$

المعادلة (48) تبين الحل التقريبي للمعادلة (42) مع الشرط الابتدائي (43) و منها نحسب الحل العددي للمعادلة الذي يكون تقريبياً.

المثال (2) [7]:

نأخذ مسألة القيم الحدودية و الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad 0 < x,y,z < 1 \; ; \; t > 0 \qquad (49)$$

$$u(x,y,z,0)=2\sin x\sin y\sin z, \qquad (0\le x,y,z\le \pi) \qquad (50)$$

$$\begin{aligned} &u(0,y,z,t)=u(\pi,y,z,t)=0,\\ &u(x,0,z,t)=u(x,\pi,z,t)=0, \qquad (0\le x,y,z\le\pi; t\ge 0) \qquad (51)\\ &u(x,y,0,t)=u(x,y,\pi,t)=0,\end{aligned}$$

و نأخذ قيم المعلمات بالنسبة إلى خطوات الطول $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\frac{\pi}{10}$ و خطوة الزمن $\Delta t=r(\Delta x)^2$ حيثُ أن $r=\frac{1}{8}$ و من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (49) $u(x,y,z,t)=2e^{-3t}\sin x\sin y\sin z$ حيثُ أن $0\le x,y,z\le\pi$ و $t\ge 0$.

و بالأسلوب نفسهُ بالمثال (1) سنستخدم طريقة تحليل أدومابين (Adomian) على المثال (2) بالنسبة للمعادلة (49) و الشرط الابتدائي (50) نطبق المؤثر المعكوس L_t^{-1} على وفق معادلة (36) و معادلة (37) ينتج الآتي:-

$$u(x,y,z,t)=2\sin x\sin y\sin z+L_t^{-1}\left(L_x u+L_y u+L_z u\right) \qquad (52)$$

نستخدم متسلسلة تحليل أدومابين (Adomian) المعادلة (46) كذلك و نستبدلها إلى كلا جانبي المعادلة (52) على النحو الآتي:-

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2\sin x \sin y \sin z + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_z\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right) \quad (53)$$

العناصر الأساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n \geq 0$ يمكن أن تحدد باستخدام العلاقة التكرارية الآتية:−

$$u_0(x,y,z,t) = 2\sin x \sin y \sin z,$$
$$u_1(x,y,z,t) = -2(3t)\sin x \sin y \sin z,$$
$$u_2(x,y,z,t) = 2\frac{(3t)^2}{2!}\sin x \sin y \sin z,$$
$$u_3(x,y,z,t) = -2\frac{(3t)^3}{3!}\sin x \sin y \sin z,$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

وعلى وفق ذلك نحصل على متسلسلة التحليل المعادلة (52) و ذلك بجمع العناصر الأساسية أعلاه فينتج الحل الآتي:−

$$u(x,y,z,t) = 2\sin x \sin y \sin z(1 - 3t + \frac{(3t)^2}{2!} - \frac{(3t)^3}{3!} \mp \cdots) \quad (54)$$

المعادلة (54) تبين الحل التقريبي للمعادلة (49) مع الشرط الابتدائي (50) و منها نحسب الحل العددي للمعادلة الذي يكون تقريبي.

الجدول (1) بالنسبة إلى المثال (1) يحتوي على النتائج العددية لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد باستخدام طريقة تحليل أدومابن (Adomian) عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$ و حجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$ حيثُ أن $r = \frac{1}{8}$، نقدم شكل (1) للمقارنة كذلك بين قيم النتائج العددية للطريقة مع الحل المضبوط.

الجدول (2) بالنسبة إلى المثال (2) يحتوي النتائج العددية لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد باستخدام طريقة تحليل أدومابن (Adomian) عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$ و حجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$ حيثُ أن $r = \frac{1}{8}$، نقدم شكل (2) للمقارنة كذلك بين قيم النتائج العددية للطريقة مع الحل المضبوط.

الجدول (1)

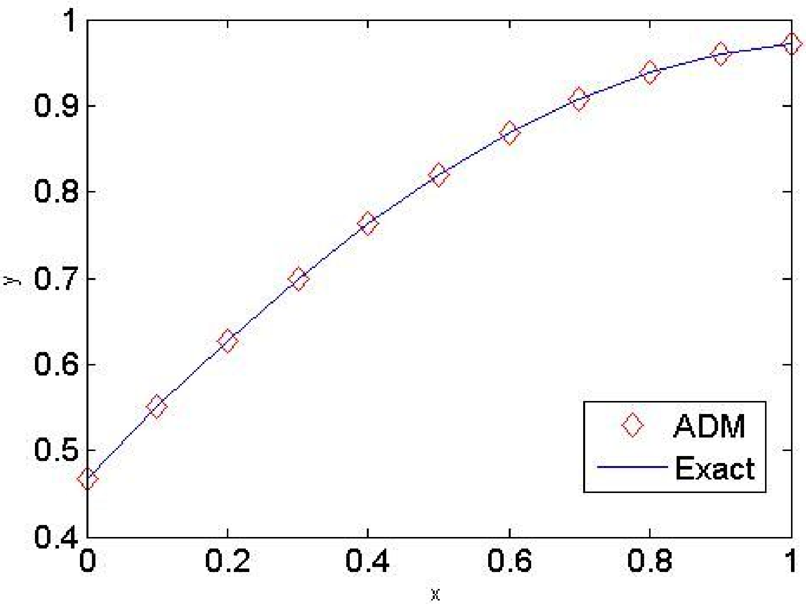
يوضح مقارنة الحل العددي لطريقة تحليل أدومايin (Adomian) مع الحل المضبوط لقيم الدالة u عند نقاط المشبك (x_i, y_j, z_k, t_n) المختارة، التي تحسب عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$ و نأخذ $r = \frac{1}{8}$ و حجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$.

Point (i,j,k,n)	***Exact Solution***	***Adomian Decomposition Method***
(6,7,2,1)	0.932039085967226	0.932039085967226
(3,9,5,1)	0.985449729988460	0.985449729988460
(4,3,4,2)	0.714671043169683	0.714671043169683
(3,5,6,2)	0.887871590937416	0.887871590937416
(5,4,2,3)	0.711996045513165	0.711996045513165
(4,5,10,3)	0.992104843875343	0.992104843875343
(3,5,3,4)	0.709331060312770	0.709331060312770
(6,8,7,4)	0.962953240876105	0.962953240876105
(8,6,2,5)	0.949212672956738	0.949212672956738
(8,10,6,5)	0.850357853463003	0.850357853463003
(7,2,8,6)	0.967144693545056	0.967144693545056
(3,5,10,6)	0.978966205757857	0.978966205757857
(4,5,3,7)	0.765898855015105	0.765898855015105
(4,8,6,7)	0.975301957246265	0.975301957246265
(4,3,5,8)	0.763032112809896	0.763032112809896
(2,5,9,8)	0.938593873129919	0.938593873129919
(4,5,3,9)	0.760176100756347	0.760176100756347
(4,7,6,9)	0.956325289003884	0.956325289003884
(3,4,6,10)	0.813545236782598	0.813545236782598
(3,8,9,10)	0.958754606628183	0.958754606628183
(2,3,4,11)	0.543860478382176	0.543860478382176
(6,5,10,11)	0.938004601772525	0.938004601772525

الجدول (2)

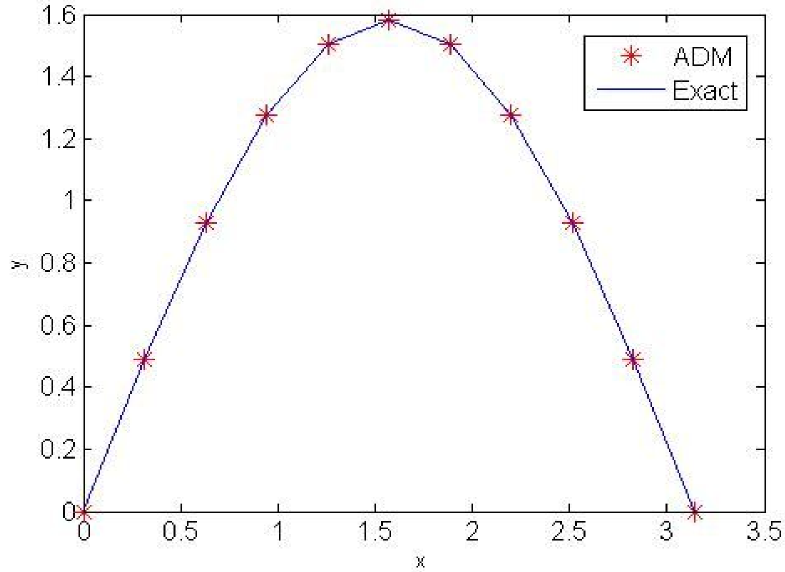
يوضح مقارنة الحل العددي لطريقة تحليل أدومايين (Adomian) مع الحل المضبوط لقيم الدالة u عند نقاط المشبك (x_i, y_j, z_k, t_n) المختارة، التي تحسب عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$ و نأخذ $r = \frac{1}{8}$ و حجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$.

Point (i,j,k,n)	***Exact Solution***	***Adomian Decomposition Method***
(3,4,3,1)	0.559016994374947	0.559016994374947
(5,6,6,1)	1.902113032590307	1.902113032590307
(5,7,3,2)	1.024678565967515	1.024678565967515
(4,5,8,2)	1.199714561560868	1.199714561560868
(6,8,7,3)	1.429047305230171	1.429047305230171
(4,4,10,3)	0.375647314524755	0.375647314524755
(2,6,2,4)	0.170912443454554	0.170912443454554
(8,7,6,4)	1.377123613163714	1.377123613163714
(5,4,3,5)	0.780041897607582	0.780041897607582
(6,7,8,5)	1.327086541496697	1.327086541496697
(4,3,5,6)	0.751699480150808	0.751699480150808
(5,5,10,6)	0.464575828058826	0.464575828058826
(2,2,4,7)	0.123740049950790	0.123740049950790
(4,4,8,7)	0.848126919671547	0.848126919671547
(4,10,3,8)	0.226815603482854	0.226815603482854
(5,5,7,8)	1.327801670325082	1.327801670325082
(6,6,4,9)	1.203367279063584	1.203367279063584
(3,7,9,9)	0.488747163462448	0.488747163462448
(3,3,4,10)	0.400646994061914	0.400646994061914
(2,3,6,10)	0.260356199214448	0.260356199214448
(5,5,6,11)	1.249412493560862	1.249412493560862
(4,3,10,11)	0.202979363938697	0.202979363938697



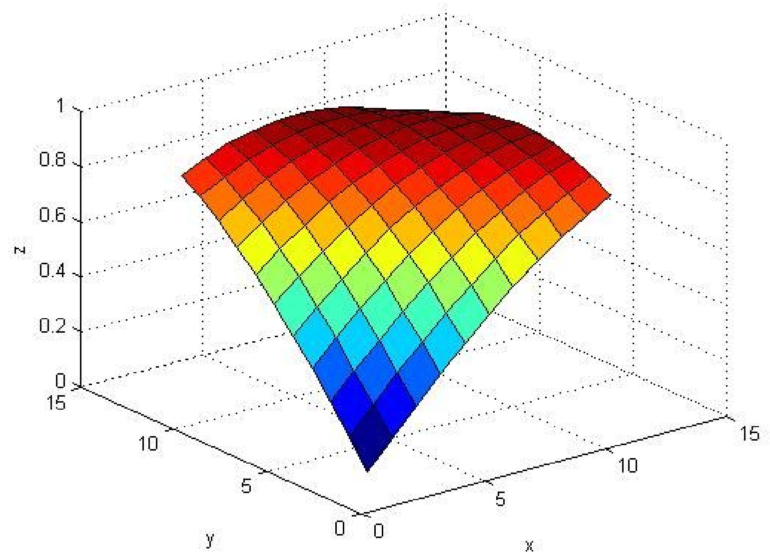
الشكل (1)

يوضـح مقارنـة الحـل العـددي بـين طريقـة تحليـل أدومـاين (Adomian) و مـع الحـل المـضبوط بالنسبة للمثال (1) و القيم تكون من *u(3,:,4,8)* المأخوذة من المكعب *n=8* و الشريحة *k=4* و السطر *i=3* و لكل الأعمدة *j* .



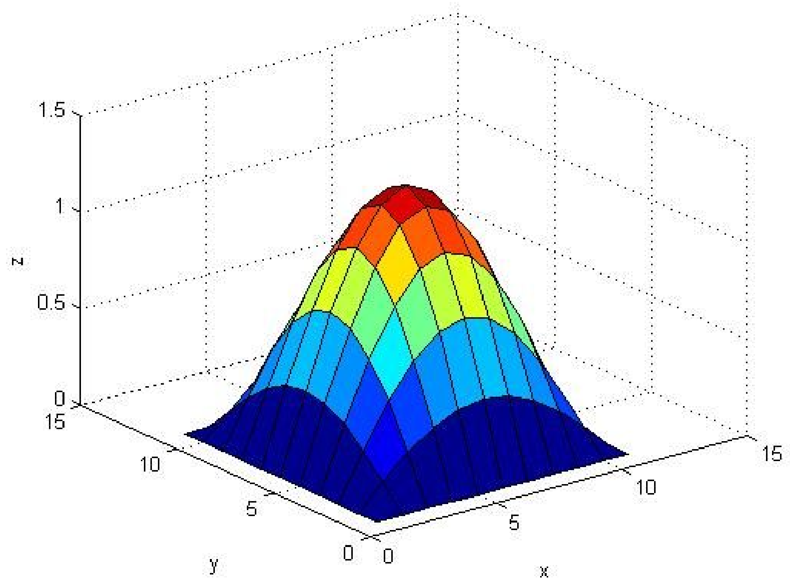
الشكل (2)

يوضـح مقارنـة الحـل العـددي بـين طريقـة تحليـل أدومـاين (Adomian) و مـع الحـل المـضبوط بالنسبة للمثال (2) و القيم تكون من *u(6,:,7,6)* المأخوذة من المكعب *n=6* و الشريحة *k=7* و السطر *i=6* و لكل الأعمدة *j* .



الشكل (3)

بالنسبة للمثال الأول يوضح الحل العددي في ثلاثة أبعاد لطريقة تحليل أدومباين (Adomian) العددية التي تكون من قيم *u(:,:,2,8)* المأخوذة من المكعب *n=8* و الشريحة *k=2* و لكل الأسطر *i* و لكل الأعمدة *j* .



الشكل (4)

بالنسبة للمثال الثاني يوضح الحل العددي في ثلاثة أبعاد لطريقة تحليل أدومباين (Adomian) العددية التي تكون من قيم *u(:,:,4,6)* المأخوذة من المكعب *n=6* و الشريحة *k=4* و لكل الأسطر *i* و لكل الأعمدة *j* .

4. الاستنتاج Conclusion

خلال دراستنا لطريقة تحليل أدوماين (Adomian)، نلاحظ أن الطريقة استخدمت لإيجاد الحلول التقريبية و الطريقة لا تتطلب حسابات كبيرة باستخدام الحاسوب الآلي و لذلك نستنتج من النتائج العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد أن الطريقة قريبة تماماً من الحل المضبوط و أن سلسلة التحليل تكون ذات كفاية من خلال عملية التكرار المستمرة للتوصل إلى نتائج متقاربة عند عدد محدود من العناصر الأساسية.

المصادر

[1] Mingshu, M. and Tongke, W., (2000), **"A family of High Order Accuracy Explicit Difference Schemes with Branching Stability for Solving 3-D Parabolic Partial Differential Equation"**, J. Applied Mathematics and Mechanics, University Shanghai China, Vol. 21, No. 10, pp. 1207-1212.

[2] Momani, S., (2008), **"A decomposition Method for Solving Unsteady Convection Diffusion Problems"**, TUBITAK, Turk. J. Math. Vol. 32, pp. 51-60.

[3] Mustafa, I., (2005), **"Decomposition Method for Solving Parabolic Equations in Finite Domains"**, Inc. J. Zhejiang Univ. Sci. Vol. 6A, No, 10, pp. 1058-1064 http://www.zju.edu.cn/jzus.

[4] Mustafa, I., (2004), **"On Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Decomposition Method"**, Kragujevac J. Math. Vol. 26, pp. 153-164.

[5] Ray, S.S., (2010), **"A new Application of Adomian Decomposition Method for the Solution of Fractional Fokker Planck Equation with Insulated Ends"**, J. Appli. Math. & Informatics, Vol. 28, No. 6, pp. 1157-1169 http://www.kcam.biz.

[6] Sanchez, F., Abbaui, K. and Cherruault, Y., (2000), **"Beyond the Thin-Sheet Approximation: A domian's Decomposition"**, Optics Commun. Vol. 173, pp. 397-401.

[7] Wazwaz, A.M., (2009), **“Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory”**, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.