المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [431– 440]

الجريان في الأغشية الرقيقة بوجود قوى القصور الذاتي

خضر محمد صالح خضر *

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة الجريان في الأغشية الرقيقة بوجود قوى القصور الذاتي وان هناك توازناً بين القوى التالية،انحدار الضغط، اللزوجة والشد السطحي وقد استخدمت معادلات نافير–ستوكس ومعادلة الاستمرارية لإيجاد المعادلة التي تحكم هذا النوع من الجريان.

Thin films flow by inertia forces

Abstract

In this paper we consider the motion in thin liquid films of a rectilinear flow by inertia force and there is a balance of pressure gradient, viscous and surface tension.Navier – stokes equations and continuity equation are used to obtain the equation that governs this type of flow.

المقدمة : Interdiction

الأغشية الرقيقة (thins films) هي حالة خاصة في حركة الموائع وهناك حالتان للأغشية الرقيقة، الأولى جريان غشاء السائل على سطح صلب،الحالة الثانية جريان الغشاء على الأسطح الحرة والتي تحدد بسائل أو غاز. وللأغشية الرقيقة تطبيقات كثيرة في مختلف مجالات الحياة منها طلاء أسطح الرسم والطبقات الفضية على أقراص (CD) المدمجة .

درس (Joseph.G،Abdulahad 1994) الجريان في الأغشية الرقيقة للسوائل المتجانسة بانعدام الجاذبية الأرضية، ودرس (B.R.Duffy and S.k.Wilson ، 1997) جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للموائع والتي يكون فيها الغشاء سطحاً حراً بوجود الشد السطحي ، كما درس كل من (S.A.Suslov and A.J.Roberts 1998) خواص الشروط الابتدائية لنماذج التزييت لجريان الأغشية الرقيقة للموائع. ودرس (L.W.Schwortz and R.V.Roy1999) نمذجة مجرى الجريان الثابت والمتحرك للأغشية الصابونية، كما درس (Leonard W.Schwoartz 2001) التحليل المحاذي لسياق إجهاد السطح لجريان الطبقة

• مدرس مساعد/كلية علوم الحاسبات والرياضيات/جامعة الموصل

تاريخ التسلم :2011/10/1 ——— تاريخ القبول : 21 /12 /2011

الرقيقة.ودرس كل من (D.Gao,N.B.Morly and V.Dhir 2003) المحاكاة العددية للأمواج الساقطة لجريان الأغشية الرقيقة باستخدام طريقة حجم المائع (VOF)،ودرس (A.Munch,B.Wagner and T.P.Witelski 2005) نماذج التزييت لطول الانزلاق المتغير لمعادلات نافير-ستوكس والتي توضح حركة الأغشية الرقيقة والتي يتضمن عدم الاستقرارية عند نقطة التماس.كما درس (Ilyas.N.S.Abdullahd 2006) النموذج الرياضي للجريان اللازمني للأغشية الرقيقة بصورة أفقية ومائلة.

وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة بصورة مائلة بوجود قوى القصور الذاتي.

المعادلات التي تحكم الجريان : Governing equation

لوصف الجريان للموائع اللزجة وغير القابلة للانضغاط وفي نظام ثنائي البعد نبداء بمعادلات نافير-ستوكس ومعادلة الاستمرارية وبالترتيب:

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial T}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial X}+\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)+\rho g_x \quad ....(1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial T}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+\rho g_y \quad ....(2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \quad ....(3)$$

حيث أن ρ يمثل الكثافة، μ يمثل اللزوجة، g يمثل التعجيل الأرضي.
وان $U=U(X,Y,T)$ ، $V=V(X,Y,T)$ يمثلان مركبتي السرعة في الاتجاهين X,Y على الترتيب و $P=P(X,Y,T)$ يمثل الضغط. $Y=H(X,T)$ يمثل السطح الحر للغشاء.

الشروط الحدودية:Boundary conditions

1- شرط عدم الانزلاق: No-slip condition

$$U=0 \qquad at \qquad Y=0 \quad ....(4)$$

2- شرط جهد القص:Tangential stress condition

$$\mu\left(1-\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^{2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\right)+2\mu\frac{\partial H}{\partial X}\left(\frac{\partial V}{\partial Y}-\frac{\partial U}{\partial X}\right)=0 \quad on \quad y=h \text{ ....(5)}$$

3- شرط الجهد العمودي: Normal stress condition

$$p=\frac{2\mu\left[\frac{\partial V}{\partial Y}+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^{2}\frac{\partial U}{\partial X}-\frac{\partial H}{\partial X}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\right)\right]}{\left(1+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^{2}\right)}$$

$$-\frac{\sigma\frac{\partial^{2}H}{\partial X^{2}}}{\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad on \quad y=h \text{ ....(6)}$$

4- شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر:

Material derivative at free surface condition(Kinematic condition).

$$\frac{\partial H}{\partial T}=V-U\frac{\partial H}{\partial X} \qquad on \quad y=h \text{ ....(7)}$$

Non-dimensional variables :المتغيرات اللابعدية

$$Y=Hy\,,X=Lx\,,H=Hh\,,U=Uu\,,V=Vv\,,T=\frac{H}{V}t\,,P=Pp \text{ ......(8)}$$

بتعويض المعادلة (8) في المعادلات (1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6) و (7) نحصل على:

$$\varepsilon\frac{\rho UH}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\varepsilon\frac{PH}{\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}+\varepsilon^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+\frac{\rho gH^{2}}{\mu U}\sin(\beta) \text{ ....(9)}$$

$$\varepsilon^{2}\frac{\rho UH}{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{PH}{\mu U}\frac{\partial p}{\partial y}+\varepsilon^{3}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}+\varepsilon\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}-\frac{\rho gH^{2}}{\mu U}\cos(\beta) \text{ ....(10)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{ ....(11)}$$

$$y=o \qquad at \quad u=0 \quad \text{ ....(12)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)+2\varepsilon^2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \quad ....(13)$$

$$p=2\varepsilon\frac{\mu U}{PH}\frac{\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}$$

$$-\frac{\varepsilon^2\sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{PH\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ....(14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}-v+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad ....(15)$$

حيث أن $\varepsilon=\frac{H}{L}=\frac{V}{U}$ ، (ε<< 1)(ε قيمة اقل من الواحد) .

الآن نأخذ العلاقات الآتية:[1]

$$\frac{PH}{\mu U}\sim\varepsilon^{-1}\ ,\frac{\sigma}{PH}\sim\varepsilon^{-2}\ ,U=\frac{\sigma\varepsilon^3}{\mu}\ ,Ca=\frac{\mu U}{\sigma}=\varepsilon^3\ ,$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho UH}{\mu}=\varepsilon^3\frac{\rho\sigma H}{\mu^2}=\varepsilon^3R^*e$$

حيث أن Ca العدد ألشعيري (Capillary number)، و Re عدد رينولد (Reynolds number) (وان Ca و Re متغيرات لابعدية) .

بتعويض هذه العلاقات في المعادلات (9)،(10) و(14) نحصل على:

$$\varepsilon^4R^*e\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k\sin(\beta)\ ....(16)$$

$$\varepsilon^6 R^* e\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\varepsilon^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k\cos(\beta) \quad ....(17)$$

حيث أن $k=\dfrac{\rho g H^2}{\mu U}$ متغير لابعدي.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad ....(18)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)+2\varepsilon^2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \quad ....(19)$$

$$p=2\varepsilon^2\frac{\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}-\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ....(20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}-v+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad ....(21)$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$ بوصفها قيماً صغيرة جدا نحصل على:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k\sin(\beta) \quad ....(22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-k\varepsilon\cos(\beta) \quad ....(23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad ....(24)$$

$$u=o \qquad at \quad y=0 \quad ....(25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad at\ \ y=h \quad ....(26)$$

$$p=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad at\ \ y=h \quad ....(27)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}-v+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \qquad at\ \ y=h \quad ....(28)$$

نكامل المعادلة (23) بالنسبة لـy فنحصل على:

$$p=-k\varepsilon\cos(\beta)y+f_1 \qquad ....(29)$$

حيث أن f_1 ثابت التكامل و بتعويض المعادلة(27) في المعادلة (29) عندما $y=h$ نحصل على:

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-k\varepsilon\cos(\beta)h+f_1 \ \Rightarrow$$

$$f_1=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k\varepsilon\cos(\beta)h \qquad ....(30)$$

نعوض المعادلة (30) في المعادلة (29) فنحصل على :

$$p=-k\varepsilon\cos(\beta)y-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k\varepsilon\cos(\beta)h \qquad ....(31)$$

نشتق المعادلة (31) بالنسبة لـ x فنحصل على :

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x} \qquad ....(32)$$

بمقارنة المعادلة (32) مع المعادلة (22) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}-k\sin(\beta)\ ....(33)$$

نكامل المعادلة (33) بالنسبة لـ y فنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}y+k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}y-k\sin(\beta)y+f_2\ ....(34)$$

حيث أن f_2 ثابت التكامل، و باستخدام المعادلة (26) في المعادلة (34) عندما $y=h$ نحصل على :

$$0=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h+k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}h-k\sin(\beta)h+f_2\ \Rightarrow$$

$$f_2 = \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} h + k \sin(\beta) h \qquad (35)$$

نعوض المعادلة (35) في المعادلة (34) فنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} y - k \sin(\beta) y$$
$$+ \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} h + k \sin(\beta) h \qquad (36)$$

نكامل المعادلة (36) بالنسبة لـy فنحصل على :

$$u = \frac{y^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{y^2}{2} k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{y^2}{2} k \sin(\beta) + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} hy$$
$$- k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} hy + k \sin(\beta) hy + f_3 \qquad (37)$$

f_3 ثابت التكامل ،وباستخدام المعادلة (25) في المعادلة (37) عندما $y = 0$ نحصل على :

$$f_3 = 0 \qquad (38)$$

بتعويض المعادلة (38) في المعادلة (37) عندما $y = h$ نحصل على :

$$u = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2} k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^2}{2} k \sin(\beta) \qquad (39)$$

نضرب المعادلة (39) في h ونشتقها بالنسبة لـ x فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) = \frac{h^3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - k\varepsilon \cos(\beta) \frac{\partial h}{\partial x} + k \sin(\beta) \right) \qquad (40)$$

بتكامل المعادلة (24) بالنسبة لـy وتعويضها في المعادلة (28) عندما $y = h$ نحصل على:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad \ldots\ldots$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \qquad \ldots\ldots$$

أو

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(uh) \qquad (41)$$

بتعويض المعادلة (41) في المعادلة (40) نحصل على :

$$-\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{h^3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}+k\sin(\beta)\right) \quad ....(42)$$

الجريان المستقر (الجريان اللازمني): Steady flow

في حالة الجريان المستقر فأن المعادلة (42) تصبح بالصيغة الآتية:-

$$\frac{h^3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}+k\sin(\beta)\right)=0 \quad ....(43)$$

بتكامل المعادلة (43) بالنسبة لـx وضربها في $\frac{2}{h^3}$ نحصل على :

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-k\varepsilon\cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}+k\sin(\beta)=0 \quad ....(44)$$

الآن نفرض أن $k=1,\varepsilon=1$ وكحالة خاصة نفرض أن الزاوية $\beta=0$ وبذلك فان المعادلة (44) تصبح بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad ....(45)$$

والمعادلة (45) معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة يمكن حلها بإيجاد جذور المعادلة والحل العام لها الصيغة آلاتية :

$$h(x)=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x} \quad ....(46)$$

وان حل المعادلة (46) موضحة بالشكل (1.1) بعد أعطاء قيم للثوابت.

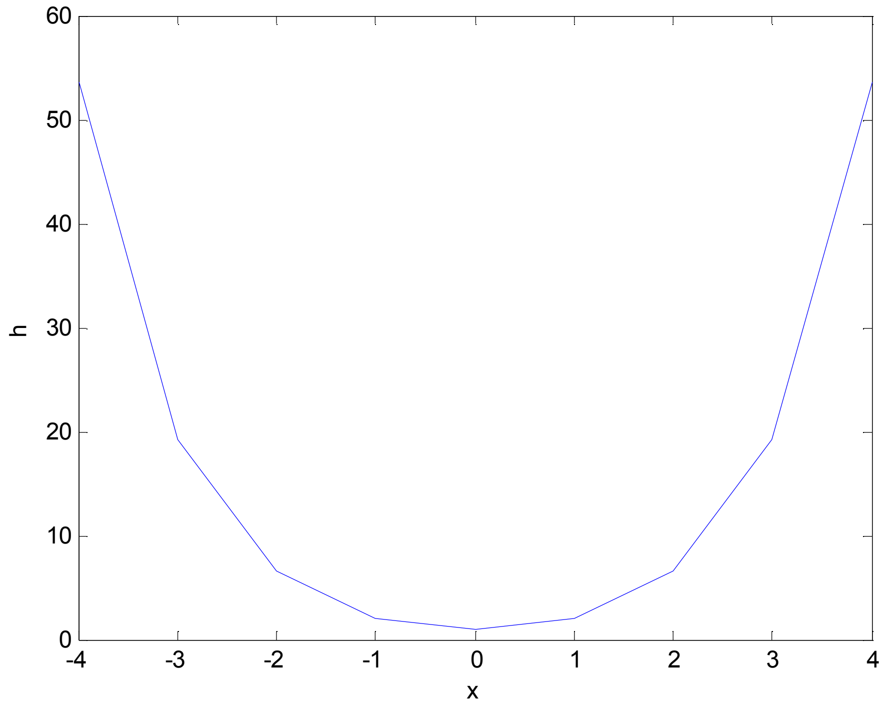
وفي حالة الزاوية $\beta=90$ فان المعادلة (44) تصبح بالصيغة :

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+1=0 \quad ....(47)$$

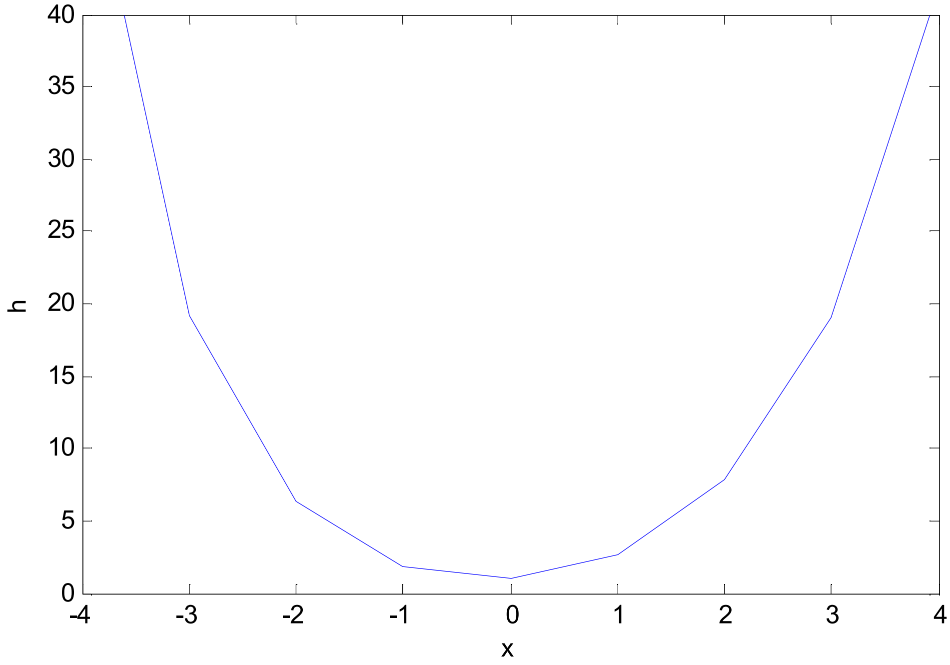
والمعادلة (47) يمكن حلها بنفس طريقة حل المعادلة (45) بالصيغة الآتية :

$$h(x)=c_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right) \quad ....(48)$$

وان حل المعادلة (48) موضحة بالشكل (1.2) بعد أعطاء قيم للثوابت.



الشكل (1.1)
يمثل منحني الحل للمعادلة (46)
$c_1 = -1, c_2 = c_3 = 1$



الشكل (1.2)
يمثل منحني الحل للمعادلة (48)
$c_1 = 1, A = B = 1$

الاستنتاجات :- Conclusions

في دراستنا للجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة بصورة مائلة في نظام ثنائي البعد يتبين من حلول المعادلتين (46) و(48) والشكلين (1.1)،(1.2) بان سمك الغشاء يكون اقل مايكون عند النقطة صفر ثم يزداد سمك الغشاء ويكون متناظرا إلى أن يصل المالانهاية.

المصادر: References

1. A.Munch, B.Wangner and T.P.Witelski "Lubrication models with small to large slip lengths" J of engineering MATH , 53:359-383, 2005.
2. B.R. Duffy and S.K. Wilson, "A third–order deferential equation arising in thin–film flows and relevant to Tanner's Law", App. Math. Lebb, vol. 10, No. 3, pp. 63–68, 1997.
3. D.Cao,N.B.NMorley, V.Dhin"Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method " Journal of computational physics 192,624-642. 2003
4. Joseph.G.Abdulahad " Free films in homogenous liquids" J.Ed.Sci,Vol 17, 1997.
5. Leonard W.Schwartz "On the asymptotic analysis of surface-stress-driven thin-layer flow" J of engineering MATH 39:171-188,2001.
6. L.W. Schwartz and R.V. Roy "Modeling draining flow in mobile and immobile soap films" Journal of Colloid and interface Science 218,309-323 ,1999.
7. Naseer.S.A.Ilyas "Viscous flow in some liquid films" M.Sc.thesis, University of Mosul, 2006.
8. S.A. Suslov and A. J. Roberts "Proper initial conditions for the lubrication model of the flow of a thin film of fluid" ArXiv: Chao-dyn/9804018 Vl. 8, Apr, 1998.