

دراسة استقرارية احد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطي بحدود دوال مثلثية مع تطبيق

إسراء سالم محمود**

د. عبد الغفور جاسم سالم*

المستخلص

درست في هذا البحث استقرارية احد نماذج الانحدار الذاتي و بحدود دوال مثلثية باستخدام تقنية التقريب الخطية . و من خلال هذه التقنية تم إيجاد النقطة المنفردة (singular point) و استقرارية دورة النهاية (limit cycle) و حاولنا تطبيق النتائج التي حصلنا عليها على بيانات صحية لتدقيق النتائج التي حصلنا عليها .

A Study of the stability for one of non-linear autoregressive models with trigonometric terms with application

Abstract

In this paper we study the stability of one of non-linear autoregressive models with trigonometric terms , by using the linear approximation technique . From this method the singular point and the stability of the limit cycle for this model has been obtained . We applied such results to some time series data

المقدمة :

يعد موضوع السلاسل الزمنية من الموضوعات المهمة التي عن طريقها يمكن الدخول إلى اغلب العلوم على نحو العلوم الطبية والطبيعية والبيولوجية والتنمية البشرية وعلم الاجتماع وكثير من العلوم الأخرى ، وحيث تعد طرائق تحليل السلاسل الزمنية من أكثر الطرائق الإحصائية استخداماً ، حيث يمكن عن طريقها تحليل أية ظاهرة من الظواهر لفترات زمنية متساوية وغير متساوية. ويعزى الاهتمام الكبير بموضوع السلاسل الزمنية إلى الحاجة

* استاذ/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

** طالبة ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

الماسة الى نظام تنبؤ ذي كفاءة عالية وموثوق به ، بحيث يمكن الاعتماد عليه في تفسير الكثير من الظواهر في مختلف المجالات . [4]

يتركز بحثنا على دراسة استقرارية نموذج مقترح متعدد الحدود و يدعى بأنموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود بحدود دوال مثلثية (PAR) Polynomial autoregressive model with trigonometric terms . و يمتلك هذا النموذج عادة سلوكاً غير خطي دوري ويمتلك دورات نهاية (Limit cycle) . و سنحاول إيجاد الصفات الدورية و استقرارية النقطة المنفردة (singular point) باستخدام طريقة التقريب الخطية للنموذج غير الخطي المقترح و بعض الصفات الإحصائية الأخرى .

1- مفاهيم و مبادئ أساسية :

1-1 السلسلة الزمنية: [2]

Time Series

إن السلسلة الزمنية هي عبارة عن مجموعة من البيانات المسجلة لظاهرة معينة خلال فترة زمنية سابقة كان تكون اقتصادية أو اجتماعية أو إحصائية و مرتبة بشكل متسلسل حسب الزمن، وعادة تكون الفترات الزمنية بين مشاهدة وأخرى متساوية.

وتعرف السلسلة الزمنية رياضياً بأنها متتابعة من المتغيرات العشوائية معرفة ضمن فضاء الاحتمالية متعددة المتغيرات ومؤشرة بالدليل t والذي يعود إلى مجموعة دلالية T ويرمز للسلسلة الزمنية عادة $\{X(t); -\infty < t < \infty, t \in T\}$; أو اختصاراً $\{X(t)\}$. إذا كانت t تأخذ قيماً مستمرة فإن السلسلة الزمنية تسمى "مستمرة الزمن" أما إذا كانت t تأخذ قيماً متقطعة $t=0, +1, +2, \dots$ فإن السلسلة تسمى "متقطعة الزمن" ويرمز لها $\{X_t; t=0, +1, +2, \dots\}$ أو $\{X_t\}$.

The polynomial model

1-2 النموذج المتعدد الحدود :

[7]

لتكن $\{y(t)\}$ متسلسلة زمنية ، $\{z_t\}$ إزجاجات بيضاء . و بفرض أن $f(\cdot)$ في المعادلة:

$$y(t) = f(y(t-1), y(t-p), z(t-1), \dots, z(t-p)) + z_t$$

متعدد حدود من الدرجة p سوف نحصل على نموذج انحدار ذاتي متعدد الحدود و تكون له الصيغة الآتية :

$$y(t) = p(y(t-1), \dots, y(t-p), z(t-1), \dots, z(t-q)) + z(t) \quad \dots(1-1)$$

إذ أن $p(\cdot)$ هي متعددة حدود من الدرجة P و $\{z(t)\}$ إزجاجات بيضاء من الدرجة q .

Exponential Autoregressive model

1-3 نموذج الانحدار الذاتي الاسي: [9]

(EXPAR(P))

عرف الباحث الياباني Ozaki عام 1985 نموذج الانحدار الذاتي الاسي من المرتبة p بالشكل الآتي:

$$x_t = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \pi_i e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-i} + z_t \quad \dots(1-2)$$

حيث $\{z_t\}$ مستقلة ومتماثلة التوزيع إزجاجات بيضاء ، و α_i, π_i و $i=1, 2, \dots, p$ كميات ثابتة تمثل معاملات (parameters) النموذج .

1-4 نموذج الانحدار الذاتي متعدد الحدود و حدود دوال مثلثية (النموذج المقترح)

Polynomial autoregressive model with trigonometric

terms (PAR)

ليكن لدينا $\{x_t\}$ متسلسلة زمنية حيث $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ يعرف نموذج متعدد الحدود و حدود دوال مثلثية للانحدار الذاتي بأنه النموذج الذي يحقق العلاقة الآتية :

$$x_t = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} x_{t-k} \right) \right]^i + z_t$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

α_i ثوابت ، z_t إزجاجات بيضاء .

2- الجانب النظري:

Nonlinear Dynamical system

2-1 الأنظمة الديناميكية (الحركية) اللاخطية

[12][8]

في الأنظمة الديناميكية (الحركية) التي يتم تغطيتها بمعادلات تفاضلية لاخطية غالباً ما يتم استخدام طرائق التقريب لتحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية الخطية ، وهناك طريقتان للتقريب تعتمدان على البنية الفيزيائية للنظام الحركي ، وهاتان الطريقتان هما التقريب بالقطع الحكيمة (piecewise approximation) ، و التقريب بالخطية المحلية (local linearization approximation) . إن استقرارية الأنظمة الحركية تعتمد بشكل أساسي على سلوك الحل فيما إذا كان يقترب من نقطة منفردة (singular point) أو من منحنى مغلق (close curve) عندما يكون الحل دورياً (periodic) أو لا .

تتميز الأنظمة الحركية اللاخطية بعدة صفات منها :

1- طبيعة القفز (Jump phenomena) . إذ أن $\dot{x}(t)$ هي القوة المضمحلة (Damping force)

و $\alpha x(t) + \beta x^3(t)$ هي القوة المرجعة لقوة التذبذب (Restoring force of oscillation).

2- الاعتمادية بين سعة موجة التذبذب (Amplitude) و التردد (Frequency) ، التي يمكن ملاحظتها في نماذج الاهتزازات العشوائية (Random Vibration) .

3- امتلاكها دورة النهاية وهذا السلوك للحل يظهر بشكل واضح في معادلة فان دربول (Vander Pol equation)

التي صيغتها :

$$\ddot{x}(t) - \beta(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + \alpha x(t) = 0 \dots \dots \dots (2-1)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

حيث

وان من أهم التقنيات المستخدمة لتقريب الأنظمة اللاخطية إلى أنظمة خطية محلية بالقرب من نقطة مفردة (Singular point) تمثل الحل الثابت للنظام هي تقنية التقريب بالخطية المحلية و لتوضيح هذه التقنية ليكن لدينا معادلة تفاضلية غير خطية ويتم تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية بالخطوات الآتية :

1- تخفيض رتبة المعادلة

2- كتابتها بصيغة فضاء الحالة

3- إيجاد النقطة الثابتة والحل الثابت للنظام ، و كما يأتي :-

ليكن لدينا المعادلة الآتية : (معادلة فان دربول)

$$\ddot{x}(t) - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \dots \dots \dots (2-2)$$

وبوضع $\dot{x} = y$ تصبح المعادلة (2-2) بالصيغة :

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = (1 - x^2)y - x \dots \dots \dots (2-3)$$

وبإعادة كتابتها بصيغة فضاء الحالة (State space) على أن $(x, y)^T$ هو متجه الحالة (State vector) ، وان النقطة الثابتة الوحيدة في النظام (2-3) هي نقطة الأصل ، و الحل الثابت عند هذه النقطة هو الحل الصفري $(\dot{x} = 0, \dot{y} = 0)$.

و باستخدام توسيع تايلور (Taylor expansion) للنظام (2-7) حول نقطة الأصل نحصل على :

$$\dot{x} = 0 * x + 1 * y$$

$$\dot{y} = (-1 - 2xy)x + (1 - x^2)y \dots \dots \dots (2-4)$$

إن توسيع تايلور تم تقريبه في المعادلة (2-4) للحد الثاني فقط على اعتبار أن الدوال $X(x, y)$ و $Y(x, y)$ هي دوال بمتغيرين x و y وان $X(0,0) = 0$ و $Y(0,0) = 0$ عند نقطة الأصل . وباستخدام صيغة فضاء الحالة يصبح لدينا :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2xy & 1 - x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2-5)$$

وهذا النظام عند نقطة الأصل يصبح بالشكل الآتي :

$$\dots \dots (2-6) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} =$$

$$\dot{x} = y$$

أي أن :

$$\dot{y} = -x + y$$

أي أن معادلة فان دربول (2-3) و بالقرب من النقطة الثابتة (الأصل) تصبح معادلة خطية بالشكل الآتي :

$$\dot{x} - \dot{x} + x = 0 \dots \dots \dots (2-7)$$

هذه التقنية يمكن تطبيقها على النقاط المنفردة غير الصفريه أيضا ، إذ أن الأنظمة الحركية اللاخطية تضم نقاطاً منفردة صفريه و أخرى غير صفريه (Non- zero singular point)

واستقرارية هذه الأنظمة تتحدد بسلوك مسار الحل عند اقترابه من هذه النقاط المعزولة ، أو ابتعاده عنها عندما $t \rightarrow \infty$ ، و t هنا يمثل الزمن [12].

Stationary and stability

2-2 المروحة و الاستقرارية : [1]

تصادفنا في كثير من المسائل الفيزيائية الهندسية عمليات يمكن وصفها بأنها في حالة اتزان إحصائي Statistical Equilibrium ، ومعنى ذلك إننا لو حصلنا على مشاهدات لعملية من هذا النوع وتم تقسيمها إلى مجاميع من الفترات الزمنية فان المقاطع المختلفة لهذه المشاهدات تبدو متشابهة ، و بكلام أكثر دقة إن الصفات الإحصائية ثابتة لا تتغير مع الزمن .إن العمليات العشوائية التي تتصرف على هذا النحو تدعى عمليات مرحلية stationary [1]، وتعني عدم وجود نمو أو اضمحلال بيانات المتسلسلة الزمنية ، بمعنى آخر إن البيانات تكون منتشرة حول وسط ثابت ولها تباين ثابت .فان ذلك يعني $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$ يجب أن يكون لها دالة الكثافة الاحتمالية نفسها، أي أن $f(x_{1+k}, x_{2+k}, x_{3+k}, \dots, x_{t+k}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_t)$ إذ أن k تمثل عدداً حقيقياً .وان التوزيع الاحتمالي المشترك لا يتغير مع تغير الفترة الزمنية أو عند الإزاحة بأعداد ثابتة .

و قد بين العالم (Priestly) إن العمليات المروحة stationary تنشأ عادة من خلال نظام مستقر stable يصل إلى حالة الثبات steady stable بعد فترة زمنية مناسبة . و اعتبر النظام المستقر (stable) بأنه النظام الذي ينتج الإدخال المحدود فيه دائماً أخرجاً محدداً ، وعليه يكون النظام مستقراً stability رياضياً إذا كانت جذور متعدد الحدود لمعادلة النظام في صيغة عامل التخلف (Lap operator) تقع كلها خارج دائرة الوحدة (unite circle) ، وان جذور المعادلة المميزة تقع كلها داخل دائرة الوحدة [1].

Fixed(Singular) point

3-2تعريف النقطة المنفردة:

[10][12]

تعرف النقطة المنفردة ζ للنموذج

$$x_t = f(x_{t-1}, \dots, x_{t-p}) \quad \dots \quad (2-8)$$

بأنها تلك النقطة التي يقترب منها مسار النموذج أعلاه ويكون الاقتراب إما عندما $t \rightarrow \infty$ أو $t \rightarrow -\infty$. فإذا كان اقتراب المسار عندما $t \rightarrow \infty$ فتسمى ζ نقطة منفردة مستقرة. وإذا اقترب المسار من النقطة ζ عندما $t \rightarrow -\infty$ فتدعى ζ نقطة

منفردة غير مستقرة .والشرط الضروري و الكافي لـ ζ هو أن تحقق العلاقة الآتية:

$$\zeta = f(\zeta)$$

2-4 تعريف (دورة النهاية): [9][12] Limit cycle

ليكن لدينا النموذج الآتي :

$$x_t = f(x_{t-1}, \dots, x_{t-p})$$

تعرف دورة النهاية للنموذج أعلاه على أنها المسار المعزول و المغلق . $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+q} = x_t$ إذ أن q تمثل عدداً صحيحاً موجباً. ويعرف المسار المعزول بأنه أي مسار يبدأ قريباً جداً من دورة النهاية، ويقترب منها إما عندما $t \rightarrow \infty$ أو $t \rightarrow -\infty$ فإذا كان الاقتراب منها عندما $t \rightarrow \infty$ فتسمى دورة نهاية مستقرة (stable limit cycle) أما إذا كان الاقتراب منها عندما $t \rightarrow -\infty$ فتسمى دورة نهاية غير مستقرة (unstable limit cycle) ، أما المسار المغلق فهو إذا كانت القيم الابتدائية $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ تنتمي لدورة النهاية فإن $(x_1, \dots, x_p) = (x_{1+kq}, \dots, x_{p+kq})$ لكل عدد صحيح موجب k

حيث أن p هو الدورة period إلى دورة النهاية (limit cycle) وهو عدد نقاط المسار المغلق وان كلاً من q و k تمثل عدداً صحيحاً موجباً [ozaki-82].

2-5 إيجاد استقرارية النماذج غير الخطية باستخدام طريقة التقريب الخطية :

تم اقتراح طريقة التقريب الخطية لإيجاد استقرارية النماذج غير الخطية بالاعتماد على تقنية التقريب في الفقرة السابقة التي تم تطبيقها على نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية الاسية من قبل الباحث Ozaki وتتلخص الطريقة بمرحلتين :

المرحلة الأولى: إيجاد النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج غير الخطي

المرحلة الثانية : اختبار استقرارية تلك النقطة باستخدام تقنية التقريب الخطية.

2-6 استقرارية نموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود و حدود دوال مثلثية:-

Polynomial autoregressive model with trigonometric terms PAR (P)

ليكن لدينا النموذج الآتي :

$$x_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} x_{t-k}\right) \right]^i + z_t \quad \dots(2-9)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

حيث أن α_i ثابت و z_t إزجاجات بيضاء .

نفرض أن $k=1$ (أي سوف نحصل على متعددة حدود بدوال مثلثية و ب x_{t-1}) أي أن :

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} x_{t-1}\right) \right]^j + z_t \quad \dots(2-10)$$

7-2 إيجاد النقطة المنفردة للنموذج المقترح :

ليكن لدينا النموذج المعرف في المعادلة (2-10) ، نفرض تأثير $\{z_t\}$ يساوي صفر و باستخدام تعريف النقطة المنفردة و بفرض أن $\zeta^n \rightarrow 0$ لكل $n \geq 4$ و أن $j = 1, 2, 3, 4$ في المعادلة (2-10) و باستخدام مفكوك تايلور نحصل على :

$$\Rightarrow \zeta^2 + \frac{1}{B}\zeta - \frac{A}{B} = 0 \quad \dots(2-11)$$

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$B = \frac{\pi^2}{8}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)$$

حيث أن :

أي أن :

$$\Rightarrow \zeta = \frac{-1/B \pm \sqrt{(1/B)^2 + 4A/B}}{2} \quad \dots(2-12)$$

8-2 النقطة المنفردة للنموذج المقترح من الرتبة K : ($k = 2, 3, 4, \dots$)

لإيجاد النقطة المنفردة للنموذج المقترح (2-9) من الرتبة k . نهمل تأثير z_t في النموذج (2-9) فنحصل على :

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} x_{t-k}\right) \right]^j ;$$

$$k = 2, 3, \dots$$

وباستخدام تعريف النقطة المنفردة نحصل على :

$$\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right) \right]^j$$

ولإيجاد النقاط المنفردة لأية رتبة نتبع صيغة مشابهة لطريقة إيجاد النقطة المنفردة عندما $k=1$.

2-9 استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج المتعدد الحدود (المقترح):

سوف نحاول اختبار استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية باستخدام طريقة التقريب الخطية المحلية بالقرب من النقطة المنفردة وكما يأتي :

ليكن لدينا أ النموذج المعرف في (2-10) نفترض تأثير z_t معدوماً و باستخدام مفكوك تايلور وبالتعويض عن $x_t = \zeta + \zeta_t$ حيث ζ مقدار صغير جداً و أن $\zeta_{t-1}^n \rightarrow 0; \forall n \geq 2$ فنحصل على :

$$\zeta + \zeta_t = A - B(\zeta^2 + 2\zeta\zeta_{t-1}) \quad \dots(2-13)$$

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$B = \frac{\pi^2}{8}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)$$

حيث أن :

و بما إن :

$$\zeta = \frac{-1/B + \sqrt{(1/B)^2 + 4A/B}}{2}$$

و بالتعويض في (2-13) نحصل على :

$$\zeta_t = (1 - \sqrt{1 + 4AB})\zeta_{t-1} \quad \dots(2-14)$$

وعليه يكون النموذج مستقرًا إذا كانت :

$$|1 - \sqrt{1 + 4AB}| < 1 \quad \dots(2-15)$$

2-12 استقرارية دورة النهاية : [9]

سنحاول إيجاد استقرارية دورة النهاية من خلال المبرهنتين الآتيتين :

2-14 مبرهنة : [9]

دورة النهاية بدورة $q, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+q}$ للنموذج الانحدار الذاتي الآسي من المرتبة الاولى تكون مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\left| \prod_{j=1}^q \left[\phi_j + \pi_j (1 - 2x_{t+q-j}^2) e^{-x_{t+q-j}^2} \right] \right| < 1$$

البرهان : لاحظ [9]

15-2 مبرهنة: [9][10]

دورة النهاية بدورة q للنموذج (2-23) تكون مستقرة إذا كان :

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| < 1$$

البرهان : (لاحظ [10]) .

قضية (1) :

دورة النهاية بالدورة q (إن وجدت) للنموذج المقترح عندما تكون p=1 تكون مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط:-

$$\left| \prod_{j=1}^q \left[\alpha_i \cos \left(\frac{\pi}{2} x_{t-1} \right) \right]^j \right| < 1$$

البرهان:

نفترض بان النموذج المقترح يمتلك دورة نهاية بالدورة q و q>1 بالشكل:

$$x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+q} = x_t$$

وهو مسار مغلق و معزول .

ليكن لدينا الأنموذج المعرف في المعادلة (2-10) الأتية :

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} x_{t-k} \right) \right]^j + z_t$$

نأخذ حالة خاصة عندما j=1, k=1 و تعمم الفكرة بنفس الطريقة.

$$X_t = \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} x_{t-1} \right) + Z_t$$

$$X_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2} x_{t-1} \right)^{2k}}{2k!} + z_t \quad \dots (2 - 16)$$

لتكن $x_t = x_s + \zeta_s$ و نفرض أن $|\zeta_{s-1}|^n \rightarrow 0$ لكل $n \geq 2$ و بإهمال تأثير $\{z(t)\}$ نحصل على :

$$X_s + \zeta_s = \alpha \left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} x_{s-1}^2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} x_{s-1}^4 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} x_{s-1}^6 + \dots \right]$$

$$- \alpha \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} x_{s-1} \zeta_{s-1} + \alpha \frac{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} x_{s-1}^3 \zeta_{s-1} - \alpha \frac{6\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} x_{s-1}^5 \zeta_{s-1} + \dots$$

أي أن :

$$\zeta_s = -\alpha \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} x_{s-1} \zeta_{s-1} + o(x_{s-1} \zeta_{s-1}) \quad \dots(2-17)$$

$$\therefore \zeta_s = \beta x_{s-1} \zeta_{s-1} \quad \dots(2-18)$$

حيث إن :

$$\beta = -\alpha \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$$

نفرض أن :

$$T(x_{t-1}) = \beta x_{t-1}$$

$$\Rightarrow \zeta_{t+q} = \left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right| \zeta_t$$

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| = \left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right|$$

و لأجل التقارب نحو الصفر يجب أن تكون هذه النسبة اقل من واحد أي أن :

$$\left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right| < 1$$

و بهذا يمتلك النموذج دورة نهاية مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\left| \prod_{i=1}^q (\beta x_{t+q-i}) \right| < 1 \quad \dots(2-19)$$

و بهذا يتم البرهان .

قضية (2):

يمتلك النموذج المقترح دورة نهاية إذا كان :

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| < 1$$

البرهان: ليكن لدينا النموذج المعرف بالمعادلة (2-16) ، و بإهمال تأثير $\{z_t\}$ و باستخدام الفرضيات في الفقرة السابقة حصلنا على النموذج الآتي :

$$\zeta_t = (1 - \sqrt{1 + 4AB}) \zeta_{t-1}$$

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$B = \frac{\pi^2}{8} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)$$

$$c = (1 - \sqrt{1 + 4AB})$$

حيث:

نفرض أن:

فحصل على:

$$\zeta_t = c \zeta_{t-1}$$

$$\zeta_{t+q} = c^q \zeta_t$$

$$\frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} = c^q \Rightarrow \left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| = |c^q| < 1$$

أي أن :

وهذا الشرط يتحقق إذا كانت $|c| < 1$. وعليه ينتهي البرهان .

مثال -1-

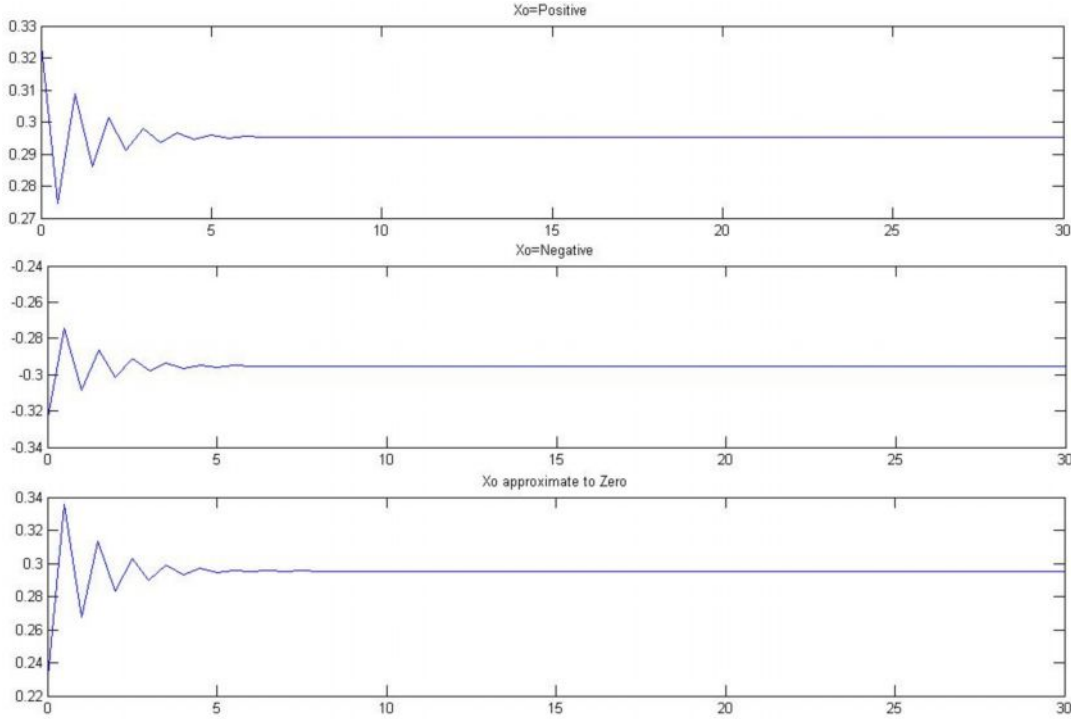
ليكن لدينا النموذج الآتي :

$$x_t = 0.398 \cos\left(\frac{\pi}{2} x_{t-1}\right) + z(t) \quad \dots(1)$$

و بالرجوع إلى شرط الاستقرار للنموذج المقترح نحصل على النقطة المنفردة $\zeta = 0.29256$ و باستخدام العلاقة (2-14) نحصل على :

$$\zeta_t = -0.70784 \zeta_{t-1}$$

و بما أن $|\lambda| < 1$ و عليه يكون النموذج مستقراً . و الأشكال الآتية تبين استقرارية النموذج و بفرض قيم أولية (initial value) مختلفة .



الشكل -1- المتسلسلة المولدة من النموذج (1)

نلاحظ من الأشكال أعلاه أن المتسلسلة المولدة من النموذج لا تعتمد على الشرط الابتدائي ، و أن المسارات تقترب من دورة النهاية .

مثال -2-

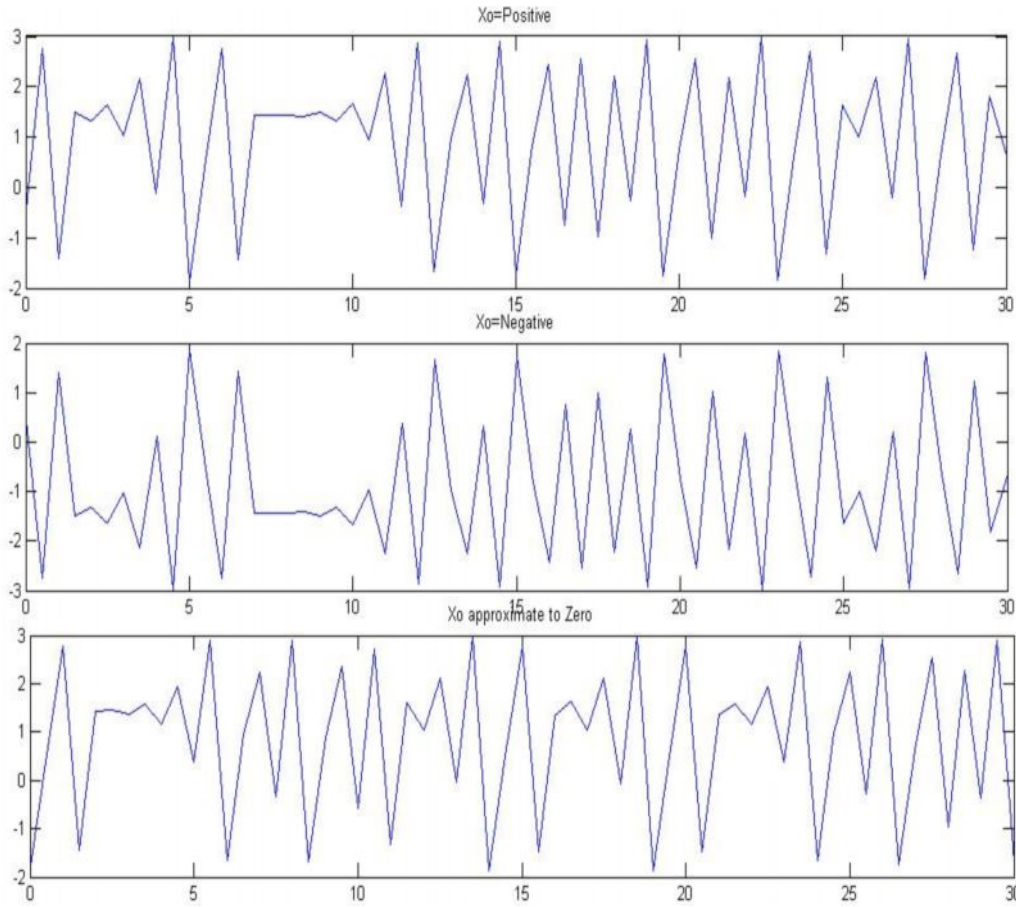
ليكن لدينا الأتمودج الآتي :

$$x_t = 2.999 \cos\left(\frac{\pi}{2} x_{t-1}\right) + z(t) \quad \dots(2)$$

و منها نحصل على $\zeta = 1.38105$ و من العلاقة (2-14) نحصل على النموذج $\zeta_t = -2.33035 \zeta_{t-1}$.

أي أن $|\lambda| < 1$ مما يدل على عدم تحقق شرط الاستقرارية فان النموذج (2) غير مستقر .

و الأشكال الآتية توضح ذلك .



الشكل -2- المتسلسلة المولدة من الأنموذج (2)

نلاحظ من الأشكال أعلاه أن النموذج (2) لا يمتلك دورة نهاية .

Application

3- الجانب التطبيقي :

3-1 المقدمة :

سنحاول في هذه الفقرة الاعتماد على طريقة (بوكس - جنكيز) في تحليل و نمذجة المتسلسلة الزمنية لإعداد المصابين بالتهاب الحنجرة حيث تم الحصول على البيانات من المستشفى الجمهوري في الموصل للفترة (2009-2004) المتمثلة بإعداد المصابين بالمرض :-

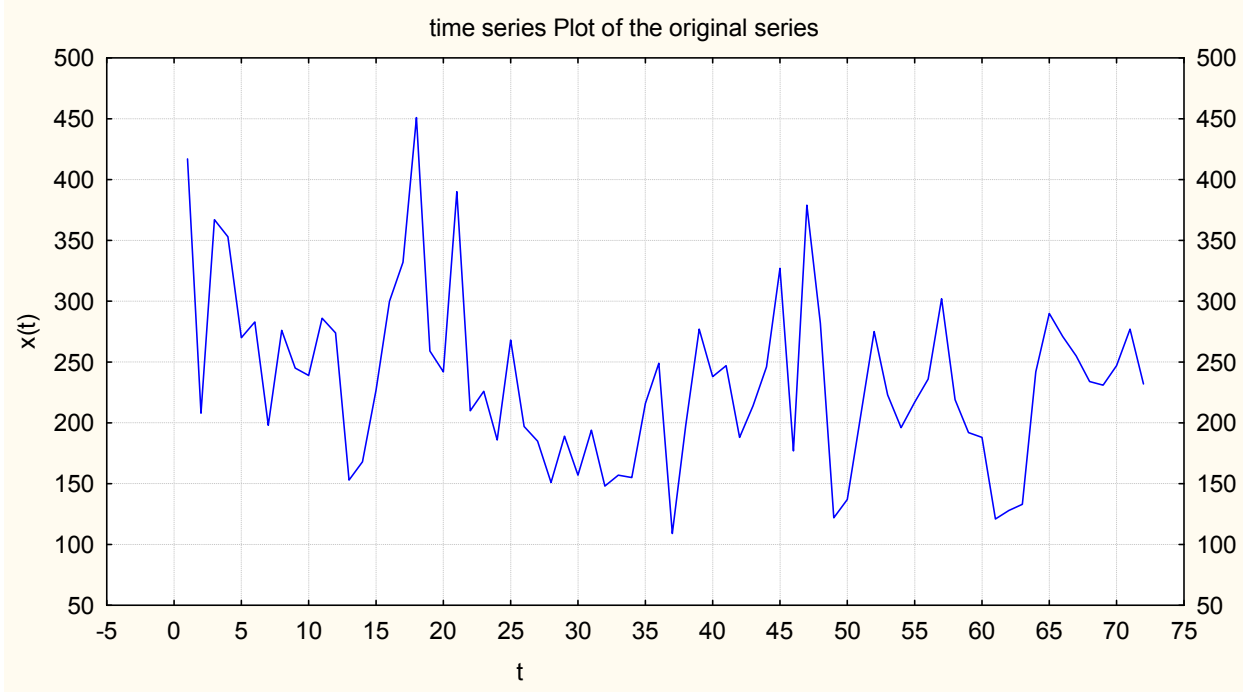
المرحلة الأولى : تشخيص النموذج Model Identification

المرحلة الثانية : تقدير معالم النموذج Parameters Estimation

المرحلة الثالثة : اختبار ملاءمة النموذج المشخص Diagnostic Checking (لاحظ [3]).

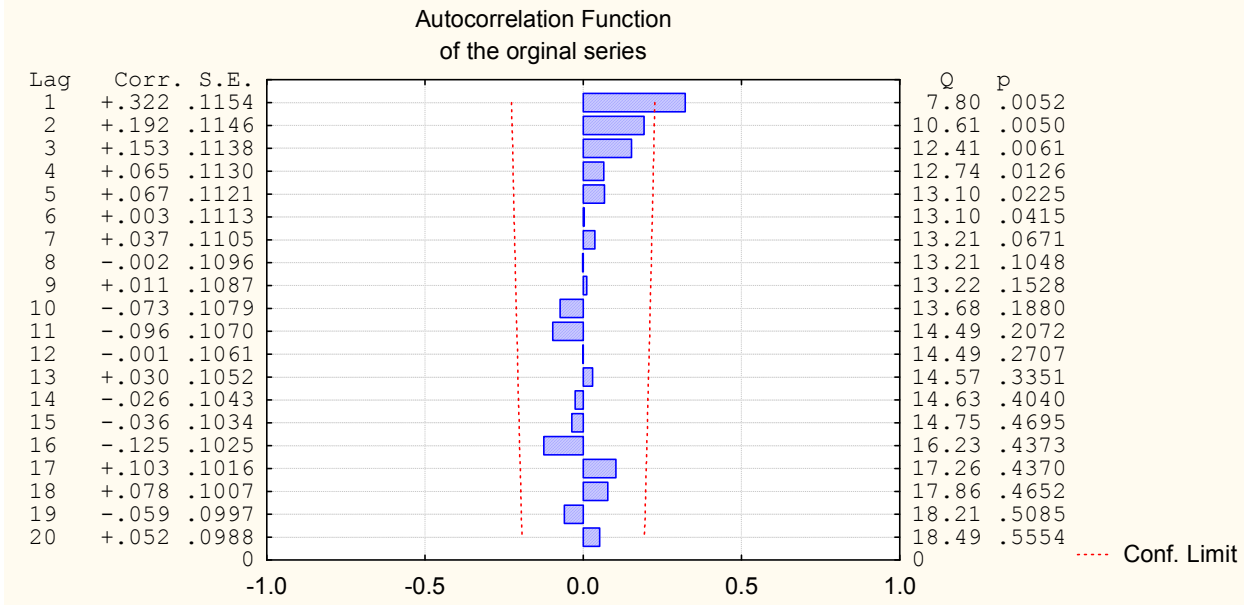
3-2 تحليل البيانات :

يمثل الشكل (1) الرسم البياني للمتسلسلة الزمنية حيث يمثل محور السينات الزمن t ، و محور الصادات يمثل أعداد المصابين بهذا المرض و الذي يمثل السلسلة الزمنية المدروسة $\{X_t\}$. إذ نلاحظ بان المتسلسلة تتذبذب تنذبباً غير منتظم مما يشير إلى أن السلسلة غير متراوحة في الوسط ، و أن المتسلسلة تتبع نظاماً دورياً غير منتظم ، أي أنها تعيد نفسها كل فترة زمنية معينة .

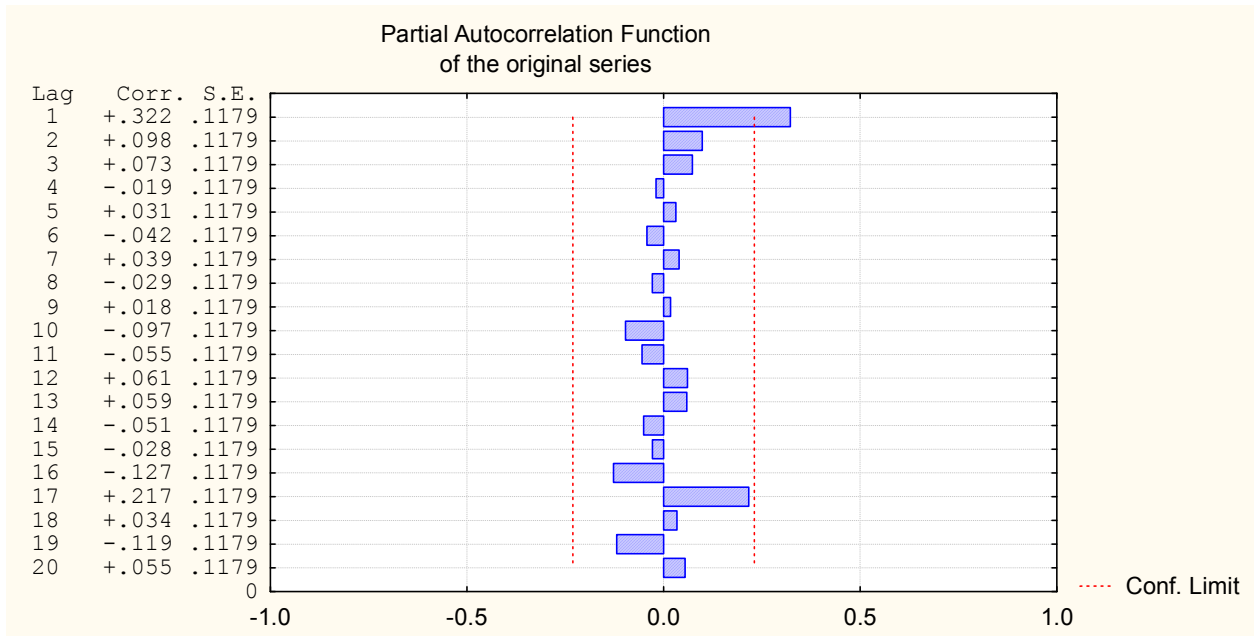


الشكل -1- الرسم البياني للمتسلسلة المتمثلة بعدد الإصابات بمرض التهاب

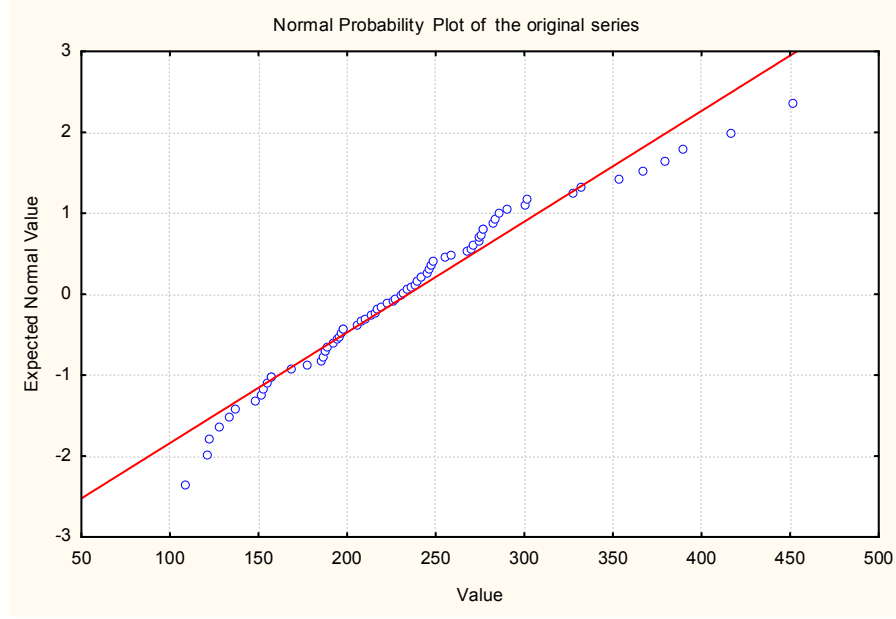
والأشكال (2) و (3) و (4) تمثل رسم دالة الارتباط الذاتي و دالة الارتباط الذاتي الجزئي و رسم (Normal probability plot) لمعدل الإصابات بهذا المرض



الشكل -2- دالة الارتباط الذاتي للبيانات الأصلية



الشكل -3- دالة الارتباط الذاتي الجزئي للبيانات الأصلية



الشكل -4- رسم الطبيعة للبيانات الأصلية

حيث نلاحظ أن المتسلسلة غير مترابطة (Correlated) ، و نجد أن أكثر من 5% تقريباً من معاملات الارتباط الذاتي تقع خارج القيد $\pm \frac{1.97}{\sqrt{n}}$ و لكنها تكون قريبة من التوزيع الطبيعي إذ نلاحظ أن معظم البيانات قريبة من المحور الرئيس لرسم الطبيعة .

3-3 النمذجة :

من ملاحظة الرسم البياني للمتسلسلة الشكل (-1-) نجد أن المتسلسلة غير متزاوجة في الوسط ، و تتذبذب بشكل دوري غير منتظم تقريباً

و لأجل تحويلها إلى متسلسلة زمنية متزاوجة في الوسط تم اخذ الفروقات لها أي أن :

$$y_t = \Delta^d x_t \quad \dots(3-1)$$

$$d = 1, 2, \dots ; \quad \Delta = (1 - B)$$

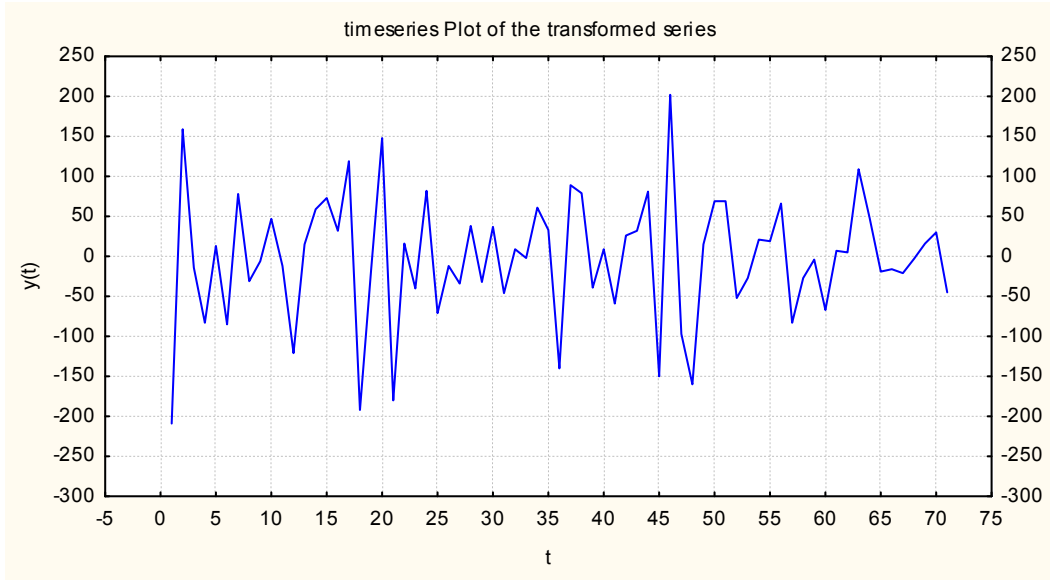
x_t تمثل المتسلسلة الأصلية

y_t تمثل المتسلسلة المحولة

و أن B مؤثر الإزاحة الخلفي ، الذي يعرف بما يأتي :

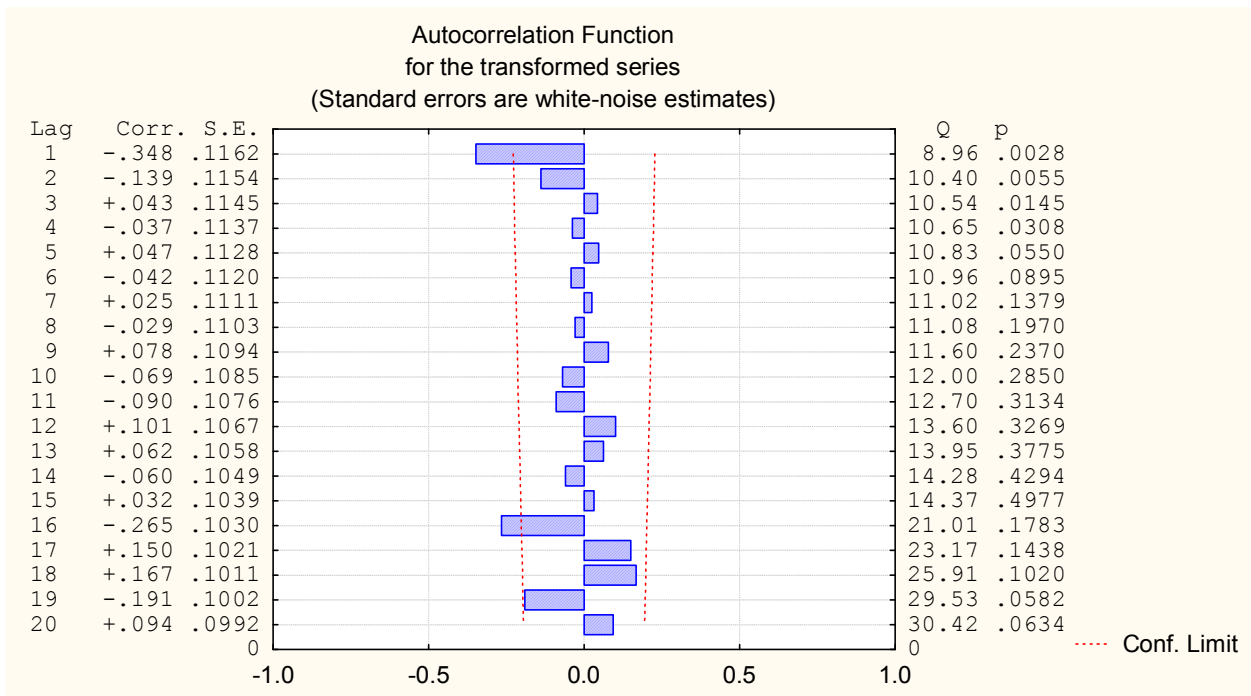
$$B^r x_t = x_{t-r} \quad ; \quad r = 1, 2, \dots$$

و الشكل -5- يمثل المتسلسلة المحولة (d=1).

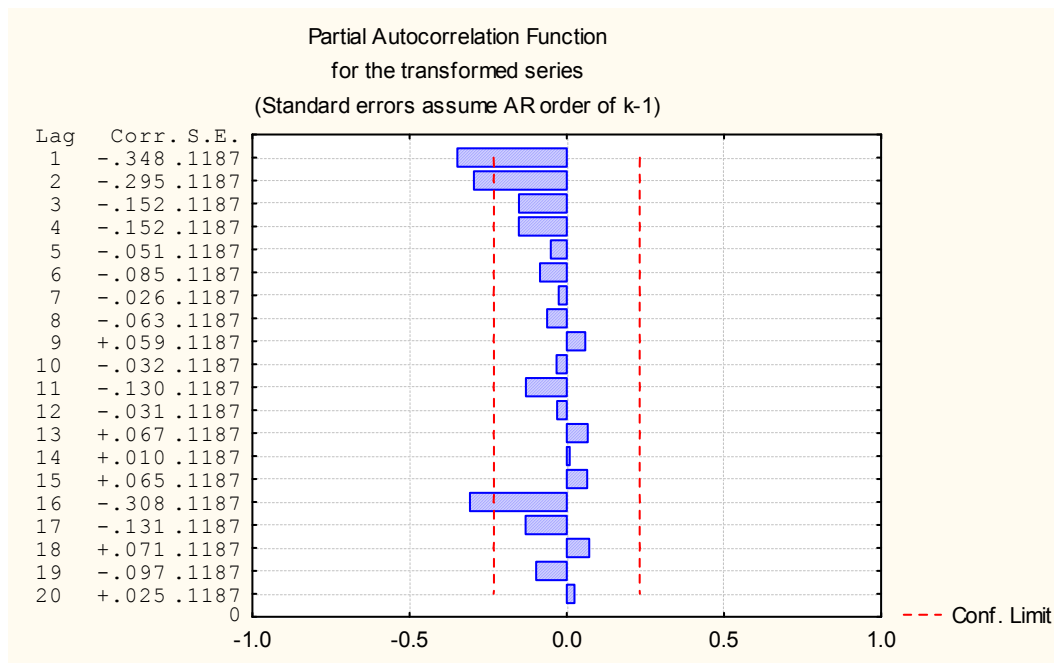


الشكل -5- رسم المتسلسلة للبيانات المحولة

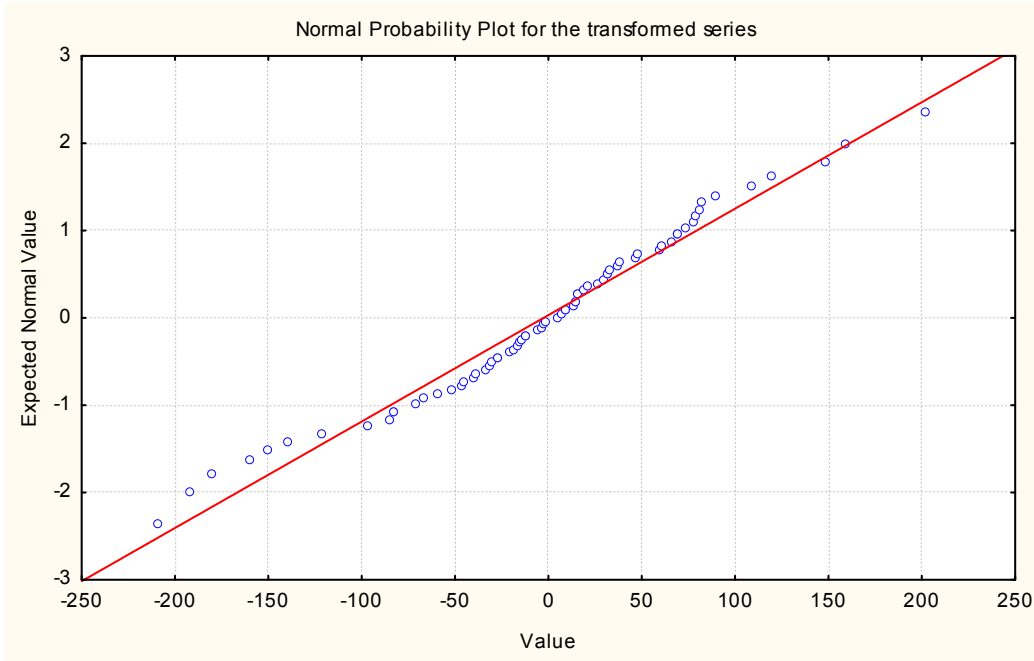
ومن الشكل أعلاه نجد أن المتسلسلة متزاوجة حول الوسط . و الأشكال (6) و (7) و (8) تمثل رسم دالة الارتباط الذاتي و الجزئي و رسم الطبيعة إذ نلاحظ أن بيانات المتسلسلة غير مترابطة (Correlated) و حيث نلاحظ أكثر من 10% من معاملات الارتباط الذاتي تقع خارج القيد $\pm \frac{1.97}{\sqrt{n}}$ لكنها قريبة من التوزيع الطبيعي .



الشكل -6- دالة الارتباط الذاتي للبيانات المحولة



الشكل -7- دالة الارتباط الذاتي الجزئي للبيانات المحولة



الشكل -8- رسم الطبيعة للبيانات المحولة

و اعتماداً على الوصف البياني و رسم دالة الارتباط لاحظنا بان المتسلسلة تمتلك صفات دورية ، و بدورات غير منتظمة ، مما يمكننا من استخدام نماذج غير خطية لتمثيل المتسلسلة .

بما أن النموذج الذي لدينا نموذج متعدد حدود إذ أن :

$$y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) \right]^j + z_t$$

سوف نحاول بناء نماذج من المرتبة الأولى و الثانية لتوضيح استقرارية الأنموذج أعلاه باستخدام العلاقات التي تم الحصول عليها في الجانب النظري من الفقرات السابقة .

لتكن $p=1$ في الأنموذج أعلاه أي أن :

$$y_t = \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + z_t$$

وباستخدام برنامج فورتران (Fortran 90) حصلنا على النموذج الآتي :

$$y_t = 0.0811 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + z_t \quad \dots(3-2)$$

$$\sigma_z^2 = 0.1476576$$

$$NBIC = -1.643293$$

و عندما P=2 أي أن :

$$y_t = \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + \alpha_2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right)\right)^2 + z_t$$

و حصلنا على النموذج الآتي :

$$y_t = 0.0988 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + 0.0484 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right)\right)^2 + z_t \quad \dots(3-3)$$

$$\sigma_z^2 = 0.1611775$$

$$NBIC = -1.555683$$

3-4 الاستقرارية :

سنحاول في هذه الفقرة تطبيق العلاقات (النقطة المنفردة و استقرارية دورة النهاية) التي تم الحصول عليها في الجانب النظري للنماذج التي تم بناؤها لتمثيل المتسلسلة المدروسة .

1-نموذج الانحدار المتعدد الحدود من الرتبة الأولى

أي أن :

$$y_t = 0.0811 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + z_t$$

حيث أن :

$$\sigma_z^2 = 0.1476576$$

$$NBIC = -1.643293$$

$$\alpha = 0.0811$$

أ-النقطة المنفردة للنموذج أعلاه هي باستخدام العلاقة (2-12) هي :

$$\zeta = 0.08007292$$

ب-استقرارية النقطة المنفردة : باستخدام العلاقة (2-14) نحصل على النموذج الآتي :

$$\zeta_t = -0.0259715 \zeta_{t-1}$$

وهو نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى و أن المعادلة المميزة للنموذج هي :

$$v + 0.0259715 = 0$$

أي أن $\lambda = -0.0259715$ هو جذر المعادلة ، و واضح بان النموذج أعلاه مستقر لان $|\lambda| < 1$.

ج- استقرارية دورة النهاية :

النموذج أعلاه يمتلك دورة نهاية مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط :

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| < 1$$

و من العلاقة (2-14) و الفرضيات في تلك الفقرة حصلنا على :

$$\zeta_t = A\zeta_{t-1}$$

و منها نحصل على :

$$C = -0.0259715$$

و عليه يكون شرط امتلاك النموذج دورة نهاية مستقرة هو $|C^q| < 1$ و بما ان $|C| < 1$ فان المقدار $|C^q| < 1$

يتحقق لجميع قيم $q > 1$

و عليه يمتلك النموذج دورة نهاية .

2- نموذج الانحدار المتعدد الحدود من الرتبة الثانية أي أن :

$$y_t = 0.0988 \cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right) + 0.0484 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} y_{t-1}\right)\right)^2 + z_t$$

حيث أن :

$$\sigma_z^2 = 0.1611775$$

$$NBIC = -1.555683$$

$$\alpha_1 = 0.0988$$

$$\alpha_2 = 0.0484$$

أ- النقطة المنفردة للنموذج أعلاه هي باستخدام العلاقة (2-12) هي : $\zeta = 0.13959025$

ب- استقرارية النقطة المنفردة باستخدام العلاقة (2-14) نحصل على النموذج الآتي :

$$\zeta_t = -0.109206274\zeta_{t-1}$$

وهو أنموذج انحدار ذاتي من الرتبة الثانية و أن المعادلة المميزة للنموذج هي :

$$\nu + 0.109206274 = 0$$

أي أن $\lambda = -0.109206274$ هو جذر المعادلة ، و واضح بان النموذج أعلاه مستقر لان $|\lambda| < 1$.

ج- استقرارية دورة النهاية :

النموذج أعلاه يمتلك دورة نهاية مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط :

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| < 1$$

و من العلاقة (2-14) و الفرضيات في تلك الفقرة حصلنا على :

$$\zeta_t = A\zeta_{t-1}$$

و منها نحصل على :

$$c = -0.109206274$$

و عليه يكون شرط امتلاك النموذج دورة نهاية مستقرة هو $|C^q| < 1$ و بما أن $|C| < 1$ فان المقدار $|C^q| < 1$

يتحقق لجميع قيم $q > 1$

و عليه يمتلك النموذج دورة نهاية .

المصادر:

1-البد راني، ظافر رمضان. (2002): "دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادفية مع إشارة خاصة إلى أسلوب فضاء الحالة والاستقرارية"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

2-العبيدي، عبد الغفور جاسم سالم. (1989). "تحليل ونمذجة السلسلة الزمنية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل.

3-العجيلي، سندس نوري. (2002): "بناء نموذج تصادفي لعدد الإصابات بمرض التدرن الرئوي في محافظة صلاح الدين للفترة (1989-2000)"، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية التربية للبنات، جامعة تكريت.

4-العزاوي ، عادل علي ،(2009) " تطبيق النموذج الطارئ على السلسلة الزمنية لأسعار القمح العالمية " ، رسالة ماجستير ، كلية علوم الحاسوب و الرياضيات ، جامعة الموصل .

5-المهداوي ، هيفاء جعفر ، (1991) ، " الانحدار الذاتي غير المستقر ذو الدرجات العليا " ، أطروحة دكتوراه ، كلية الإدارة و الاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .

6-Chatfield , c. , (1982) , “The analysis of time series : An introduction “ (2nd Ed) Chapman and Hall , London , New York .

7-Chen , S.; S.A . Billings , (1989) , “Modlling and analysis of non – linear time series “ , University of Southampton .

8-Ozaki , T . , (1980) , “Nonlinear Time series Model for Nonlinear Random Vibrations “ ,J . APP. Prob. 17 , pp(84–93) .

9-Ozaki , T . , (1985) , “ Nonlinear Time series Models and Dynamical system “ E . J . Hannan , P . R . krishnaiah , M , M . Rao , eds . , Handbook of statistics , Vo1.5 , pp.25–83

10-Ozaki , T . ,(1982) , “ Nonlinear Time series stochastic Processes and Dynamical system” Handbook of statistics , Vo1 . 5 ,ltd

11- Priestley, M. B., (1981): "Spectral Analysis and Time Series volume 1," Univariate Series", Academic Press.Inc. London.

12-Tong .H.,(1990) , “Nonlinear Time series ; A Dynamical system Approach “ Oxford University press , London