المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [297–314]

التقدير وبناء الاختبارات البيزية لمعلمتي الموقع والقياس في توزيع t متعدد المتغيرات

د. هيفاء عبد الجواد سعيد * معتزبا صلاح غانم اللهيبي**

المستخلص

تناول هذا البحث مسالتي التقدير والاختبارات البيزية لمعلمات توزيع t متعدد المتغيرات عندما تكون درجة الحرية للتوزيع معلومة وبوجود معلومات مسبقة خبرية وغير خبرية حول معلمات التوزيع وطبقت النتائج التي توصلنا اليها على المقاييس الولادية للاطفال الحديثي الولادة في محافظة نينوى لعام (2005) .

Estimation and Structure of Bayesian Tests for the Scale and Loction Parameters in Multivaiate- t distrbution

Hayfa Abdul Jawad Saieed Moatazbeallah Salah Kanem AL-Luibi

Abstract

This paper deals with two problems Bayesian estimation and hypothesis tests to the parameters of Multivaiate- t distrbution when the degrees of freedom of distribution is known with the (informative and non-informative) prior information. The results were applied on the neonatal birth scales data in Nineva Governorate for the year (2005).

(1) المقدمة

لقد كان اهتمام علماء الإحصاء منحصرا باستعمال التوزيع الطبيعي بوصفه توزيعا وحيداً للأخطاء العشوائية في نماذج الانحدار، وفي الوقت نفسه تلقى توزيع Student-t اهتماما متزيدا وبالأخص في أساليب الحصانة (Robust techniques) فقد حذر علماء كثيرون من حساسية

* استاذ مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل
** ماجستير/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

تاريخ التسلم :1/10/2011 ـــــــــ تاريخ القبول : 21 /12 /2011

الاستدلال المبني على النموذج الطبيعي لأنه يتجاهل بعض الاختلافات الموجـودة فـي فـروض التحليل لنماذج الانحدار، ومن ثم أدى ذلك إلى رفضهم المطلق لاستعمال التوزيع الطبيعي وذلك لعدة حقائق منها، أن التوزيع الطبيعي له حساسية عامة للانحرافات بشكل عام عـن الانحرافـات المفترضة حول أية دراسة مقامة، فضلاًعن ذلك انه يعطي أوزاناً كبيرة جداً للمشاهدات الـشاذة، ومن بين انتقادات أخرى على التوزيع الطبيعي تنحصر في فشله بنمذجة التوزيعات ذات الـذيول الثخينة (Heavy-tailed) على سبيل المثال فيما يتعلق الأمر بالبيانـات الاقتـصادية والتجاريـة والصناعية، وبالأخص بدراسة الموارد المالية وأسعار الأسهم المالية (اللهيبي، 2010)[2] .

إن التحليل الإحصائي باستعمال توزيع t بدرجات حرية صغيرة يكون قابلاً للتطبيق بـشكل اكبر من التوزيع الطبيعي والعكس ليس صحيحاً، ويعود سبب ذلك إلى حقيقة تقـول ان التوزيـع الطبيعي هو حالة خاصة من توزيع Student-t إذ التوزيع الثاني ينتمي إلى عائلـة التوزيعـات الاحتمالية ذات المنحنيات البيضوية وكذلك فان افتراضـات نمـوذج Student-t أوسـع مـن افتراضات النموذج الطبيعي ويستعمل متغيرات غير مستقلة ولكنها غير مرتبطـة خلافـاً عـن النموذج الطبيعي .

يمكن التعبير عن التوزيع t بوصفه توزيعا خليطاً (Mixed Distribution) من التوزيع الطبيعي المتعدد وعندما نعامل معلمة القياس σ^2 على أنها متغير عشوائي يتبع توزيع معكوس كاما والتي توصف بالشكل الآتي (اللهيبي، 2010)[2] $\sigma^2 \sim IG\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$

فإذا كان المتجه العشوائي $\underline{X}$ المشروط بـ σ^2 يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد الذي يوصف بالاتي $\underline{X} \mid \sigma^2 \sim N_p(\underline{\mu}, \sigma^2\Sigma)$

فانه بالإمكان إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتجه $\underline{X}$ غير المشروط بـ σ^2 وفقا إلى الصيغة الاتية

$$f(\underline{X}) = \int_{\sigma^2} f(\underline{X} \mid \sigma^2) \quad f(\sigma^2) \quad d\sigma^2$$

$$= \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{c(v,p)(\pi)^{\frac{p}{2}}} \left[1 + \frac{1}{v}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\right]^{-\frac{v+p}{2}}$$

ويعبر عن هذا التوزيع وصفيا بـ $\underline{X} \sim t_p(\underline{\mu}, \Sigma, v)$

حـيث أن

$\underline{X}$: متجه عشوائي ذو سعه (p*1) وان $-\infty<x<\infty$

$\underline{\mu}$: متجه المتوسط ذو سعه (p_*1) وان $-\infty<\mu<\infty$

Σ: مصفوفة أكيدة الايجابية (Positive Definite) تمثل معلمة القياس للتوزيع وبسعة(p_*p)

p:عدد المتغيرات ، v: تمثل درجات الحرية.

وان $c(v,p)=\dfrac{v^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)}$ ، غالبا يطلق عليه الثابت الطبيعي (Normalizing constant)

(2) التقدير لمعلمات توزيع t متعدد المتغيرات

يعتمد أسلوب بيز في عملية التقدير لمَعلمات التوزيعات الاحتمالية المختلفة بالأساس علـى نوعين من المعلومات الأول يمثل معلومات العينـة (Sample information) والثـاني يمثـل المعلومات الأولية (prior information) حول تلك المَعلمات وتختلف درجة دقتهـا بالاعتمـاد على المصادر التي تؤخذ منها تلك المعلومات، وقد تكون ناتجة من الخبـرة الشخـصية أو مـن التجارب الأولية وتسمى هذه الحالة بالمعلومات الاولية غير الخبرية (non-informative prior information).

وفي بعض الأحيان تكون قياسية عندما يتم استعمالها من قبل جميع الأشخاص، وهنالك نوع أخر من المعلومات تكون غنية بمعنى أنه تحتوي على معلومات كافية حول المَعلمات المطلوب تقديرها وغالبا مايطلق عليها بالمعلومات الاولية الخبرية (Informative prior Information)

ومن اجل تقدير مَعلمات توزيع t المتعدد المتغيرات يستوجب الأمر أولا أيجاد التوزيعات اللاحقة غير المشروطة بـσ^2 للمَعلمات المطلوب تقديرها سواء توافرت معلومات مسبقة خبرية او غير خبرية وسوف نوضح في أدناه التوزيعات اللاحقة ومقدرات المَعلمات بتوافر كلا النوعين من المعلومات وكالآتي :

الحالة الاولى:- التوزيعات اللاحقة لمعلمات توزيع t المتعدد بالاعتماد على المعلومات الاولية غير الخبرية

اولا:- عندما تكون Σ معلومة و $\underline{\mu}$ غير معلوم .

بتطبيق قاعدة جيفريز يمكن أيجاد التوزيع الأولي القليل المعلومات لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ من خلال أيجاد معلومات فيشر لمتجه المتوسط والذي يعرف كالاتي

$$f_{(x)}(\mu)=-E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\mu)}{\partial\mu\partial\mu'}\right)=\Sigma^{-1}$$

وحسب قاعدة جيفريز فان التوزيع السابق لـ $\underline{\mu}$ هو $p(\underline{\mu}) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$

فاذا توافرت متجهات المشاهدات العشوائية $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots\ldots, \underline{x}_n$ المسحوبة من مجتمع t متعدد المتغيرات فأن دالة الإمكان لـ $\underline{\mu}$ وΣ المشروطة بـ σ^2 تكتب بالصيغة الأتية

$$L(\underline{\mu},\Sigma \mid \sigma^2) = f(\underline{\bar{x}}, A \mid \underline{\mu},\Sigma,\sigma^2)$$

انظـر إلى (Anderson ,1984)[5]

حيث أن A معرفة كما في المعادلة الاتية $A = \sum_{j}^{n} (\underline{x}_{ij} - \underline{\bar{x}}_i)(\underline{x}_{ij} - \underline{\bar{x}}_i)'$

وان $S = \dfrac{A}{n-1}$

وهي مستقلة عن المتجه $\underline{\bar{X}}$ لذلك فان

$$f(\underline{\bar{x}}, A \mid \underline{\mu},\Sigma,\sigma^2) = f(\underline{\bar{x}} \mid \underline{\mu},\Sigma,\sigma^2)\, f(A \mid \underline{\mu},\Sigma,\sigma^2)$$

علما أن $\bar{x}|\sigma^2 \sim N_p(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Sigma)$ و $A|\sigma^2 \sim W(\sigma^2\Sigma, n')$ حيث $n' = n-1$

وعليه فان دالة الإمكان تكون بالصيغة الأتية

$$L(\mu,\Sigma \mid data, \sigma^2) \propto |\Sigma|^{-(\frac{1}{2})} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)\right\} |\Sigma|^{-(\frac{n'}{2})} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} tr\Sigma^{-1}A\right\} \ldots\ldots\ldots(1)$$

وباستعمال نظرية بيز يمكن أيجاد التوزيع اللاحق لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ المشروط بـ σ^2 وكالاتي

$$f(\underline{\mu} \mid data, \sigma^2) \propto L(\underline{\mu},\Sigma \mid, \sigma^2)\, p(\underline{\mu})$$

وبعد دمج التوزيع الأولي لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ مع دالة الإمكان وأجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على دالة التوزيع اللاحق والمعرفة في ادناه (اللهيبي، 2010)[2] :-

$$f(\underline{\mu} \mid data) = \frac{(n)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)}{(v\pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{n}{v}(\underline{\mu} - \underline{\bar{x}})' \Sigma^{-1} (\underline{\mu} - \underline{\bar{x}})\right]^{-\frac{v+p}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

نلاحظ من المعادلة أعلاه أنها تمثل توزيع t المتعدد المتغيرات بمَعلمات $(\underline{\bar{x}}, \frac{1}{n}\Sigma, v)$

لذلك فان مقدر بيز لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ هو $\underline{\bar{X}}$ وان هذا المقدر غير متحيز لان $E\,\underline{\bar{x}} = \underline{\mu}$

ثانيا:- عندما يكون μ معلوم و Σ غير معلومة

باتباع الاسلوب نفسه المستخدم في اولا يتم ايجاد التوزيع اللاحق لمصفوفة التباين Σ وهو (اللهيبي، 2010)[2]

$$f(\Sigma|data) = \Sigma^{-1}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \left[1+\frac{tr\Sigma^{-1}\left[A+n(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}})(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}})'\right]}{v}\right]^{-\frac{v}{2}} \quad ....(3)$$

ما دام أن التوزيع اللاحق لـ Σ والمعرف في المعادلة أعلاه ليس مـن التوزيعـات الاحتماليـة الشائعة ولصعوبة أيجاد(E(μ | data لذلك تم أيجاد مقدر لـ Σ الذي يجعل دالة كثافة الاحتمـال اللاحقة لـΣ اكبر ما يمكن والمتمثل بمنوال التوزيع اللاحق

(Mode of posterior of distribution) (الخالدي ،2005) [1] .

لذلك فان مقدر بيز غير المشروط لـΣ يمكن إيجاده من التفاضل الجزئي للوغاريتم الطبيعي للمعادلة (3) بالنسبة إلى Σ ومساواتها بمصفوفة صفرية وحلها لنحصل على

$$\hat{\Sigma}_{B_{i+1}} = \frac{\hat{\Sigma}_{B_i}^{-1}A}{(n+2)|\hat{\Sigma}_{B_i}|\left|\hat{\Sigma}_{B_i}+\frac{1}{v}A\right|} \quad ....\ (4)$$

يتم أيجاد المقدر الأمثل باختيار مصفوفة ابتدائية لـ $\hat{\Sigma}_{B_i}$ وتعويضها في الطرف الأيمن من المعادلة (4) لنحصل على $\hat{\Sigma}_{B_i}$ في المرحلة التكرارية الأولى، ومرة أخرى نعوضها في الطرف الأيمن لنحصل على $\hat{\Sigma}_{B_i}$ في المرحلة التكرارية الثانية، وهكذا نستمر إلى أن يصبح الفرق بين $|\hat{\Sigma}_{B_{i+1}}| - |\hat{\Sigma}_{B_i}|$ كمية صغيرة جداً مقاربة لمقدار الخطا المسموح به (0.001) فإذا تحقق هذا الشرط فان مقدر بيز هو $\hat{\Sigma}_B = \hat{\Sigma}_{B i+1}$

ثالثا:- عندما يكون كل من $\underline{\mu}$ **و Σ غير معلومين**

يوصف التوزيع الأولي القليل المعلومات بالصيغة الاتية $p(\mu,\Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{P+1}{2}}$ (Marchev&Hobert,2008) [11].

وباستعمال نظرية بيز يمكن أيجاد التوزيع اللاحق المشترك لـ $\underline{\mu}$ و Σ

$$f(\underline{\mu},\Sigma|data\ ,\sigma^2) \propto L(\underline{\mu},\Sigma|,\sigma^2)\, p(\underline{\mu},\Sigma)$$

وبعد دمج التوزيع الأولي المشترك لـ $\underline{\mu}$ وΣ مع دالة الإمكان وأجراء بعض العمليات الرياضية يكون التوزيع اللاحق المشترك مابين $\underline{\mu}$ وΣ غير المشروط بـ σ^2 وهو

$$f(\underline{\mu},\Sigma|\ data)=\frac{(n)^{\frac{p}{2}}\ |S|^{\frac{n'}{2}}\ (\frac{v}{2})^{-(\frac{n'+p}{2})}\ \Gamma\left(\frac{v+n'+p}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\ (2)^{\frac{n'p}{2}}\ \Gamma_p(\frac{n'}{2})\ \Gamma(\frac{v}{2})}\ |\Sigma|^{-\frac{n'+p+2}{2}}$$
$$*\left[1+\frac{tr\,\Sigma^{-1}A+n(\overline{\underline{x}}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\overline{\underline{x}}-\underline{\mu})}{v}\right]^{-\frac{v+n'+p}{2}}$$

ولإيجاد التوزيعات الحدية اللاحقة لكل من Σ و$\underline{\mu}$ غير المشروط بـ σ^2 تكون معرفة وفق المعادلتين الاتيتين

$$f(\Sigma|\ data)=\frac{|A|^{\frac{n'}{2}}\ (\frac{v}{2})^{-(\frac{n'+p}{2})}\ \Gamma\left(\frac{v+n'}{2}\right)}{(2)^{\frac{n'p}{2}}\ \Gamma_p(\frac{n'}{2})\ \Gamma(\frac{v}{2})}\ |\Sigma|^{-(\frac{n'+p}{2})}\left[1+\frac{tr\,\Sigma^{-1}A}{v}\right]^{-\frac{v+n'}{2}}\qquad ....(5)$$

والتوزيع الحدي اللاحق لـ $\underline{\mu}$

$$f(\underline{\mu}|\ data)=\frac{(2n)^{\frac{p}{2}}\ \Gamma_p(\frac{n-1}{2})\ (\frac{v}{2})^{(\frac{p+n-np-1}{2})}\ \Gamma\left(\frac{p+n-np+v-1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{p}{2}}\ \Gamma_p(\frac{n}{2})\ \Gamma(\frac{v}{2})}$$
$$*|A|^{-\frac{n-1}{2}}\ |A+n(\overline{\underline{x}}-\underline{\mu})(\overline{\underline{x}}-\underline{\mu})'|^{-\frac{n}{2}}\qquad ......(6)$$

حيث ان $n'=n-1$

وان مقدر بيز لمتجه المتوسط لـ $\underline{\mu}$ والذي يمثل $\hat{\underline{\mu}}_B=\overline{\underline{x}}$ وان هذا المقدر غير متحيز لان $E\,\overline{\underline{x}}=\underline{\mu}$. اما مقدر بيز لـ $\sum$ والمعرف في أدناه

$$\hat{\Sigma}_B=\frac{A}{n+p-1}$$

وهو مقدر متحيز، بسبب أن $E(\hat{\Sigma}_B)=E\,\frac{A}{n+p-1}\neq\frac{A}{n-1}$

الحالة الثانية :- التوزيعات اللاحقة لمعلمات توزيع t المتعدد بالاعتماد على المعلومات الاولية الخبرية

اولا:- عندما تكون Σ معلومة و $\underline{\mu}$ غير معلوم .

تحت افتراض أن Σ معلومة فان التوزيع الأولي لـ $\underline{\mu}$ المشروط بـ σ^2 يوصف بالصيغة الاتية $\underline{\mu}|\Sigma,\sigma^2\sim N_P(\underline{\mu}_0,\sigma^2\Sigma_0)$

وبدمج المعلومات المسبقة حول $\underline{\mu}$ ودالة الترجيح يكون التوزيع اللاحق لـ $\underline{\mu}$ غيرالمشروط بـ σ^2 كالاتي

$$f(\underline{\mu}|data) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)\left|(n\Sigma^{-1}+k\Sigma_0^{-1})\right|^{\frac{1}{2}}}{(v\pi)^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left[1+\frac{(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)'(n\Sigma^{-1}+k\Sigma_0^{-1})(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)}{v}\right]^{-\left(\frac{v+p}{2}\right)} \quad ....(7)$$

حيث أن $\underline{\mu}^* = \frac{(n\Sigma^{-1}\underline{\bar{x}}+\Sigma_0^{-1}\underline{\mu}_0)}{(n\Sigma^{-1}+\Sigma_0^{-1})}$

نلاحظ من المعادلة (7) أنها تمثل توزيع t متعدد المتغيرات لذا فان مقدر بيز لمتجه المتوسط هو $\hat{\underline{\mu}}_B = \underline{\mu}^*$ وهو مقدر متحيز للسبب المذكور نفسه في الفقرة(3-3) ، ويلاحظ أن $\underline{\mu}^*$ يمثل المعدل الموزون الذي يتكون من جزأيين الأول يمثل متجه المتوسط للعينة الموزون بمصفوفة الدقة اللاحقة Posterior Precision والجزء الثاني يمثل متجه المتوسط الأولي الموزون بمصفوفة الدقة الأولية Prior Precision.

ثانيا:- عندما يكون $\underline{\mu}$ معلوما و Σ غير معلومة

يكون التوزيع اللاحق لـ Σ بالصيغة الاتية

$$p(\Sigma|\mu, data) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+(n'+m+1)p}{2}\right)\left(\frac{v}{2}\right)^{-\frac{(n'+m+1)p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left|A+\psi+n(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})'\right|^{-\frac{(n'+m+1)}{2}}$$

$$|\Sigma|^{-\left(\frac{n'+m+P+2}{2}\right)}\left[1+\frac{tr\,\Sigma^{-1}\left[A+\psi+n(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})'\right]}{v}\right]^{-\left(\frac{v+(n'+m+1)p}{2}\right)}$$

لذاك فان مقدر بيز لمصفوفة التباين Σ في هذه الحالة يعرف كالأتي

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{S+\psi+n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'}{n+m+p+1}$$

علما ان $S = \frac{A}{n-1}$ ، وهو أيضا مقدر متحيز للسبب المذكور في الفقرة السابقة

وأن ψ مصفوفة أكيدة الايجابية ومتماثلة ذات سعة (p*p)

ثالثا:- عندما يكون كل من $\underline{\mu}$ **و Σ غير معلومين**

أن التوزيع الأولي لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ المشروط بـ σ^2 هو توزيع طبيعي متعدد المتغيرات ويوصف بالصيغة الاتية $\underline{\mu}|\sigma^2 \sim N_p(\underline{\mu}_0, \frac{\sigma^2}{k}\Sigma)$

حيث أن k>0 والتوزيع الأولي لمصفوفة التباينΣ المشروط بـ σ^2 هو معكوس توزيع وشرت ويوصف بالشكل الأتي (Anderson ,1984)[5]

$$\Sigma|\sigma^2 \sim W^{-1}\left(\frac{\psi}{\sigma^2}, m\right)$$

بما أن $\underline{\mu}$ وΣ مستقلان عن بعضهما فان التوزيع الأولي المشترك لـ $\underline{\mu}$ وΣ المشروط بـ σ^2 يمثل حاصل ضرب دالة كثافة الاحتمال الأولية لـ $\underline{\mu}$ المشروطة σ^2 مع دالة كثافة الاحتمال الأولية لـ Σ أي أن

$$p(\mu,\Sigma \mid \sigma^2) = p(\mu \mid \sigma^2)\, p(\Sigma \mid \sigma^2)$$

$$= |\Sigma|^{-(\frac{m+p+2}{2})} \exp \; -\frac{1}{2\sigma^2}\left[k(\underline{\mu}-\underline{\mu}_0)'\Sigma^{-1}(\underline{\mu}-\underline{\mu}_0) + tr\Sigma^{-1}\psi\right] \quad \text{.........} (8)$$

وباستعمال نظرية بيز يمكن أيجاد التوزيع اللاحق المشترك لـ $\underline{\mu},\Sigma$ غيرالمشروط σ^2 وهو(اللهيبي، 2010)[2]

$$f(\underline{\mu},\Sigma \mid data) = \frac{(n+k)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{v+n'+m+p+1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{p}{2}} (2)^{\frac{(n'+m+2)p}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{|\Sigma|^{-\frac{n'+m+p+3}{2}}}{\Gamma_p\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)\left(\frac{v}{2}\right)^{\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)}} \left|\psi + A + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})'\right|^{\frac{n'+m+1}{2}}$$

$$\left[1+\frac{tr\Sigma^{-1}\left[\,(A+\psi)+\frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})'+(n+k)(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)'\,\right]}{v}\right]^{-(\frac{v+n'+m+p+1}{2})} \quad \text{..........} (9)$$

والتوزيعات اللاحقة الحدية لكل من $\underline{\mu}$ وΣ ومعرفة على وفق المعادلتين الآتيتين

$$f(\Sigma \mid data) = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{-(\frac{n'+m+1}{2})} \Gamma\left(\frac{v+n'+m+1}{2}\right)}{(2)^{\frac{(n'+m+1)p}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n'+m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} |\Sigma|^{-(\frac{n'+m+p+2}{2})} \left|\psi + A + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})'\right|^{-\frac{n'+m+1}{2}}$$

$$\left[1+\frac{tr\Sigma^{-1}(\psi + A + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})')}{v}\right]$$

$$f(\underline{\mu} \mid data) = \frac{(n+k)^{\frac{p}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n'+m+2}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n'+m+p+1-(n'+m+2)p}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)^{\left(\frac{n'+m+p+1-(n'+m+2)p}{2}\right)}} \left|\psi + A + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})'\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[1+(n+k)(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)' \left[\psi + A + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0-\underline{x})(\underline{\mu}_0-\underline{x})'\right](\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)\right]^{-(\frac{n'+m+2}{2})}$$

ان مقدر بيز لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ و Σ هما كالأتي $\underline{\mu}_B = \underline{\mu}^* = \dfrac{n\underline{\overline{x}} + k\underline{\mu}_0}{(n+k)}$

وان هذا المقدر متحيز

وكذلك فان مقدر بيز لمصفوفة التباين $\sum$ يعرف كما يأتي

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{A + \psi + \frac{nk}{n+k}(\underline{\mu}_0 - \underline{\bar{x}})(\underline{\mu}_0 - \underline{\bar{x}})'}{n + m + p + 1}$$

وهو مقدر متحيز للسبب المذكور في الفقرة السابقة

(3) اختبار الفرضيات البيزية

Bayesian Hypothesis Testing

يسمى المعيار المستخدم في اختبار الفرضيات بأسلوب بيز بعامل بيز (Bayes factor) الذي يمكن تعريفه على انه يمثل الارجحية أو الأفضلية بين فرضيتين والذي ينتج من قسمة الاحتمالات اللاحقة إلى الأولية بالنسبة الى فرضية العدم H_0 مقسوماً على حاصل قسمة الاحتمالات اللاحقة إلى الأولية بالنسبة الى الفرضية البديلة H_1، ومن ثم فانه باستعمال التعريف يمكننا اشتقاق صيغة لهذا المقدار وكما يأتي:

لنفرض أن هنالك فرضيتين H_0و H_1 والمطلوب اختبار الفرضية H_0 مقابل الفرضية H_1 باستعمال أسلوب بيز فانه يستوجب تحديد كل من الاحتمالات الأولية لـ H_0و H_1 قبل اخذ أية مشاهدة ويرمز لها بالرمز $P(H_0)$ و $P(H_1)$ على الترتيب، ونرمز للبيانات الماخوذه من نتائج التجربة بـ D ولذلك فانه باستعمال نظرية بيز يمكن أيجاد الاحتمالات اللاحقة لكل من H_0وH_1 وفق المعادلتين الآتيتين

$$P(H_0|D) = \frac{P(D|H_0)P(H_0)}{P(D|H_0)P(H_0) + P(D|H_0')P(H_0')} \qquad .... (9)$$

$$P(H_1|D) = \frac{P(D|H_1)P(H_1)}{P(D|H_1)P(H_1) + P(D|H_1')P(H_1')} \qquad .... (10)$$

وبموجب تعريف عامل بيز فان

$$BF = \frac{P(H_0|D)/P(H_0)}{P(H_1|D)/P(H_1)} \qquad .... (11)$$

وبتعويض المعادلتين (9)و(10) في المعادلة(11) نحصل على صيغة نهائية لعامل بيز والمعرفة في المعادلة أدناه

$$BF = \frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)} \qquad .... (12)$$

ولقد قام (Jefferys,1961) [9] بتقديم جدول يوضح فيه الأفضلية لمصلحة H_0 كما في الجدول (I) الأتي

الجدول (I) يوضح قيم BF لتفضيل H_0

$BF>1$	مؤشر يؤيد الفرضية H_0
$10^{-2}< BF<1$	مؤشر ضعيف جدا ضد الفرضية H_0
$10^{-1}< BF<10^{-1/2}$	مؤشر معتدل لمصلحة فرضية H_0
$10^{-2}< BF<10^{-1}$	مؤشر قوي إلى قوي جداً ضد الفرضية H_0
$BF<10^{-2}$	مؤشر حاسم ضد الفرضية H_0

ويمكن اعتبار عامل بيز(Bayes factor) BF مؤشراً إحصائياً لقبول H_0 أو رفضها وهو يمثل المختبر الإحصائي بالأسلوب الكلاسيكي، وألان نتطرق إلى اختبار الفرضيات حول مَعلمات توزيع t متعدد المتغيرات باستعمال أسلوب بيز، لذلك فانه يستوجب أيجاد قيمة عامل بيز لكل اختبار حول الفرضية المدروسة ومقارنة تلك القيمة بالقيم التي وضعها جيفريز المبينة في الجدول (I) المذكور انفاً والتي تحدد فيما إذا كانت الأفضلية بقبول H_0 أو رفضها، سوف تتم مناقشة اختبار الفرضيات وكالآتي

أولا: اختبار الفرضيات حول المتوسط

1. اختبار فرضية بسيطة ضد فرضية مركبة عندما تكون مصفوفة التباين $\sum$ غير معلومة

أي اختبار الفرضية $H_0:\mu=\mu_0 \quad v.s \quad H_1:\mu\neq\mu_0$

في هذه الحالة تكون صيغة عامل بيز بالشكل الآتي

$$BF=\frac{\int_{\Sigma} P(D|\mu=\mu_0)\,p(\Sigma)}{\int_{H_1} p(D|\mu)\,P(\mu)\,p(\Sigma)\,d\Sigma\,d\mu}$$

$$=\left[\frac{(n+k)}{k}\right]^{\frac{p}{2}}\left[\frac{\left|A+\psi+\frac{nk}{n+k}(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_{01})(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_{01})'\right|}{\left|A+\psi+n(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_{0})(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_{0})'\right|}\right]^{\frac{n+m}{2}} \quad .....(12)$$

لمزيد من التفاصيل انظر (اللهيبي، 2010)[2]

2. اختبار الفرضية اعلاه عندما تكون مصفوفة التباين $\sum$ معلومة

في هذه الحالة تكون صيغة عامل بيز بالصيغة الآتية:

$$BF = \frac{P(D|\underline{\mu} = \underline{\mu}_0)}{\int_{H_1} p(D|\underline{\mu})P(\underline{\mu})d\underline{\mu}}$$

$$= \frac{|\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_0^{-1} + n\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\left[1 + \frac{tr\Sigma^{-1}(A + n\Sigma_0^{-1}(\Sigma_0^{-1} + n\Sigma^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_{01} - \underline{\overline{x}})(\underline{\mu}_{01} - \underline{\overline{x}})')}{v}\right]}{\left[1 + \frac{tr\Sigma^{-1}(A + n(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_0)(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_0)')}{v}\right]} \right]^{\frac{v+np}{2}} \quad ....(13)$$

لمزيد من التفاصيل انظر (اللهيبي، 2010)[2]

ثانيا:- اختبار الفرضيات حول مصفوفة التباين $\sum$

1. اختبار فرضية بسيطة مقابل فرضية مركبة عندما يكون متجه المتوسط $\underline{\mu}$ غير معلوم وتكون الفرضية بالصيغة الاتية

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \qquad v.s \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0 \qquad .....(14)$$

في هذه الحالة يمكن أعاده كتابة صيغة عامل بيز بالصيغة الاتية

$$BF = \frac{P(D|\Sigma = \Sigma_0)}{\int_{H_1} p(D|\Sigma \neq \Sigma_0)P(\Sigma)d\Sigma}$$

$$= \frac{\Gamma_p\left(\frac{v+np}{2}\right)\Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)|\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma_p\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma_p\left(\frac{n+m}{2}\right)(v)^{\frac{np}{2}}|\psi|^{\frac{m}{2}}} \frac{\left|A + \psi + \frac{nk}{n+k}(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_{01})(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_{01})'\right|^{\left(\frac{n+m}{2}\right)}}{\left[1 + \frac{tr\Sigma_0^{-1}(A + n(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_{01})(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}_{01})')}{v}\right]^{\frac{v+np}{2}}} \quad ....(15)$$

وتحت شرط أن $m \geq p$ لمزيد من التفاصيل انظر (اللهيبي، 2010)[2]

2. اختبار الفرضية اعلاه عندما يكون متجه المتوسط $\underline{\mu}$ معلوماً

في هذه الحالة تكون صيغة عامل بيز لاختبار الفرضية المعرفة في المعادلة (14) معرفة أدناه (اللهيبي، 2010)[2]

$$BF = \frac{\Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+np}{2}\right)|\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}}\left|A + \psi + n(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu})(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu})'\right|^{\left(\frac{n+m}{2}\right)}}{(v)^{\frac{np}{2}}\Gamma_p\left(\frac{m+n}{2}\right)|\psi|^{\frac{m}{2}}\left[1 + \frac{tr\Sigma_0^{-1}\left[A + n(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu})(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu})\right]}{v}\right]^{\left(\frac{v+np}{2}\right)}} \quad ....(16)$$

وأيضا تحت شرط أن $m \geq p$

(4) الجانب التطبيقي

في هذا الجانب تم تطبيق ما توصلنا إلية في المبحثين الثاني والثالث على المقاييس الولادية للاطفال الحديثي الولادة بخمسة متغيرات والمتمثلة (الطول، الوزن، محيط الرأس، محيط الصدر، محيط الذراع) عند الأطفال الحديثي الولادة في مدينة الموصل ، وان هذه المقاييس أخذت بأجهزة

خاصة بهدف الدقة لتلك القياسات فالوزن بالكيلو غرام أما المتغيرات الأخرى فبالسنتمترات، وقد استخدمت جزءاً من بيانات (جليل واخرون، 2005)[3] والمتمثلة بقياسات المتغيرات لـ (60) طفل حديثي الولادة في مدينة الموصل بمستشفى الخنساء وقسمت العينة على قسمين الأول يمثل الأطفال الذكور الحديثي الولادة، والثاني يمثل الأطفال الإناث الحديثات الولادة وهذه المتغيرات هي

X_1: وزن الجسم ، X_2: طول الجسم ، X_3 : محيط الرأس ، X_4 : محيط الصدر

X_5 : محيط الذراع

من أجل أجراء اختبار بعض الفرضيات بأسلوب بيز، يستوجب الامر أيجاد قيمة عامل بيز الذي يمثل الاختبار الإحصائي للفرضية المطلوب اختبارها مع مقارنة قيمة عامل بيز مع القيم التي وضعها العالم البريطاني (Jefferys,1961) [9] الموضحة في الجدول (I) إذ سيتم من خلالها رفض أو قبول الفرضية، سوف نجري اختبار الفرضيات حول متجه المتوسط لمجتمع واحد ومصفوفة التباين وكالاتي:-

أولا:- اختبار الفرضيات حول متجه المتوسط مجتمع الذكور الحديثي الولادة

لنفرض أننا نرغب في اختبار الفرضية الاتية (اللهيبي، 2010)[2]

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 50.5 \\ 35 \\ 33 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad H_1 : \underline{\mu}_1 \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 50.5 \\ 35 \\ 33 \\ 12 \end{bmatrix}$$

أن قـــيم عناصـــر المتجـــه $\underline{\mu}_0$ تمثـــل معـــدلات القياســـات الطبيعيـــة للمتغيـــرات المدروسة، **سوف نناقش الحالتين الآتيتين**

1. عندما تكون مصفوفة التباين Σ غير معلومة

قبل إجراء الاختبار يجب أن نعرف التوزيع الأولي لمتجه المتوسط $\underline{\mu}_1$ وكذلك التوزيع أولي لمصفوفة التباين Σ فقد وصفنا التوزيعين بـ $\underline{\mu}_1 | \sigma^2 \sim N_p(\underline{\mu}_{01}, \frac{\sigma^2}{k}\Sigma)$ وان المتجه $\underline{\mu}_{01}$ يعرف كالآتي

$$\underline{\mu}_{01} = [2.77 \quad 46.86 \quad 31.45 \quad 29.48 \quad 9.16]'$$

K تمثل قيمة ثابتة ولتكن تساوي (2)

$$\Sigma | \sigma^2 \sim W^{-1}(\frac{\psi}{\sigma^2}, m)$$

وان معلمة القياس تتوزع وفقا إلى $\sigma^2 \sim IG(\frac{v}{2},\frac{v}{2})$ وبافتراض أن v=5

وبفرض أن m=4 وان ψ معرفة بالشكل الآتي:

$$\psi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.25 \end{bmatrix}$$

وقد تم استعمال برنامج (Matlab 6.5) في حساب حدود صيغة عامل بيز لاختبار هذه الفرضية والمعرفة بالمعادلة (12)، لذلك فان

$$BF = (\frac{32}{2})^{\frac{5}{2}} (\frac{1.408 * 10^{5}}{5.339 * 10^{5}}) = 4.394 * 10^{-25}$$

بمقارنة قيمة BF السابقة مع القيم المعرفة في الجدول (I) فإن هذا يدل على وجود مؤشر حاسم ضد H_0 لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 وهذا يدل على أن قيمة المتوسط لمجتمع الذكور لايعود إلى معدلات القياسات الطبيعية بالرغم من وجود معلومات مسبقة حول ذلك المتجه والمتمثلة بمتجه $\underline{\mu}_{01}$.

2. عندما تكون Σ معلومة:-

قبل تطبيق صيغة عامل بيز لهذه الفرضية نعرف المصفوفة Σ تحت افتراض أنها معلومة القيمة وبالشكل الأتي:-

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.6 & 3.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ & 40.6 & 28.9 & 0 & 0 \\ & & 23.5 & 0 & 0 \\ & & & 55.4 & 0 \\ & & & 0 & 5.5 \end{bmatrix}$$

وكذلك نعرف ان التوزيع أولي لمتجه المتوسط $\underline{\mu}_1$ وبالشكل الأتي

$\underline{\mu}_1 | \sigma^2 \sim N_p(\underline{\mu}_{01}, \sigma^2\Sigma_{01})$ ، لان التوزيع أولي لمتجه المتوسط يختلف مَعلماته عندما Σ معلومة وعنه عند كون Σ غير معلومة، فقد عرفنا Σ_{01} كالاتي (اللهيبي، 2010)[2]

$$\Sigma_{01} = \begin{bmatrix} 0.890 & 4.991 & 4.046 & 5.189 & 2.003 \\ & 43.600 & 30.982 & 48.419 & 16.088 \\ & & 25.886 & 34.326 & 11.675 \\ & & & 60.477 & 18.404 \\ & & & & 6.40 \end{bmatrix}$$

وباستعمال المعادلة (13) فان عامل بيز يساوي

$$BF = \left(\frac{80.116}{7548.8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(1+\frac{57.905}{5})}{(1+\frac{5.858}{5})}\right]^{-\frac{5+30(5)}{2}} = 1.93 * 10^{-60}$$

القرار:- نلاحظ أن قيمة عامل بيز أعلاه تقع ضمن المدى القيم الجدول (I) والتي تؤكد على وجود مؤشر حاسم ضد H_0 وبذلك ترفض H_0 وتقبل H_1، وهذا يدل على أن قيمة المتوسط لاتعود إلى معدلات القياسات الطبيعية بالرغم من وجود مَعلمات مسبقة حول المَعلمات متمثلة بمصفوفة التباين Σ_{01} وقيمة المتوسط $\underline{\mu}_{01}$.

ثانياً :- اختبار الفرضيات حول متجه المتوسط لمجتمع الإناث الحديثات الولادة

لاختبار الفرضية المتعلقة بمتجه المتوسط (اللهيبي، 2010)[2]

$$H_0 : \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 49 \\ 34.5 \\ 31 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad H_1 : \underline{\mu} \neq \begin{bmatrix} 3.25 \\ 49 \\ 34.5 \\ 31 \\ 11 \end{bmatrix}$$

سوف نناقش الحالتين الآتيتين

1. عندما تكون Σ غير معلومة

نعرف ان التوزيع أولي لمتجه المتوسط $\underline{\mu}_2$ كذلك ان التوزيع أولي لمصفوفة التباين Σ لمجتمع الاناث $\underline{\mu}_2|\sigma^2 \sim N_5(\underline{\mu}_{02}, \frac{\sigma^2}{k}\Sigma)$

حيث أن k=2 و $\underline{\mu}_{02} = [2.44 \quad 45.64 \quad 30.98 \quad 28.35 \quad 8.47]'$

وكذلك نعرف ان التوزيع أولي لمصفوفة التباين والتباين المشترك $\Sigma|\sigma^2 \sim W^{-1}(\frac{\psi}{\sigma^2}, m)$

بفرض m=4 و ψ معرفة بالشكل أدناه

$$\psi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5 & 0 & 0 \\ & & & 8.5 & 0 \\ & & & & 2.67 \end{bmatrix}$$

وان v=5 ، $\sigma^2 \sim IG\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$،

لذلك فان قيمة عامل بيز بهذه الفرضية والمعرفة بالمعادلة (15) يكون كالأتي

$$BF = \left(\frac{32}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1.1853 * 10^{5}}{4.4247 * 10^{6}}\right]^{\frac{34}{2}} = 1.494 * 10^{-22}$$

نلاحظ أن قيمة عامل بيز أعلاه تقع ضمن المدى القيم الجدول (I) والتي تؤكد على وجود مؤشر حاسم ضد H_0 وبذلك يتم رفض H_0 وقبول H_1، معنى ذلك أن قيمة متجه المتوسط لمجتمع الإناث

لايعود إلى معدلات القياسات الطبيعية مع وجود معلومات مسبقة حول معلمة المتجه المتوسط ومعرفة بـ $\underline{\mu}_{02}$.

2. عندما تكون Σ معلومة

تحت هذا الافتراض فان التوزيع أولي لـ $\underline{\mu}_2$ يكون وفقاً إلى

$\underline{\mu}_2|\sigma^2 \sim (\underline{\mu}_{02}, \sigma^2 \Sigma_{02})$ ،حيث أن Σ_{02} تعرف كالأتي

$$\Sigma_{02} = \begin{bmatrix} 0.491 & 0.711 & 1.393 & 1.955 & 1.069 \\ & & 1.858 & 3.451 & 1.299 \\ & & 6.410 & 6.985 & 2.921 \\ & & & 9.575 & 4.650 \\ & & & & 2.971 \end{bmatrix}$$

وكذلك نعرف قيمة Σ (لكونها معلومة) وبالشكل أدناه:- (اللهيبي، 2010)[2]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.61 & 0 & 0 & 0 \\ & 9.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ & & 5.4 & 0 & 0 \\ & & & 8 & 0 \\ & & & & 2.5 \end{bmatrix}$$

نجد قيمة عامل بيز لاختبار هذه الفرضية والمعرف بالمعادلة (16) تساوي ($2.20*10^{-81}$) ، ولذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 لان BF تقع ضمن المدى القيم التي تؤكد على وجود مؤشر حاسم ضدH_0 كما في الجدول (I) .

ثالثا: اختبار الفرضيات حول مصفوفة التباين والتباين المشترك

أ- لمجتمع الذكور ألحديثي الولادة

نفرض أننا نرغب في اختبار الفرضية الآتية (اللهيبي، 2010)[2]

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \qquad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$$

- وأن Σ_0 معرفة كالاتي

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1.381 & 5.702 & 5.439 & 7.144 & 3.072 \\ & 53.7 & 32.84 & 51.87 & 17.387 \\ & & 32.296 & 41.311 & 14.596 \\ & & & 70.052 & 23.054 \\ & & & & 9.371 \end{bmatrix}$$

لاختبار هذه الفرضية نناقش الحالتين الآتيتين:-

1. عندما يكون $\underline{\mu}_1$ غير معلوماً

أن التوزيع الاولي لمتجه $\underline{\mu}_1$ الذي عرف في اختبار الفرضية $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ عندما تكونΣ معلومة، فان قيمة عامل بيز المعرف بالمعادلة (19) والتي تساوي $1.44*10^5$ وهذه القيمة اكبر من 1 ومن ثم فإننا نقبل H_0 .

2. عندما يكون $\underline{\mu}_1$ معلوماً

من اجل أيجاد حدود صيغة عامل بيز لهذه الفرضية فقد استخدم البرنامج (Matlab 6.5) للحصول على قيم دالة كاما، وتكون قيمته عامل بيز المعرف في المعادلة (20) تكون قيمته $1.23*10^{-20}$ ، وبذلك يتم رفض H_0 وقبول H_1 لان قيمةBF أعلاه تقع في مدى قيم الجدول(I) والتي تؤكد على وجود مؤشر حاسم ضد H_0

ب- لمجتمع الإناث الحديثي الولادة

نفترض أننا نرغب في اختبار الفرضية الآتية

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \qquad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$$

سوف نناقش الحالتين الآتيتين:-

1. عندما يكون $\underline{\mu}_2$ غير معلوم

في هذه الحالة يمكن أن نعرف التوزيع الاولي لمتجه $\underline{\mu}_2$ وهو

$$\underline{\mu}_2 \mid \sigma^2 \sim N_5(\underline{\mu}_{02}, \sigma^2 \Sigma_{02})$$

وهو معرف باختبار الفرضية الخاصة بمتجه المتوسط $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ (عندما Σ معلومة)، وحسبت قيمة عامل بيز و تساوي $6.033*10^{-18}$ وبذلك يتم رفض H_0 وتقبل H_1 .

2. عندما يكون $\underline{\mu}_2$ معلوماً

وبعد حساب قيم دوال كاما وحدود عامل بيز المعرف في المعادلة (20) يمكن اختبار الفرضية اعلاه واتخاذ قرار قبولها أو رفضها، حيث يتم رفض H_0 وقبول H_1 لان قيمة عامل بيز لهذه الفرضية والتي تساوي $1.831 * 10^{-54}$ وهي ضمن المدى المحدد في الجدول (I) والتي تؤكد على وجود مؤشر حاسم ضد H_0 .

(5)الاستنتاجات و التوصيات

أولا: الاستنتاجات Conclusions

1. أن التوزيعات السابقة غير المشروطة بـ σ^2 لمصفوفة التباين Σ تنتمي إلى نفس عائلة التوزيعات اللاحقة غير المشروطة ، وعلية يمكن ضم تلك التوزيعات إلى جدول العوائل المتآلفة.
2. عندما تكون Σ معلومة فان التوزيع اللاحق لـ $\underline{\mu}$ يتبع توزيع t متعدد المتغيرات في حالة توافر معلومات أولية خبرية وغير خبرية حول ذلك المتجه .
3. من خلال التطبيق العملي اتضح انه لاتوجد اختلافات جوهرية بين الذكور والإناث الحديثي الولادة في جميع المقاييس المدروسة .

ثانياً: التوصيات Recommendations

1. أيجاد دوال التوزيعات الاحتمالية اللاحقة لمعلمات توزيع t المتعدد المتغيرات عندما تكون معلمة الشكل (v) غير معلومة .
2. عندما تكون التوزيعات الاحتمالية اللاحقة لمعلمات توزيع t المتعدد من عوائل التوزيعات غير الشائعة، نوصي باستخدام معاينة جبس أو إحدى طرائق التكامل العددي لإيجاد مقدرات بيز لتلك المعلمات مع دراسة خصائص تقدير تلك المقدرات.

(6) المصادر

أولاً: المصادر العربية

1. الخالدي، زيد طارق صالح ، (2005):"**حول مرشح كالمن**" ، رسالة ماجستير، كليـة علـوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.
2. اللهيبي ، معتز صلاح غانم ،(2010): " **تقدير الإمكان الأعظم وأسلوب بيـز فـي تطبيـق اختبار T^2 على عينة من الاطفال حديثي الولادة – دراسة مقارنة " ،** رسالة ماجستير، كليـة علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.
3. جليل ، طالب شريف والعاني، بان غانم وعادل، مي محمد ،(2005)، "**استخدام لوحة بيـز لعدد المعيب على معدلات القياسات للأطفال حـديثي الـولادة** "، المجلـة العراقيـة للعلـوم الإحصائية ، العدد السابع ، المجلد الخامس، ص(29-43).
4. حمود،محمد احمد مرشد، (2005)، "**التفضيل في أسلوب بيز** " ، رسالة ماجستير، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

ثانياً: المصادر الأجنبية

5. Anderson, T.W.(1984), "**An Introduction to Multivariate Statistical Analysis** ", John Wiley and Sons ,U.S.A .
6. Bernarda, Jose.M, and Rueda .Raul .(2002), "**Bayesian Hypothesis testing :A Reference Approach**", the International Statistical Review, Vol .70 , No.3, P.P.351-372 .
7. Box, G.E, and Tiao, G.C. (1973), "**Bayesian Inference In Statistical Analysis** ", Addison – Wesley Publishing Company, London , U.K .
8. James Press,S. (2003),"**Subjective and Objective Bayesian statistical**"2nd , John Wiley and Sons, New Jersey, U.S.A .
9. Jeffery, H. (1961), " **Theory of Probability**", Clarenden Press, Oxford, London .U.K .
10. Joarder,A.H, and Kibria,B.M.(2006b), "**A Modest Introduction to Uncorrelated t- Model**", King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia .
11. Marchev, D., and Hobert, J.P.(2008), " **Exact Sampling from the Student- t Model** ", University of New York, U.S.A .
12. Zellner.(1976), " **Bayesian and Non Bayesian Analysis of the Regression Model with Multivariate Student- t Error**", Journal of the American Statistical Association ,Vol 71, No 354, P.P.400-405 .