المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [262-286]

# النمذجة الحركية اللاخطية والتكهن بأعداد المصابين بمرض السرطان في محافظة نينوى باستخدام اسلوب بيز

د. ريا سالم الرسام *     أسماء أيوب يعقوب**

**المستخلص:**

تم في هذا البحث نمذجة العدد التراكمي للمصابين بمرض السرطان في محافظة نينوى. هـذه الطريقة اعتمدت على أصناف من نماذج النمو الاسي($EGM_s$) واستخدام النموذج الحركـي اللاخطي العام (NLDGM), تم اخذ ثلاثة أنواع من ($EGM_s$) هي الاسي المعدل,اللوجستي و جومبرتز.واستخدمت المرتبة الأولى من سلسلة تايلر لتقريب النموذج اللاخطي الى النموذج الخطي. وكذلك تم توضيح عامل الخصم, و إيجاد توزيع التكهن والقيم المتكهن بها باستخدام اسلوب تكهن بيز.

# Non-Linear Dynamic Modelling and Morecasting in Numbers of Patients with Cancer Disease in Nineveh City by Using Bayesian Approach

**Dr. Raya Salim AL-Rassam     Asmaa Ayoob Yaqoob**

## Abstract:

This research deals with modeling cumulative number of patients with cancer disease in Nineveh Iraq. The method is based on classes of Exponential Growth Models ($EGM_s$) and uses the ideas of Non-Linear Dynamic Generalized Model(NLDGM). We take three types of ($EGM_s$); Modified exponential, Logistic and Gompertz and use the First-order Tayler series to approximate the Non-linear model to a linear model.Also this research, the discount factor has been explainy, and finding forecast distribution and forecast values by using Bayesian forecasting Approach.

* أستاذ مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل.
** ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل.

تاريخ التسلم :2011/10/1 ـــــــــ تاريخ القبول : 21/ 12/ 2011

## 1- مقدمة introduction

لقد نال اسلوب النمذجة(Modelling) اهتماماً كبيراً في العديد من المجالات العلمية المختلفة, وذلك للتفسير الذي يقدمه للظاهرة المدروسة عن طريق بناء النموذج لتلك الظاهرة. والنموذج هو منظومة معادلات تنظم المعلومات المطلوبة لتمثيل الظاهرة المدروسة وان السبب الأساسي للنمذجة هو التزود بالتعلم الكفوء للعمليات التي تزودنا بالفهم واتخاذ القرارات الحكيمة. وعند اكتمال عملية النمذجة وبناء النموذج بالشكل الملائم للظاهرة فان ذلك يساعد على إجراء عملية التكهن بالمستقبل. إذ يعد التكهن (Forecasting) من المسائل المهمة لبناء وتصور ما ستكون عليه الظاهرة في المستقبل. وان الهدف من التكهن هو تقليل المخاطر عند اتخاذ القرار، فكلما كانت دراسة الظاهرة دقيقة كان التكهن إلى حد ما صحيحاً ومن ثم يكون القرار المأخوذ أكثر دقة .

ونظراً للأهمية البالغة للتكهن فقد ظهرت العديد من الأساليب للتكهن بالسلوك المستقبلي للظواهر وعلى وجه الخصوص تلك الظواهر التي تكون بياناتها كسلسلة زمنية. فعندما نتعامل مع بيانات زمنية حقيقية فأن تدفق المعلومات يكون حركياً. وان استخدام نماذج ثابتة لوصف نشاط النظام الحركي الذي يتغير مع الزمن لن يكون قادراً على وصف الخاصية الحركية للنظام ومن ثم يكون التكهن ضعيفاً. لذا فقد عني الباحثان وانصب جهدهم على تحسين أساليب التكهن والتغلب على مساوئ استخدام النماذج الثابتة للأنظمة الحركية، فقد قام الباحثان Harrison and Stevens عام 1976 بوضع أصناف من النماذج الحركية الخطية (Dynamic Linear Models) (DLMs) والتي تشترط ان يكون توزيع المشاهدات والمعلمات للنموذج هو التوزيع الطبيعي وتطوير اسلوب للتكهن يستند الى أساسيات إحصاء بيز(Bayesian statistic) اطلق على اسلوب التكهن هذا بتكهن بيز ( Bayesian forecasting).ومن ثم في عام 1985 قام الباحثون(West, et. al) بتعميم نموذج Harrison and Stevens إلى حالة التوزيعات غير الطبيعية ولكن يشترط ان يكون التوزيع ينتمي الى العائلة الاسية, وسمي هذا النموذج بالنموذج الحركي الخطي العام ( Dynamic Generalized Linear Model)(DGLM) .

ولأهمية موضوع النمذجة والتكهن يتم في هذا البحث النمذجة والتكهن بأعداد المصابين بمرض السرطان في محافظة نينوى. حيث أصبح مرض السرطان موضع اهتمام الباحثين ولاسيما في الآونة الأخيرة, فقد اجريت دراسات عديدة في مختلف أنحاء العالم تضمنت الوجوه المختلفة لمرض السرطان وأهميته. وان السرطان وصف منذ القدم, اذ وصف الفيلسوف اليوناني أبو قراط Hippocrates (400 ق.م) عددا من أنواع الأمراض السرطانية

وهو أول من أطلق على هذا المرض تسمية الـسرطان (The Cancer) (الحـسني,2005). ويعرف السرطان على انه مجموعة من الأمراض تـؤثر في وحدات الجسم الأساسية ويحدث السرطان عندما تصبح الخلايا شاذة (غير طبيعية) وتنقسم بدون سيطرة وتستمر هذه الخلايـا بالنمو والانقسام إلى أن تشكل كتلة تسمى بالورم (الحديدي,2005). ولكون مرض الـسرطان من الأمراض المتنامية لذا فان عملية النمذجة والتكهن للعدد التراكمي للمصابين بهذا المرض تمت بالاعتماد على أصناف من نماذج النمو الاسية Exponential Growth Models التي تم إدخالهـا إلـى النمذجـة الحركيـة البيزيـة مـن قبـل البـاحثين Gamerman and (Migon,1991) ,كما طبقت فكرة النمذجة الحركية اللاخطية باستخدام النمـاذج الحركيـة اللاخطية العامة, وقد تضمن هذا البحث خمس فقرات, الفقرة الأولى تم فيها توضـيح مقدمـة عامة عن الموضوع, اما الفقرة الثانية فقد تضمنت توضيح نماذج النمو والثالثة تم فيها تعريف النموذج الحركي اللاخطي العام والرابعة توضح عملية النمذجة والتكهن لمرضى السرطان اما الخامسة فتضمنت تطبيق نتائج عملية النمذجة والتكهن ومناقشة هذه النتائج.وان البيانات اخذت من السجلات الرسمية لدائرة صحة نينوى وكانت متمثلة بأعداد الإصابات والوفيات وتم منهـا حساب العدد التراكمي والمستخدم في دراستنا وللسنوات 1980-2010.

## 2- نماذج النمو Growth Models

تعد نماذج النمو من المواضيع المهمة التي لها تطبيقات واسـعة فـي العلـوم التطبيقيـة والطبيعية كالاقتصاد والطب والصناعة وغيرها من العلوم الأخرى. ان أول من اقترح نماذج النمو هو الباحث (Verhulst,P.F)عام 1845 (طه,1994). وان من أكثـر نمـاذج النمـو الشائعة الاستعمال هي:

### 1. النموذج الاسي المعدل البسيط Simple modified exponential model

لهذا الأنموذج الصيغة الآتية:(meade,1985)

$$X_t = a - c\exp(-bt)$$

إذ أن:

$t$ تمثل الزمن و $a$ تمثل الحد الأعلى لـ $X_t$ وتسمى مستوى الإشـباع Saturation level وان $b$ و $c$ ثوابت موجبة.

### 2. النموذج اللوجستي Logistic Model

ان أول من أشار إلـى النمـوذج اللوجـستي وناقـشه بـشكل تفـصيلي هـو الباحـث (Verhulst,P.F) ولهذا النموذج الصيغة الآتية:

$$X_t = \frac{a}{1 + c\exp(-bt)}$$

**3. نموذج جومبرتز** Gompertz model

ولهذا النموذج الصيغة الآتية:

$$X_t = a\exp\left(-c\exp\left(-bt\right)\right)$$

وبعد ذلك طور نماذج النمو (Gregg ,J.V) في عام 1964 فقد قام بصياغة أنمـوذج للنمو اطلق عليه اسم النموذج الاسي المعـدل (modified exponential model) ويعـرف هذا النموذج بالصيغة الآتية:

$$u_t = a_1 + a_2\, a_3^t$$

إذ أن $0 < a_3 < 1$ وان $a_1$ و $a_2$ ثوابت.

ولإيجاد نموذجي جومبرتز واللوجستي بالاعتماد على النموذج الاسي المعـدل يـتم ذلـك كالآتي:

يمكن الحصول على النموذج اللوجستي باستخدام تحويل $u_t = X_t^{-1}$ وبهذا يكـون النمـوذج اللوجستي له الصيغة الآتية:

$$X_t^{-1} = a_1 + a_2\, a_3^t \quad \Rightarrow X_t = \left(a_1 + a_2\, a_3^t\right)^{-1}$$

أما بالنسبة إلى نموذج جومبرتز نفرض ان $u_t = \ln X_t$ فيكون أنموذج جومبرتز بالصيغة الآتية:

$$\ln X_t = a_1 + a_2\, a_3^t \quad \Rightarrow X_t = \exp\left(a_1 + a_2\, a_3^t\right)$$

ويمكن كتابة نماذج النمو التي وضعها Gregg بالصيغة العامة لكل نماذج النمو الثلاثـة ويطلق عليها بنموذج النمو الاسي العـام (Generalized Exponential Growth Model) ويرمز له (GEGM) ويكتب بالصيغة الآتية: (Migon and Gamerman,1993)

$$X_t = \left(a_1 + a_2\, a_3^t\right)^{\frac{1}{\lambda^*}}$$

أي أن:

النموذج الاسي المعدل : $\lambda^* = 1$ $\quad X_t = u_t = a_1 + a_2\, a_3^t$

النموذج اللوجستي: $\lambda^* = -1$ $\quad X_t^{-1} = a_1 + a_2\, a_3^t$

نموذج جومبرتز: $\lambda^* = 0$ $\quad \ln X_t = a_1 + a_2\, a_3^t$

ان التحويل في نموذجي جـومبرتز واللوجـستي يطلـق عليـه ( Simple polynomial transformation) (Box and Cox,1964).

وتكون نماذج النمو غير خطية بالمعلمات عندما تكون $a_3$ غير معلومة لأية قيمة من قيم $\lambda^*$.

3- **النماذج الحركية اللاخطية العامة**

## Non-Linear Dynamic Generalized Models (NLDGMs)

تم استخدام النماذج الحركية في العديد من التطبيقات, وذلك للسهولة التي توفرها هـذه النماذج في تحليل الظواهر التي تتطور مع الزمن. ومن بين هذه النماذج ما يعرف بالنمـاذج الحركية اللاخطية العامة, اذ تمتلك النماذج الحركية اللاخطية مفـاهيم أوسـع مـن النمـاذج الحركية الخطية فهي الأكثر عمومية وواقعية. ولغرض تعريف النماذج الحركيـة اللاخطيـة العامة لابد من الاستناد الى استخدام نماذج العائلة الاسـية (Exponential Family) وذلـك بافتراض ان توزيع المشاهدات ينتمي إلى العائلة الاسية التي بدورها تغطي عدداً كبيـراً مـن التوزيعات. ولنفرض وجـود سلـسلة زمنيـة مـن المـشاهدات أحاديـة البعـد ( Scalar observation) $y_t$ , لها توزيع احتمالي ينتمي إلى العائلة الاسية, عندئذ فان النموذج الحركي اللاخطي العام (NLDGM) يكتب بالصيغة الآتية:-

نموذج المشاهدة
$$\begin{cases} \mathrm{P}(y_t|\eta_t,\phi_t)=b(y_t,\phi_t)\exp\{\phi_t[y_t\eta_t-a(\eta_t)]\} \\ \lambda_t=g(\eta_t)=F_t(\theta_t) \end{cases}$$

معادلة النظام
$$\theta_t=G_t(\theta_{t-1})+w_t$$

إذ أن:

$\eta_t$ : معلمة الموقع(Location parameter) أو المعلمة الطبيعية (Natural parameter) للتوزيع وهي كمية مستمرة.

$\phi_t$ : معلمة الدقة (Precision parameter) للتوزيع وهي تمثل معكوس التباين أي ان $\phi_t=\sigma_t^{-1}$ حيث $\sigma_t$ تمثل التباين, وان $\phi_t>0$.

$a(\eta_t)$ : الثابت الطبيعي (Normalizing constant) للتوزيع وهو عبارة عن دالة يفترض ان

تكون قابلة للاشتقاق على الأقل مرتين بالنسبة إلى $\eta_t$.

$g(\eta_t)$ : دالة الربط (Link function) وهي دالة معروفة وتكون قابلة للانعكاس( Invertible Function) وهي تربط بين $\mu_t$ دالة متوسـط الاسـتجابة (Mean Response Function) وتركيبة لاخطيـة هـي $\lambda_t=F_t(\theta_t)$ .اذ ان $\mu_t=\mathrm{E}(y_t|\eta_t,\phi_t)=a'(\eta_t)$ وان $a'(\eta_t)$ تمثـل المشتقة الأولى لـ $a(\eta_t)$ ولكل توزيع من التوزيعات التي تنتمي إلى العائلة الاسية لـه دالـة ربط خاصة به (see Gill,2001).

$F_t(\bullet)$ : دالة انحدار لاخطية ويجب ان تكون قابلة للاشتقاق.

$\theta_t$ : متجه المعلمات او الحالة (State or Parameter Vector) وهو ذوات بعد $(n\times1)$.

$G_t(\bullet)$: دالة لاخطية معلومة ويجب ان تكون قابلة للاشتقاق وهي تصف التطـور الزمنـي لـ $\theta_t$.

$w_t$: متجه أخطاء التطور (evolution errors vector) ذو بعد $(n \times 1)$ ويتـوزع توزيعـاً عامـاً بالـصيغة $w_t \sim (0,W_t)$ وعنـدما تكـون $\phi_t$ غيـر معلومـة فتتـوزع $w_t$ بالصيغة $w_t \sim (0,W_t\phi_t^{-1})$.

## 4- عملية النمذجة والتكهن بأعداد المصابين بمرض السرطان

ان من الخطوات الأساسية التي يجب العمل بها قبل إجراء عملية النمذجة هـي معرفـة التوزيع الاحتمالي الذي تـؤول إليه المشاهدات $y_t$, فبالنسبة إلى موضوع الدراسة والمتعلـق بالسلسلة الزمنية التي تمثل العدد التراكمي للمصابين بمرض السرطان في محافظـة نينـوى وللسنوات 1980-2010, والموضحة في (الملحق(A)) فقد فرض انها تتوزع توزيعاً طبيعياً (Gamermn and Migon,1991).

فإذا فرضنا أن التوزيع لـ $y_t$ والتي تتوزع توزيعاً طبيعياً وينتمي إلى العائلة الاسية تكون له الصيغة الآتية:

$$\left(y_t \middle| \mu_t,\phi_t\right) \sim N\left(\mu_t, v(\mu_t)\phi_t^{-1}\right)$$

إذ أن

$y_t$: تمثل العدد التراكمي للمصابين بمرض السرطان.

$\mu_t$: تمثل دالة المعدل (mean function) أو ماتسمى دالة متوسط الاستجابة (mean response function).

$\phi_t$: تمثل معلمة الدقة (Precision parameter) وهي تتغير خلال الزمن.وعندما نتعامل مع بيانات زمنية حقيقية يكون تباين المشاهدات غير معلوم ويتم التعامل معه من خلال معلمة الدقة (Solhjell,2009).

$v(\mu_t)$: قانون التباين (Variance law) وهو معلوم وتم وضعه لجعل التباين أكثر دقة. وان أكثـر هـذه القـوانين اسـتخداماً لهـا الـصيغ الآتيـة: (Migon and Gamerman,1993)

- قانون تباين بواسون (Poisson variance law) وهو $v(\mu_t) = \mu_t$
- قانون تباين ذو الحدين (Binomial variance law) وهو $v(\mu_t) = \mu_t(1-\mu_t)$
- قانون تباين القوى (Power variance law) وهو $v(\mu_t) = \mu_t^d$

وحسب العدد التراكمي لمرضى السرطان نستخدم قانون تباين بواسون وذلك لكـون مـرض السرطان يعد من الحوادث النادرة الوقوع.

وعند رسم السلسلة الزمنية للمشاهدات $y_t$ والموضحة في الشكل (2) نلاحظ ان $y_t$ تزداد وتنمو سنة بعد اخرى. فإذا فرضنا ان هذه الزيادة (النمو) الحاصلة تتبع احـد نمـاذج النمـو الاسية والتي وضحت في الفقرة (2) لذا يمكن نمذجة دالة متوسط الاستجابة $\mu_t$ والتي تمثـل مستوى العملية وكتابتها حسب نماذج النمو وباستخدام نماذج Gregg فتكون $\mu_t$ لها الـصيغة الآتية:

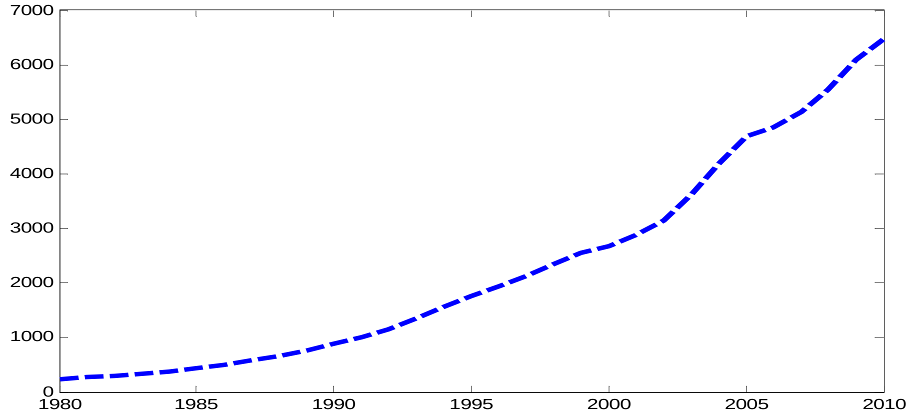
$$\mu_t = \mathrm{E}(y_t|\theta_t) = (a_1 + a_2\, a_3^t)^{\frac{1}{\lambda^*}}$$

إذ أن:

$\theta_t$ تمثل متجه المعلمات وان $\lambda^*$ و$a_1$ و $a_2$ و$a_3$ موضحة في الفقرة (2)

وبهذه الحالة تكون دالة الربط بالصيغة الآتية:

$$g(\mu_t) = \begin{cases} \mu_t^{\lambda^*} & \lambda^* \neq 0 \\ \log \mu_t & \lambda^* = 0 \end{cases} \qquad \text{...(1)}$$




الشكل (2)

المشاهدات $y_t$ (العدد التراكمي للمرضى المصابين بمرض السرطان)

وكما ذكرنا سابقاً ان نماذج النمو هي نماذج لاخطية وبما ان توزيع المشاهدات موضـوع الدراسة هو التوزيع الطبيعي والذي ينتمي إلى العائلة الاسية وان قيم متجه المعلمات $\theta_t$ غير معلومة ومن ثم فإن التوزيع لهذه المعلمات غير معلوم فهي تتوزع توزيعا عاما, لـذا تمـت نمذجة المشاهدات باستخدام النماذج الحركية اللاخطية العامة والتي تم توضيحها في المبحـث (3) وعليه يعرف النموذج الملائم للعدد التراكمي لمرضى السرطان بالصيغة الآتية :-

نموذج المشاهدة

$$(y_t|\mu_t,\phi_t) \sim N(\mu_t, v(\mu_t)\phi_t^{-1}) \qquad \text{...(2)}$$

$$g(\mu_t) = \lambda_t = F_t(\theta_t)$$

معادلة النظام

$$\theta_t = G_t(\theta_{t-1}) + w_t \qquad \textbf{...(3)}$$

وان تفسير مكونات النموذج معرفة سابقاً في المبحث(3).

اما بالنسبة إلى معادلة النظام فان متجه المعلمات $\theta_t$ يمثل بالاتي:

عندما تكون لدينا سلسلة زمنية متنامية يمكن ان نعتبر ان متجه المعلمات $\theta_t$ الذي لدينا هـ و الآتي: ( Gamerman and Migon,1991a,b)

$$\theta_t = (\theta_{1,t}, \theta_{2,t}, \theta_{3,t})$$

ويعرف كل حسب المعادلات الآتية:

$$\theta_{1,t} = \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1} \qquad \textbf{...(4)}$$

$$\theta_{2,t} = \theta_{2,t-1} * \theta_{3,t-1} \qquad \textbf{...(5)}$$

$$\theta_{3,t} = \theta_{3,t-1} \qquad \textbf{...(6)}$$

وان

$\theta_1$:تمثل المستوى الحالي (Current level) للسلسلة , $\theta_2$:المعدل الحالي للتغير

$\theta_3$:عامل التقليل أو الزيادة ( Dampening or accelerating factor) للتغير وقيمته تكون قريبة (اقل أو أعلى) من الواحد.

وإذا قمنا بإعادة تكرار المعادلات (4,5,6) وكالاتي:

$$\theta_{1,t} = \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1}$$

فان $\theta_{1,t-1} = \theta_{1,t-2} + \theta_{2,t-2}$

وان $\theta_{2,t} = \theta_{2,t-1} * \theta_{3,t-1}$

فان $\theta_{2,t-1} = \theta_{2,t-2} * \theta_{3,t-2}$

وبذلك تكون $\theta_{1,t} = \theta_{1,t-2} + \theta_{2,t-2}(1 + \theta_{3,t-2})$

وبالاستمرار بالعملية حتى نصل إلى الزمن صفر فان:

$$\theta_{1,t} = \theta_{1,0} + \theta_{2,0}(1 + \theta_{3,0} + \theta_{3,0}^2 + \ldots + \theta_{3,0}^{t-1}) = \theta_{1,0} + \theta_{2,0} \sum_{j=0}^{t-1} \theta_{3,0}^j$$

وان

$$\theta_{1,t} = \theta_{1,0} + \frac{\theta_{2,0}}{1 - \theta_{3,0}} - \frac{\theta_{2,0}\,\theta_{3,0}^t}{1 - \theta_{3,0}} = a_1 + a_2\, a_3^t$$

إذ أن:

$$a_3 = \theta_{3,0}\,,\quad a_2 = \frac{-\theta_{2,0}}{1-\theta_{3,0}}\,,\quad a_1 = \theta_{1,0} + \frac{\theta_{2,0}}{1-\theta_{3,0}}$$

نلاحظ ان $\theta_{1,t} = a_1 + a_2\, a_3^t$ وبما ان $\mu_t = \left(a_1 + a_2\, a_3^t\right)^{\frac{1}{\lambda^*}}$ لذا فان:

$$\theta_{1,t} = \begin{cases} \mu_t^{\lambda^*} & \lambda^* \neq 0 \\ \log \mu_t & \lambda^* = 0 \end{cases}$$

وهذا يعني ان $\theta_{1,t} = g(\mu_t) = F_t(\theta_t)$

وبالرجوع إلى معادلة النظام (2) فان الحد المتمثل بـ $G_t(\theta_{t-1})$ يمكن ان يوصف باستخدام المعادلات (4,5,6) وبالصيغة الآتية:

$$G_t(\theta_{t-1}) = \begin{pmatrix} \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1} \\ \theta_{2,t-1} * \theta_{3,t-1} \\ \theta_{3,t-1} \end{pmatrix} \qquad ...(7)$$

وبذلك تكون معادلة النظام بالصيغة الآتية:

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1} \\ \theta_{2,t-1} * \theta_{3,t-1} \\ \theta_{3,t-1} \end{pmatrix} + w_t$$

ولإيجاد توزيع التكهن والقيم المتكهن بها وإجراء عمليات التحليل لابد من تقريب $F_t(\theta_t)$ و $G_t(\theta_{t-1})$ إلى الشكل الخطي ويتم ذلك باستخدام سلسلة تايلر من الرتبة الأولى وكالاتي:

- تقريب الدالة $F_t(\theta_t)$ باستخدام سلسلة تايلر وحول النقطة $a_t = \mathrm{E}(\theta_t | D_{t-1})$ وكالاتي:

فان $F_t(\theta_t)$ تكون كالآتي:

$$F_t(\theta_t) = [F_t'(a_t)]^T \theta_t + b_t \qquad ...(8)$$

إذ أن $b_t = F_t(a_t) - [F_t'(a_t)]^T a_t$ وان $F_t' = \left[\frac{\partial F_t(\theta_t)}{\partial \theta_t'}\right]_{\theta_t = a_t}$

- تقريب الدالة $G_t(\theta_{t-1})$ حول النقطة $\mathrm{E}(\theta_{t-1} | D_{t-1}) = m_{t-1}$

$$G_t(\theta_{t-1}) = G_t'(m_{t-1})\theta_{t-1} + h_t \qquad ...(9)$$

إذ أن $h_t = G_t(m_{t-1}) - G_t'(m_{t-1})m_{t-1}$ وان $G_t' = \left[\frac{\partial G_t(\theta_{t-1})}{\partial \theta_{t-1}'}\right]_{\theta_{t-1} = m_{t-1}}$

ان المعلومات حول $\theta_{t-1}$ عند الزمن $t-1$ يعبر عنها وصفيا بالاتي:

$$(\theta_{t-1}|\phi_{t-1},D_{t-1}) \sim (m_{t-1},C_{t-1}\phi_{t-1}^{-1})$$

وان

$$(\phi_{t-1}|D_{t-1}) \sim Ga\left(\frac{n_{t-1}}{2},\frac{d_{t-1}}{2}\right)$$

وكما ذكرنا في بداية الموضوع ان $\phi_t$ غير معلومة وتتغير خلال الزمن ولنمذجـة هـذا التغير يتم ذلك باستخدام قيمة تكون اقل من واحد بقليل يطلق عليهـا تبـاين عامـل الخـصم (Variance of discount factor) فيكون التوزيع لـ $(\phi_t|D_{t-1})$ يعبر عنه وصفيا بالآتي: (Migon and Gamerman,1991a)

$$(\phi_t|D_{t-1}) \sim Ga\left(\frac{\delta v\, n_{t-1}}{2},\frac{\delta v\, d_{t-1}}{2}\right) \qquad \textbf{...(10)}$$

إذ أن $\delta v$ هي تباين عامل الخصم.

وان التوزيع السابق لـ $\theta_t$ وعندما تكون $\phi_t$ غير معلومة يوصف بالآتي:

$$(\theta_t|\phi_t,D_{t-1}) \sim (a_t,R_t\,\phi_t^{-1}) \qquad \textbf{...(11)}$$

إذ أن:

$$a_t = \mathrm{E}(\theta_t|\phi_t,D_{t-1}) = \mathrm{E}(G_t'(m_{t-1})\theta_{t-1}+h_t+w_t|D_{t-1})$$
$$= G_t'(m_{t-1})m_{t-1}+h_t$$

وبالتعويض عن $h_t$ بما يساويها فان

$$a_t = G_t(m_{t-1})$$

وان

$$R_t = \mathrm{var}(\theta_t|\phi_t,D_{t-1}) = \mathrm{var}(G_t'(m_{t-1})\theta_{t-1}+h_t+w_t|D_{t-1})$$
$$= G_t'(m_{t-1})C_{t-1}[G_t'(m_{t-1})]^T + W_t$$

في النمذجة الحركية بشكل عام يكون من الصعب جـداً تحديـد مـصفوفة تبـاين خطـأ التطور $W_t$ (Evolution error variance matrix) بدقة.ولتجنب هذه المشكلة في إيجاد $W_t$ فقد اقترح كل من (Ameen and Harrison,1985) استخدام مايعرف بعامل الخصم لتسهيل إيجاد الـ $W_t$. وتستند فكرة عامل الخصم الى خصم المعلومات أي التقليل من قيمتهـا وذلـك لأنها تصبح اقل فائدة خلال الزمن. وتقع قيمته بين 0 و1 .وان القيم المثالية لعامل الخـصم تقع بين (0.9-0.99) (He,2007).

وتكون كل من $R_t$ و $W_t$ بالاعتماد على عامل الخصم لهما الصيغة الآتية:

$$R_t = B^{\frac{-1}{2}}G_t'(m_{t-1})C_{t-1}[G_t'(m_{t-1})]^T B^{\frac{-1}{2}}$$
$$W_t = B^{\frac{-1}{2}}G_t'(m_{t-1})C_{t-1}[G_t'(m_{t-1})]^T B^{\frac{-1}{2}} - G_t'(m_{t-1})C_{t-1}[G_t'(m_{t-1})]^T$$

إذ أن:

$B$ هي مصفوفة عامل الخصم (Discount Matrix) وعناصرها هي

$$B = diag\left[\beta_1, \beta_2, \ldots .\beta_n\right]$$

وان $\beta_i$ تمثل عامل الخصم وقيمه $0 < \beta_i \leq 1$ وان $i = 1,2,\ldots,n$

وحسب الظاهرة موضوع الدراسة وبالتجانس مع المعادلة (7) فان:

$$a_t = G_t(m_{t-1}) = \begin{pmatrix} m_{1,t-1} + m_{2,t-1} \\ m_{2,t-1} * m_{3,t-1} \\ m_{3,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \\ a_{3,t} \end{pmatrix}$$

وحسب موضوع الدراسة تكون $G'_t(m_{t-1})$ كالآتي:

$$G'_t(m_{t-1}) = \left[\frac{\partial G_t(\theta_{t-1})}{\partial \theta_{t-1}}\right]_{\theta_{t-1}=m_{t-1}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{t-1}} \begin{pmatrix} \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1} \\ \theta_{2,t-1} * \theta_{3,t-1} \\ \theta_{3,t-1} \end{pmatrix}_{\theta_{t-1}=m_{t-1}}$$

ان هذه المشتقة عبارة عن مشتقة متجه بالنسبة إلى متجه وتكون هذه المشتقة بالصيغة الآتية: (Schott,1997)

$$\left[\frac{\partial G_t(\theta_{t-1})}{\partial \theta_{t-1}}\right]_{\theta_{t-1}=m_{t-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta_{1,t-1}+\theta_{2,t-1})}{\partial\theta_{1,t-1}} & \frac{\partial(\theta_{1,t-1}+\theta_{2,t-1})}{\partial\theta_{2,t-1}} & \frac{\partial(\theta_{1,t-1}+\theta_{2,t-1})}{\partial\theta_{3,t-1}} \\ \frac{\partial(\theta_{2,t-1}*\theta_{3,t-1})}{\partial\theta_{1,t-1}} & \frac{\partial(\theta_{2,t-1}*\theta_{3,t-1})}{\partial\theta_{2,t-1}} & \frac{\partial(\theta_{2,t-1}*\theta_{3,t-1})}{\partial\theta_{3,t-1}} \\ \frac{\partial\theta_{3,t-1}}{\partial\theta_{1,t-1}} & \frac{\partial\theta_{3,t-1}}{\partial\theta_{2,t-1}} & \frac{\partial\theta_{3,t-1}}{\partial\theta_{3,t-1}} \end{pmatrix}_{\theta_{t-1}=m_{t-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m_{3,t-1} & m_{2,t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد توزيع التكهن بخطوة واحدة يكون حسب الصيغة الآتية:

$$\mathrm{P}(y_t|D_{t-1}) = \int_{\phi_t}\int_{\mu_t} \mathrm{P}(y_t|\mu_t,\phi_t,D_{t-1}) \cdot \mathrm{P}(\mu_t,\phi_t|D_{t-1})\, d\mu_t d\phi_t \qquad \text{...(12)}$$

ان $\mathrm{P}(y_t|\mu_t,\phi_t,D_{t-1})$ يمكن استخراجها من المعادلة (1) أما $\mathrm{P}(\mu_t,\phi_t|D_{t-1})$ يمكن إيجادهـا من الصيغة الآتية:

$$\mathrm{P}(\mu_t,\phi_t|D_{t-1}) \propto \mathrm{P}(\mu_t|\phi_t,D_{t-1}) \cdot \mathrm{P}(\phi_t|D_{t-1}) \qquad \text{...(13)}$$

ان $\mathrm{P}(\phi_t|D_{t-1})$ يمكن معرفتها من خلال العلاقة (10) أما $\mathrm{P}(\mu_t|\phi_t,D_{t-1})$ يمكـن إيجادهـا كالآتي:

ان التوزيع لـ $\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)$ يمكن الحصول عليه من خلال دالة الربط $g\left(\mu_t\right)$ وكما ذكرنا ان دالة الربط هي قابلة للانعكاس فيتم الحصول على $\mu_t$ من التحويل المتقابل ( One-one transformation) وكالاتي:

بما ان $g\left(\mu_t\right)=F_t\left(\theta_t\right)$ لذا فان $\mu_t=g^{-1}\left(F_t\left(\theta_t\right)\right)$ وإذا فرضنا ان $h=g^{-1}$ بذلك تكون $\mu_t=h\left(F_t\left(\theta_t\right)\right)$ ولمعرفة التوقع والتباين لـ $\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)$ لابد من إيجاد التوقع والتباين لـ $g\left(\mu_t\right)=F_t\left(\theta_t\right)$ وكالاتي:

$$\mathrm{E}\left(g\left(\mu_t\right)|\phi_t, D_{t-1}\right)=F_t\left(a_t\right)=u_t$$

$$\operatorname{var}\left(g\left(\mu_t\right)|\phi_t, D_{t-1}\right)=\left[F_t'\left(a_t\right)\right]^T R_t\, \phi_t^{-1} F_t'\left(a_t\right)=q_t \phi_t^{-1}$$

وبهذا يمكن الحصول على التوقع والتباين لـ $\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)$ وباستخدام طريقة دلتا ( Delta method) والموضحة في (ذنون,1991) وكالاتي:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)&=\mathrm{E}\left[h\left(g\left(\mu_t\right)\right)|\phi_t, D_{t-1}\right]=h\left[\mathrm{E}\left(g\left(\mu_t\right)\right)|\phi_t, D_{t-1}\right]\\&=h\left[F_t\left(a_t\right)\right]=\hat{y}_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)&=\operatorname{var}\left[h\left(g\left(\mu_t\right)\right)|\phi_t, D_{t-1}\right]\\&=\left[h'\left(F_t\left(a_t\right)\right)\right]^2 \operatorname{var}\left(g\left(\mu_t\right)|\phi_t, D_{t-1}\right)\\&=\left[h'\left(F_t\left(a_t\right)\right)\right]^2 q_t \phi_t^{-1}\end{aligned}$$

بهذا يكتب التوزيع لـ $\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)$ بالصيغة الآتية:

$$\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right) \sim N\left(\hat{y}_t, \left[h'\left(F_t\left(a_t\right)\right)\right]^2 q_t \phi_t^{-1}\right) \qquad \textbf{...(14)}$$

إذ أن $h'\left(F_t\left(a_t\right)\right)=\dfrac{\partial h\left(F_t\left(a_t\right)\right)}{\partial F_t\left(a_t\right)}$

وحسب موضوع الدراسة وبما ان $F_t\left(\theta_t\right)=\theta_{1,t}$ وبالتجانس فان $F_t\left(a_t\right)=a_{1,t}$ وبذلك تكون

$$\hat{y}_t=\mathrm{E}\left(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}\right)=h\left[F_t\left(a_t\right)\right]=h\left(a_{1,t}\right)=g^{-1}\left(a_{1,t}\right)$$

وان

$$h\left(a_{1,t}\right)=g^{-1}\left(a_{1,t}\right)=\begin{cases}\left(a_{1,t}\right)^{\frac{1}{\lambda^*}} & ;\lambda^* \neq 0\\ e^{a_{1,t}} & ;\lambda^*=0\end{cases} \qquad =\begin{cases}a_{1,t} & ;\lambda^*=1\\ a_{1,t}^{-1} & ;\lambda^*=-1\\ e^{a_{1,t}} & ;\lambda^*=0\end{cases}$$

أما بالنسبة إلى $\left[h'\left(F_t\left(a_t\right)\right)\right]^2$ فتكون بالصيغة الآتية:

$$[h'(F_t(a_t))]^2 = [h'(a_{1,t})]^2 = \left[\frac{\partial h(a_{1,t})}{\partial a_{1,t}}\right]^2 = \begin{cases} 1 & ;\lambda^* = 1 \\ a_{1,t}^{-4} & ;\lambda^* = -1 \\ e^{2a_{1,t}} & ;\lambda^* = 0 \end{cases}$$

وان $F_t'(a_t)$ الموجودة في $q_t$ يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$F_t'(a_t) = \left[\frac{\partial F_t(\theta_t)}{\partial \theta_t}\right]_{\theta_t = a_t} = \left[\frac{\partial \theta_{1,t}}{\partial \theta_t}\right]_{\theta_t = a_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{1,t}}{\partial \theta_{1,t}} \\ \frac{\partial \theta_{1,t}}{\theta_{2,t}} \\ \frac{\partial \theta_{1,t}}{\theta_{3,t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبالرجوع إلى المعادلة (13) وبالتعويض عن $P(\mu_t|\phi_t, D_{t-1})$ من العلاقة (14) والتعويض عن $P(\phi_t|D_{t-1})$ من العلاقة (10) فيكون التوزيع السابق المشترك بين $\mu_t$ و $\phi_t$ هو ((Normal-Gamma)) وتكون له الصيغة الآتية:

$$P(\mu_t, \phi_t|D_{t-1}) \propto \phi_t^{\frac{\delta v n_{t-1}+1}{2}-1} \exp\left\{\frac{-\phi_t}{2}\left[\frac{1}{[h'(F_t(a_t))]^2 q_t}(\mu_t - \hat{y}_t) + \delta v d_{t-1}\right]\right\}$$

وبالتعويض عن $P(\mu_t, \phi_t|D_{t-1})$ في المعادلة (12) وبالتعويض عن كل $v(\mu_t)$ بـ $v(\hat{y}_t)$ وذلك لتسهيل عملية الاشتقاق وبعد إجراء بعض العمليات الحسابية وبعد التبسيط يكون توزيع التكهن بخطوة واحدة يوصف بالشكل الآتي:

$$(y_t|D_{t-1}) \sim t\left\{\hat{y}_t, \delta v d_{t-1}\left([h'(F_t(a_t))]^2 q_t + v(\hat{y}_t)\right), \delta v n_{t-1}\right\}$$

وكما ذكرنا ان قانون التباين المستخدم في موضوع الدراسة هو قانون تباين بواسون الذي هو $v(\mu_t) = \mu_t$ وذكرنا انه تم التعويض عن كل $v(\mu_t)$ بـ $v(\hat{y}_t)$ بذلك حسب قانون تباين بواسون يكون $v(\hat{y}_t) = \hat{y}_t$ فيكون توزيع التكهن يوصف بالآتي:

$$(y_t|D_{t-1}) \sim t\left\{\hat{y}_t, \delta v d_{t-1}\hat{H}_t, \delta v n_{t-1}\right\}$$

إذ أن $\hat{H}_t = [h'(F_t(a_t))]^2 q_t + \hat{y}_t$ .

ويمكن إيجاد دالة الاحتمال للتوزيع اللاحق لـ $\mu_t$ من خلال الصيغة الآتية:

$$P(\mu_t|\phi_t, D_t) \propto P(y_t|\mu_t, \phi_t, D_{t-1}) \cdot P(\mu_t|\phi_t, D_{t-1})$$

ان $P(y_t|\mu_t, \phi_t, D_{t-1})$ تحسب من المعادلة (2) وان $P(\mu_t|\phi_t, D_{t-1})$ تحسب من العلاقة (14) فيكون التوزيع لـ $(\mu_t|\phi_t, D_t)$ بالوصف الآتي:

$$(\mu_t|\phi_t, D_t) \sim N\left(\tilde{\mu}_t, V_t^* \phi_t\right) \quad \textbf{...(15)}$$

إذ أن

$$\tilde{\mu}_t = \hat{y}_t + [h'(F_t(a_t))]^2 q_t \hat{H}_t^{-1} e_t$$

$$V_t^* = [h'(F_t(a_t))]^2 q_t \, v(\hat{y}_t)\hat{H}_t^{-1}$$

وان $\hat{H}_t = v(\hat{y}_t) + [h'(F_t(a_t))]^2 q_t \quad , e_t = (y_t - \hat{y}_t)$

ويتم إيجاد التوقع والتباين لـ $(g(\mu_t)|\phi_t, D_t)$ بالاعتماد على التوزيـع اللاحـق لـ ـ $\mu_t$ والمعرف في العلاقة (15) وباستخدام طريقة دلتا وكالاتي:

$$\mathrm{E}(g(\mu_t)|\phi_t, D_t) = g(\mathrm{E}(\mu_t|\phi_t, D_t)) = g(\tilde{\mu}_t) = u_t^*$$

$$\mathrm{var}(g(\mu_t)|\phi_t, D_t) = [g'(\tilde{\mu}_t)]^2 \, \mathrm{var}(\mu_t|\phi_t, D_t)$$

$$= [g'(\tilde{\mu}_t)]^2 V_t^* \phi_t^{-1} = q_t^* \phi_t^{-1}$$

وبالتجانس مع معادلة (1) نجد ان :

$$u_t^* = g(\tilde{\mu}_t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_t & ;\lambda^* = 1 \\ \tilde{\mu}_t^{-1} & ;\lambda^* = -1 \\ \log \tilde{\mu}_t & ;\lambda^* = 0 \end{cases}$$

وان

$$[g'(\tilde{\mu}_t)]^2 = \left[\frac{\partial g(\tilde{\mu}_t)}{\partial \tilde{\mu}_t}\right]^2 = \begin{cases} 1 & ;\lambda^* = 1 \\ \tilde{\mu}_t^{-4} & ;\lambda^* = -1 \\ \tilde{\mu}_t^{-2} & ;\lambda^* = 0 \end{cases}$$

ولإيجاد التوزيع اللاحق لـ $\theta_t$ أي إيجاد التوزيع لـ $(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_t)$ يتم ذلك بالاعتماد على التوزيع لـ $(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})$ وان التوزيع لـ $(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})$ غير محدد ويمكن تحديده بشكل جزئي من خلال التوقع والتباين ويتم ذلك باستخدام النظرية الموضحة في (West and Harrison,1997, pp.124 ) .

وبتطبيق هـذه النظريـة يكـون تقـدير بيـز الخطـي (LBE) الأمثـل للتوقـع والتبـاين لـ $(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})$ كالآتي:

$$\hat{\mathrm{E}}(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1}) = a_t + R_t F_t'(a_t)(g(\mu_t) - u_t)/q_t$$

$$\hat{\mathrm{var}}(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1}) = R_t \phi_t^{-1} - R_t \phi_t^{-1} F_t'(a_t)[F_t'(a_t)]^T R_t / q_t$$

وبالاعتماد على العلاقات الخطية البيزية يكون التوزيع اللاحق لـ $\theta_t$ الذي يوصف بالآتي:

$$(\theta_t|\phi_t, D_t) \sim (m_t, C_t \phi_t^{-1})$$

إذ أن

$$\mathrm{E}(\theta_t|\phi_t, D_t) = \mathrm{E}(\hat{\mathrm{E}}(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})|\phi_t, D_t)$$

$$= a_t + R_t F_t'(a_t)(u_t^* - u_t)/q_t = m_t$$

$$\operatorname{var}(\theta_t|\phi_t, D_t) = \operatorname{var}\left[\hat{\mathrm{E}}(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})|\phi_t, D_t\right] + \mathrm{E}\left[\hat{\operatorname{var}}(\theta_t|g(\mu_t), \phi_t, D_{t-1})|\phi_t, D_t\right]$$

$$= \frac{1}{\phi_t}\left[R_t - R_t F_t'(a_t)[F_t'(a_t)]^T R_t \left(1 - \frac{q_t^*}{q_t}\right) \Big/ q_t\right] = \frac{C_t}{\phi_t}$$

ان قيمة $\phi_t$ هي عبارة عن التوقع لـ $(\phi_t|D_t)$ وان التوزيع لـ $(\phi_t|D_t)$ يمكن الحصول عليه باستخدام نظرية بيز وكالاتي:

$$\mathrm{P}(\phi|D_t) \propto \mathrm{P}(y_t|\phi_t, D_{t-1}) \cdot \mathrm{P}(\phi_t|D_{t-1})$$

ان $\mathrm{P}(y_t|\phi_t, D_{t-1})$ يمكن الحصول عليها من الصيغة الآتية:

$$\mathrm{P}(y_t|\phi_t, D_{t-1}) = \int_{\mu_t} \mathrm{P}(y_t|\mu_t, \phi_t, D_{t-1}) \cdot \mathrm{P}(\mu_t|\phi_t, D_{t-1}) d\mu_t$$

وبالتعويض عن $\mathrm{P}(\mu_t|\phi_t, D_{t-1})$ من العلاقة (14) والتعويض عن $\mathrm{P}(y_t|\mu_t, \phi, D_{t-1})$ من معادلة (2) وبعد إجراء بعض العمليات الحسابية وبعد التبسيط نحصل على الآتي:

$$\mathrm{P}(y_t|\phi_t, D_{t-1}) \propto \phi_t^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-\phi_t}{2}\left[(y_t - \hat{y}_t)^2 \Big/ \left(v(\hat{y}_t) + [h'(F_t(a_t))]^2 q_t\right)\right]\right\}$$

بعد الحصول على $\mathrm{P}(y_t|\phi, D_{t-1})$ وبالتعويض عن $\mathrm{P}(\phi_t|D_{t-1})$ من العلاقة (10) فان $\mathrm{P}(\phi_t|D_t)$ تكون كالآتي:

$$\mathrm{P}(\phi_t|D_t) \propto \phi_t^{\frac{\delta v n_{t-1}+1}{2}-1} \exp\left\{\frac{-\phi_t}{2}\left[\frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{\left(v(\hat{y}_t) + [h'(F_t(a_t))]^2 q_t\right)} + \delta v\, d_{t-1}\right]\right\}$$

ومن ذلك نجد ان

$$(\phi|D_t) \sim Ga\,(n_t/2, d_t/2)$$

إذ أن:

$$n_t = \delta v\, n_{t-1} + 1 \quad , d_t = \delta v\, d_{t-1} + e_t^2 \hat{H}_t^{-1}$$

وان

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad , \hat{H}_t = v(\hat{y}_t) + [h'(F_t(a_t))]^2 q_t$$

ولإيجاد دالة التكهن لابد من إيجاد التوزيع لـ $(\theta_{t+k}|\phi_t, D_t)$ ويتم ذلك كالآتي:

من معادلة النظام(3) وباعادة تطبيقها الى ان نصل للزمن $t+k$ نجد ان

$$\theta_{t+k} = G_{t+k}(\theta_{t+k-1}) + w_{t+k}$$

وبالتجانس مع المعادلة (9) نجد ان

$$\theta_{t+k} = G'_{t+k}\, \theta_{t+k-1} + h_{t+k} + w_{t+k}$$

إذ أن $h_{t+k} = G_{t+k}\left(a_t^{(k-1)}\right) - G'_{t+k}\left(a_t^{(k-1)}\right)a_t^{(k-1)}$

وان $G'_{t+k} = \left[\dfrac{\partial G_{t+k}\left(\theta_{t+(k-1)}\right)}{\partial\left(\theta_{t+k-1}\right)}\right]_{\theta_{t+k-1}=a_t^{(k-1)}}$

وبإدخال التوقع والتباين مباشرة على $\theta_{t+k}$ وبإضافة مصفوفة عامل الخصم نحصل على الآتي:

$$\left(\theta_{t+k}\middle|\phi_t, D_t\right) \sim \left(a_t^{(k)}, R_t^{(k)}\phi_t^{-1}\right)$$

إذ أن

$$a_t^{(k)} = G_{t+k}\left(a_t^{(k-1)}\right)$$
$$R_t^{(k)} = B^{\frac{-1}{2}} G'_{t+k} R_t^{(k-1)} \left[G'_{t+k}\right]^T B^{\frac{-1}{2}}$$

وان التوزيع لـ $g\left(\mu_{t+k}\right)$ يتم إيجاده كالآتي:

بالتجانس مع معادلة (8) فان

$$g\left(\mu_{t+k}\right) = F_{t+k}\left(\theta_{t+k}\right) = \left[F'_{t+k}\right]^T \theta_{t+k} + b_{t+k}$$

إذ أن $b_{t+k} = F_{t+k}\left(a_t^{(k)}\right) - \left[F'_{t+k}\right]^T a_t^{(k)}$

لذا فان

$$\mathrm{E}\left(g\left(\mu_{t+k}\right)\middle|\phi_t, D_t\right) = F_{t+k}\left(a_t^{(k)}\right) = u_t^{(k)}$$
$$\mathrm{var}\left(g\left(\mu_{t+k}\right)\middle|\phi_t, D_t\right) = \left[F'_{t+k}\right]^T R_t^{(k)} \phi_t F'_{t+k}$$

ويمكن الحصول على دالة التكهن التي بواسطتها يمكن معرفة القيم المتكهن بها كالآتي:

$$\text{Forecast Function} = \mathrm{E}\left(\mu_{t+k}\middle|\phi_t, D_t\right) = \mathrm{E}\left(y_{t+k}\middle|D_t\right)$$

وبالتجانس مع $\mu_t = h\left(g\left(\mu_t\right)\right)$ فان $\mu_{t+k} = h\left(g\left(\mu_{t+k}\right)\right)$

ويمكن الحصول على التوقع لـ $\mu_{t+k}$ باستخدام طريقة دلتا وبالاعتماد على التوقع لـ $\left(g\left(\mu_{t+k}\right)\middle|\phi_t, D_t\right)$ وكالاتي:

$$\mathrm{E}\left(\mu_{t+k}\middle|\phi_t, D_t\right) = h\left[\mathrm{E}\left(g\left(\mu_{t+k}\right)\right)\middle|\phi_t, D_t\right] = h\left(F_{t+k}\left(a_t^{(k)}\right)\right) = g^{-1}\left(F_{t+k}\left(a_t^{(k)}\right)\right)$$

وبالتجانس مع $F_t\left(\theta_t\right) = \theta_{1,t}$ فان $F_{t+k}\left(\theta_{t+k}\right) = \theta_{1,t+k}$ وبهذا تكون $F_{t+k}\left(a_t^{(k)}\right) = a_{1,t}^{(k)}$

فتكون دالة التكهن $\mathrm{E}\left(\mu_{t+k}\middle|\phi_t, D_t\right)$ لكل نموذج من نماذج النمو كالآتي:

$$\mathrm{E}\left(\mu_{t+k}\middle|\phi_t, D_t\right)=\begin{cases} a_{1,t}^{(k)} & ;\lambda^*=1 \\ \left(a_{1,t}^{(k)}\right)^{-1} & ;\lambda^*=-1 \\ e^{a_{1,t}^{(k)}} & ;\lambda^*=0 \end{cases}$$

## 5- التطبيق

يتم في هذا المبحث تطبيق المعادلات التي تم إيضاحها خلال عملية النمذجة والتكهن ومبتدئين بفرض قيم للتوقع والتباين للتوزيع السابق لمتجه المعلمات $\theta$ عنـد الـزمن $t=1$ وكالاتي:

$$\left(\theta_1\middle|\phi_1, D_0\right) \quad \sim N\left(a_1, R_1\,\phi_1\right)$$

إذ أن $a_1=\left(a_{1,1}\,,\, a_{2,1}\,,\, a_{3,1}\right)$ ويتم اختيار قيم $a_1$ حسب خبرة الباحث برأيه بحيث تكون هذه القيم ملائمة للنموذج وتعطي أفضل قيم للتكهن.

وقد تم اختيار قيم $a_1$ وحسب بيانات السرطان ولكل نموذج من نماذج النمو كما في الجـدول (1)

الجدول (1) قيم $a$ عند الزمن $t=1$

| نوع النموذج | $a_{1,1}$ | $a_{2,1}$ | $a_{3,1}$ |
|---|---|---|---|
| النموذج الاسي المعدل | 200 | 30 | 0.95 |
| النموذج اللوجستي | 0.005 | 0.03 | 0.95 |
| نموذج جومبرتز | 5.3 | 3.4 | 0.95 |

إذ أن قيمة $a_{1,1}$ للنموذج الاسي المعدل تم اختيارها مقاربة لقيمة المشاهدة الحقيقيـة بـالزمن واحد أي في سنة 1980, أما قيمة $a_{1,1}$ للنموذج اللوجستي فهي عبارة عن معكوس قيمة $a_{1,1}$ للنموذج الاسي المعدل, أما بالنسبة الى قيمة $a_{1,1}$ لنموذج جومبرتز يتم الحصول عليهـا بعـد اخذ الـ $\ln$ لقيمة $a_{1,1}$ للنموذج الاسي المعدل,وكذلك هو نفس الحال بالنسبة إلى قـيم $a_{2,1}$.

أما قيم $a_{3,1}$ كما ذكرنا سابقاً فإنها إما ان تكون اقل أو أعلى من الواحد بقليل وقد تم اختيارها 0.95 ولكل النماذج.

أما بالنسبة إلى $R_1$ فقد مثلت كالآتي:

$$R_1 = diag\left(r_{11}\,, r_{22}\,, r_{33}\right)$$

وتكون $R_1$ مصفوفة قطرية وذلك لعدم توافر ارتباط بين المعلمات عند نفس الـزمن لاحـظ المعادلات (4,5,6). وقد تم اختيار قيم كل من $r_{11}$ و $r_{22}$ و $r_{33}$ وذلك بعد تجربة العديد مـن القيم فقد تم التوصل إلى ان أفضل القيم وأكثرها ملاءمة تكون مبينة في الجدول (2).

الجدول (2) قيم $R$ عند الزمن $t=1$

| نوع النموذج | $r_{11}$ | $r_{22}$ | $r_{33}$ |
|---|---|---|---|
| النموذج الاسي المعدل | 200 | 65 | 0.06 |
| النموذج اللوجستي | 0.05 | 0.05 | 0.05 |
| نموذج جومبرتز | 0.9 | 1 | 0.06 |

وان التوزيع لـ $\phi$ عند الزمن $t=1$ يكون وصفاً بالآتي:

$$(\phi_1|D_0) \quad \sim Ga\left(\frac{\delta v\, n_0}{2}, \frac{\delta v\, d_0}{2}\right)$$

ان $\delta v$ وكما ذكرنا تكون قيمتها قريبة من الواحد وقد تم اختيارها 0.97

وتم فرض ان $n_0 = 0.1$ وان $d_0 = 0.1$ وبهذا يكون التوزيـع لـ ـ $\phi$ عنـد الـ زمن $t=1$

موصوفا بالآتي:

$$(\phi_1|D_0) \quad \sim Ga(0.05, 0.05)$$

وقد تم إيجاد قيم $\hat{y}_t$ والتي تمثـل $\mathrm{E}(y_t|D_{t-1})$ وعنـدما تكـون مـصفوفة الخـصم $B=(0.9,0.9,0.95)$. ان قيم $\hat{y}_t$ موضحة في( الملحق (A)) ولكل نموذج من نماذج النمـو ونلاحظ ان القيمة الثانية لـ $\hat{y}_t$ والتي تمثل القيمة التقديرية لعام 1981 لكل مـن النمـوذجين اللوجستي وجومبرتز أنها شاذة عن بقية القيم وعن القيمة الحقيقية وذلك ناتج عن القيم الأولية التي تم فرضها.

وللمقارنة بين نماذج النمو الثلاثة في مدى ملاءمتها لبيانات السرطان فقد تم حساب متوسـط الخطأ المطلق (Mean Absolute Error) ويرمز له ( $MAE$ ) للمقارنة بين هـذه النمـاذج ويكون قانونه بالصيغة الآتية:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_t - \hat{y}_t|}{n}$$

وتم استخراج النتائج باستخدام لغة (Matlab) ولكل النماذج وحسب الجدول (3).

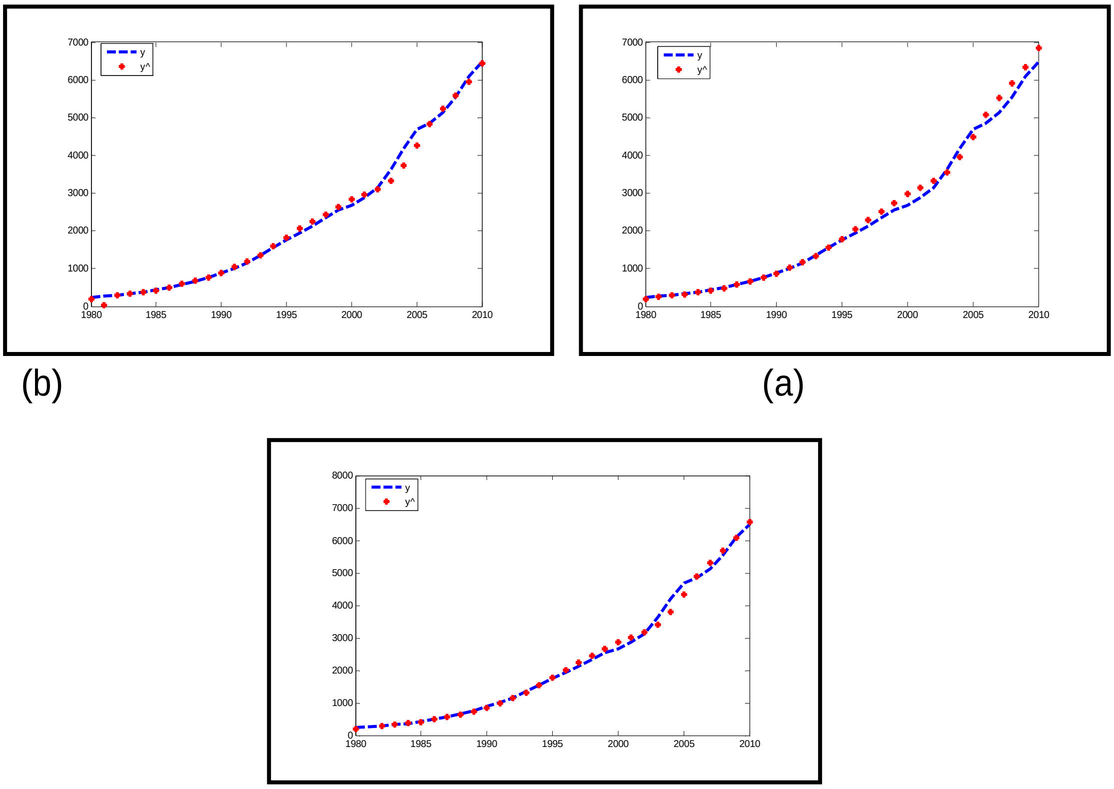
الجدول (3) قيم MAE

| نوع النموذج | قيمة MAE |
|---|---|
| النموذج الاسي المعدل | 125.931 |
| النموذج اللوجستي | 87.5172 |
| نموذج جومبرتز | 84.4828 |

ان قيم الـ $MAE$ المحسوبة تم حسابها بالابتداء من $t=3$ وذلك لاستبعاد القيمة الشاذة.

وان المقارنة بين المشاهدات الحقيقية $y_t$ والمشاهدات التقديرية $\hat{y}_t$ للنماذج الاسي المعدل واللوجستي وجومبرتز موضحة في الشكل (3). ونلاحظ ان المقارنة بين $y_t$ و $\hat{y}_t$ للنموذجين اللوجستي وجومبرتز انهما كانا أفضل من النموذج الاسي المعدل .

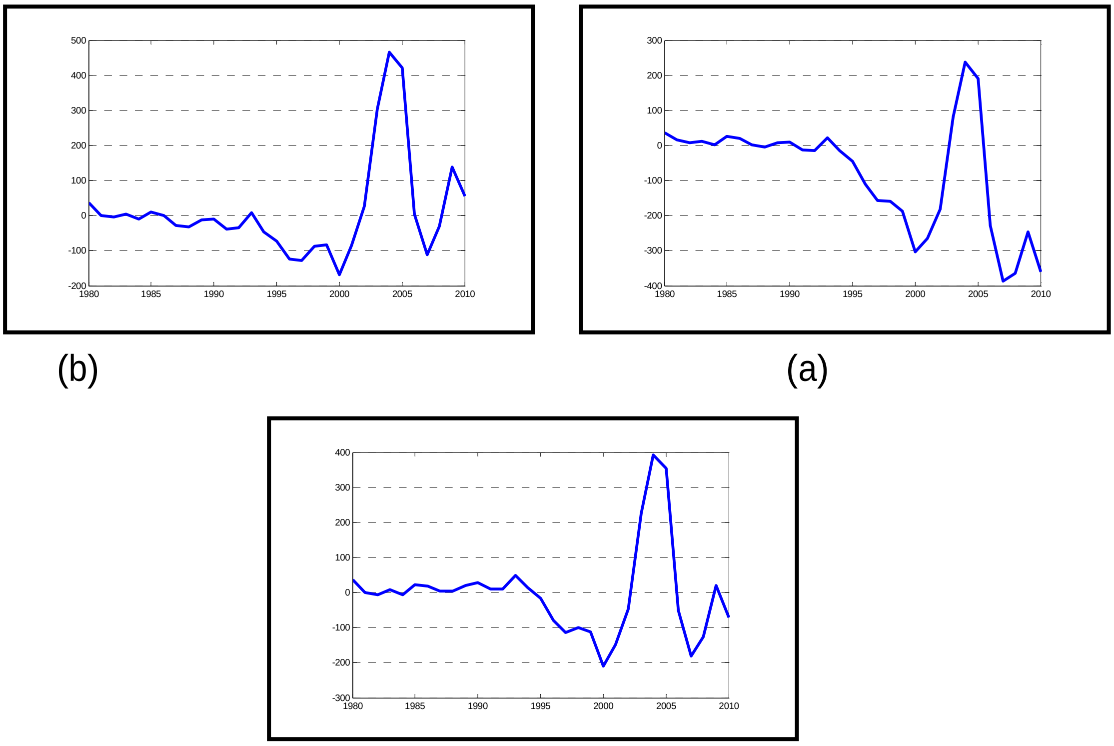
وان الأخطاء $e_t$ ولكل من النماذج الثلاثة الاسي المعدل واللوجستي وجومبرتز موضحة في الشكل (4) . ونلاحظ ان قيمة الأخطاء في السنوات 2003 و2004 و2005 كانت كبيرة جداً للنماذج الثلاثة ويعزى ذلك إلى ان أعداد الوفيات بسبب مرض السرطان في السنتين 2003 و2004 لم يتم تسجيلها بشكل كامل وذلك نظراً للظروف في تلك الفترة وهذا مما أدى إلى زيادة العدد التراكمي وجعل القيم الحقيقية متزايدة أكثر من الطبيعي.




(b) (a)

**الشكل (3)**

**المقارنة بين $y_t$ و $\hat{y}_t$ , --- --- $y_t$ ,++ $\hat{y}_t$ , (a) النموذج الاسي المعدل (b) النموذج اللوجستي (c) نموذج جومبرتز**




(b) (a)

(c)

**الشكل(4)**

**الأخطاء, ـــ ـــ ـــ $e_t$ (a) النموذج الاسي المعدل (b) النموذج اللوجستي**

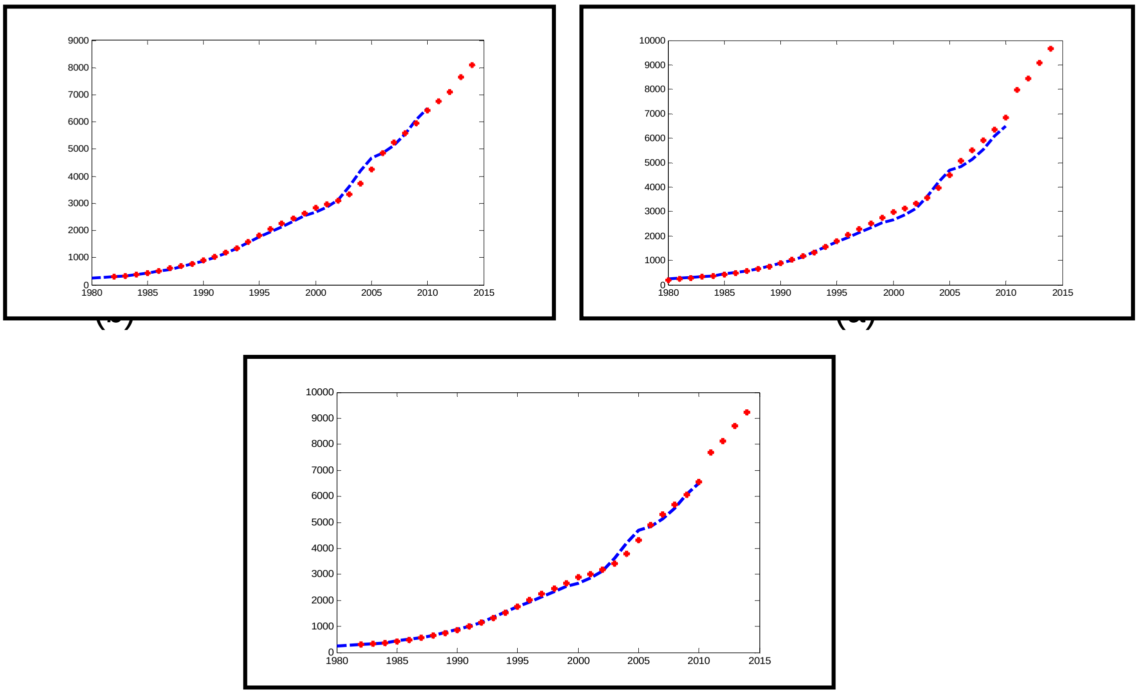
**(c) نموذج جومبرتز**

ان القيم المتكهن بها $y_{t+k}$ واخذت $k=1,2,3,4$ وبإلغاء السنوات الأربع الأخيرة والمتمثلة بـ 2007 و2008 و2009 و2010 وذلك من اجل مقارنة القيم المتكهن بها لهذه السنوات مع قيمها الحقيقية, وكذلك القيم المتكهن بها للسنوات 2011 و2012 و2013 و2014 كانت موضحة في الجدول (4).

الجدول (4) قيم التكهن عندما $k=4$

| الزمن | $y_t$ | الاسي المعدل | اللوجستي | جومبرتز |
|---|---|---|---|---|
| 2007 | 5130 | 5303 | 4639 | 4725 |
| 2008 | 5550 | 6106 | 5211 | 5496 |
| 2009 | 6094 | 6960 | 6066 | 6318 |
| 2010 | 6489 | 7516 | 6491 | 6797 |
| 2011 | | 7966 | 6765 | 7700 |
| 2012 | | 8459 | 7116 | 8113 |
| 2013 | | 9087 | 7655 | 8709 |
| 2014 | | 9664 | 8109 | 9223 |

نلاحظ ان القيم المتكهن بها باستخدام النموذجين اللوجستي وجومبرتز كانت أفضل من النموذج الاسي المعدل. وان المقارنة بين القيم الحقيقية والقيم المتكهن بها وفضلا عن السنوات 2011 و2012 و2013 و2014 للنماذج الاسي المعدل واللوجستي وجومبرتز موضحة في الـشكل (5).




**الشكل(5)**

**$y_t$ وقيم التكهن ,– – – – – – $y_t$ ,+++قيم التكهن, (a) النموذج الاسي المعدل (b) النموذج اللوجستي**

**(c) نموذج جومبرتز**

**الاستنتاجات:**

1- باستخدام اسلوب بيز يمكن الحصول على توزيع التكهن وليس قيمة التكهن فقط.
2- منحنى النمو للسرطان والقيم المتكهنة تتبع نموذجي النمو اللوجستي وجومبرتز أكثر من النموذج الاسي المعدل.
3- عند استخدامنا لنماذج النمو ولكون توزيع المعلمات غير معلوم كان أفضل نموذج حركي هو النموذج الحركي اللاخطي المعمم.

**المصادر العربية:**


1- الحديدي, عزام عبد الستار موسى,2005," **دراسة مستويات بعض المتغيرات الكيموحيوية لدى المرضى المصابين بقرحة ألاثني عشر وسرطان المعدة** ", رسالة ماجستير غير منشورة, كلية العلوم, جامعة الموصل.
2- الحسني, اويس موفق حامد,2005," **تأثير الإصابة بعدد من الأورام السرطانية في بيروكسدة الدهن ومستوى الكلوتاثيون وعدد من التغيرات في مكونات الدم**", رسالة ماجستير غير منشورة, كلية العلوم, جامعة الموصل.
3- ذنون, باسل يونس,1991,"**الاحتمالية والمتغيرات العشوائية**", دار الكتب للطباعة والنشر,الموصل.
4- طه, حذيفة حازم,1994,"**دراسة اهم نماذج النمو وتطبيقاتها على مرضى السرطان في محافظة نينوى**", رسالة ماجستير غير منشورة, كلية الادارة والاقتصاد, جامعة الموصل.


**المصادر الأجنبية:**


1- Ameen, J.R.M. and Harrison,J.P.,1985,‘‘**Normal Discount Bayesian Models**’’, Bayesian Statistics 2, PP. 271-298.
2- Box, G.E.P. and Cox, D.R., 1964,‘‘ An Analysis of transformations’’, J. R. Statist. Soc. Series B,vol. 26, No. 2, pp. 211-252.
3- Gamerman, D. and Migon, H.S., 1991a,‘‘ **Tractors in Spain-A Dynamic Reanalysis**’’, J. Opl. Res. Soc, pp. 119-124.
4- Gamerman, D. and Migon, H.S., 1991,‘‘ **Forecasting the Number of Aids Cases in Brazil**’’, J. R. Statist. Soc. Series D (The Statisticians), Vol. 40, No. 4, pp. 427-442.
5- Gill, J., 2001,‘‘ **Generalized Linear Models**: **A Unified Approach**’’, by Sage Publications, Inc.
6- Harrison, P.J. and Stevens, G.F., 1976,‘‘ **Bayesian Forecasting** ’’, J.

R. Statist. Soc. B, Vol. 38, pp. 205-247.

7- He, J., 2007,‘‘ **Bayesian Dynamic Survival Models For Longitudinal Aging Data**’’, P.H.D. Thesis, Dept. of Statistics, University of Florida State.

8- Meade, N., 1985,‘‘ **Forecasting Using Growth Curves-An Adaptve Approach**’’, J. opl Res.Soc, Vol 36,No. 12, pp. 1103-1115.

9- Migon, H.S. and Gamerman, D., 1993,‘‘ **Generalized Exponential Growth Models A Bayesian Approach**’’, J. of Forecasting, Vol. 12, pp. 573-584.

10- Schott, J.R., 1997,‘‘ **Matrix Analysis for Statistics**’’, By Johan Wiley & Sons, Inc.

11- Solhjell, I.K., 2009,‘‘ **Bayesian Forecasting and Dynamic Models Applied to Strain Data From The G ta River Bridge**’’, M.S.C. Thesis, Statistic Division, Dept. of Mathematics, University of Oslo.

12- West, M.; Harrison, P.J. and Migon, H.S., 1985,‘‘ **Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting**’’, J. Amer. Statist. Ass., Vol. 80, No. 389, pp. 73-97.

13- West, M. and Harrison, P.J., 1997,‘‘ **Bayesian Forecasting and Dynamic Models**’’, 2nd ed, Springer-Verlag New York, Inc.

## الملحق (A)

المقارنة بين القيم الحقيقية $y_t$ والقيم التقديرية $\hat{y}_t$ للنماذج( الاسيالمعدل, اللوجستي, جومبرتز)

| الزمن | $y_t$ | $\hat{y}_t$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | الاسي المعدل | اللوجستي | جومبرتز |
| 1980 | 237 | 200 | 200 | 200 |
| 1981 | 265 | 249 | 29 | 7096 |
| 1982 | 295 | 287 | 297 | 300 |
| 1983 | 335 | 324 | 330 | 327 |
| 1984 | 372 | 369 | 380 | 377 |
| 1985 | 438 | 412 | 426 | 415 |
| 1986 | 507 | 486 | 507 | 489 |
| 1987 | 575 | 572 | 602 | 569 |
| 1988 | 655 | 659 | 686 | 651 |
| 1989 | 761 | 753 | 772 | 741 |
| 1990 | 884 | 873 | 894 | 856 |
| 1991 | 1005 | 1018 | 1044 | 995 |
| 1992 | 1152 | 1167 | 1185 | 1142 |
| 1993 | 1359 | 1337 | 1350 | 1309 |
| 1994 | 1548 | 1563 | 1595 | 1535 |
| 1995 | 1755 | 1780 | 1828 | 1770 |
| 1996 | 1939 | 2050 | 2062 | 2017 |
| 1997 | 2128 | 2285 | 2255 | 2242 |
| 1998 | 2348 | 2508 | 2434 | 2448 |
| 1999 | 2555 | 2742 | 2638 | 2667 |
| 2000 | 2670 | 2973 | 2838 | 2880 |
| 2001 | 2873 | 3139 | 2957 | 3021 |
| 2002 | 3138 | 3320 | 3111 | 3185 |
| 2003 | 3632 | 3553 | 3327 | 3405 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3799 | 3724 | 3954 | 4191 | 2004 |
| 4326 | 4259 | 4492 | 4681 | 2005 |
| 4896 | 4841 | 5075 | 4845 | 2006 |
| 5312 | 5242 | 5518 | 5130 | 2007 |
| 5677 | 5579 | 5916 | 5550 | 2008 |
| 6073 | 5955 | 6343 | 6094 | 2009 |
| 6560 | 6434 | 6852 | 6489 | 2010 |