المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [222– 237]

التنبؤ بوساطة الانحـدار والكريكنـك للبيانات المكانية مع التطبيق

د. محمد نذير اسماعيل قاسم*   بشار طه خضير**

الملخـص

تناول البحث التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية غير المستقرة. فالتنبؤ يتم بواسطة عدة اساليب تناولنا منها أسلوبين هما: أسلوب الانحدار (مقدر المربعات الصغرى العامة) وأسلوب الكريكنك الشامل. وكما هو معلوم ان العملية العشوائية غير المستقرة لها اتجاه (وسط) بـشكل نموذج خطي أو غير خطي، ولهذه العملية يتم إيجاد دالة التغاير من معرفة دالة الفـاريوكرام والأخير تم توفيقه بنموذج الفاريوكرام الكروي ومن أجل تقدير معلمـات النمـوذج الكـروي بواسطة مقدر اصغر معيار تربيعي غير متحيز والذي يتطلب كون دالة التغاير خطيـة فـي المعلمات، تم تحويل النموذج الكروي إلى نموذج خطي بواسطة متسلسلة تيلور في التقريـب الخطي.

تم تطبيق التنبؤ في الأسلوبين على بيانات حقيقية تمثل ارتفاع مناسيب المياه الجوفية في 47 بئرا مع إحداثيات مواقعها في قضاء سنجار – محافظة نينوى – العراق وكانـت النتـائج مشجعة جداً حيث أظهرت تقارب القيمة التنبؤية مع القيم الحقيقية فضلاً عـن حـساب تبـاين التنبؤ في الأسلوبين والذي يبين ان تباين كريكنك الشامل اقل من تباين الانحدار.

Prediction by Regression and kriging for Spatial Data with Application

Abstract

This study deals with the prediction of the non-stationary spatial stochastic process. The prediction is done by two techniques which are regression technique (generalized least square estimation) and universal kriging technique. As it is familiar, that the non-stationary stochastic process has a trend (mean) as a linear or non-linear model. By this process we can find covariance function from knowing the variogram function and the latter is attributed to a spherical variogram model, also in order to estimate parameters of spherical model by minimum norm quadratic unbiased estimator which requires that the covariance function

* استاذ مساعد/كلية التربية/جامعة ا وصل.
** مدرس مساعد/مديرية تربية نينوى.

تاريخ الاستلام 2011/10/1   تاريخ القبول 2011/12/21

must be linear in the parameters, then changing the spherical model into an approximated linear model by Taylor series in the linear approximation

The prediction in these two techniques is applied to real data which represent height levels of ground water of 47 wells with their regional coordinates in Sinjar district in Ninevah Governorate in Iraq. The results were so encouraging where we show the approximation between the predictive values and the real values as well as computing the variance of prediction in these two techniques. It is shown that the prediction variance of universal kringing is less than that of regression.

1- المقدمــة :

تتناول هذه الدراسة تنبؤ العملية العشوائية المكانية بواسطة استخدام دالـة الفـاريوكرام (Variogram Function) أو دالة التغاير (Covariance Function) للمتغيرات المكانيـة (Regionalized Variable) وكذلك التنبؤ عن هذه العملية بواسطة الانحدار والكريكنك. تم في هذه الدراسة التنبؤ عن ظاهرة مكانية تشتمل على بيانات مياه جوفية موجودة فـي مواقـع معينة معروفة في منطقة محددة D. نقوم بعملية التنبؤ عن هذه الظاهرة في مواقع أخرى غير معلومة ضمن المنطقة D بالاستفادة من البيانات المعروفة ونجري عمليـة التنبـؤ بواسـطة أسلوب الانحدار (Regression Technique) الذي يتـضمن اسـتخدام مقـدر المربعـات الـصغرى العامـة (Generalized Least Square Estimator) ثـم أسـلوب كريكنـك (Kriging Technique) في الإحصاء المكاني وهو أسلوب يستخدم في التنبؤ بصورة خاصة عن الظواهر المكانية مثلا المعادن فوق وفي الأرض وباطنها والمياه الجوفية وتلـوث البيئـة وانتشار الغابات الطبيعية، فضلا عن التنبؤ عن انتشار الأمراض الوبائية والكوارث الطبيعيـة واستخدامه في المجالات الاقتصادية Diggle and Ribeirro (2007). كما يستخدم أسـلوب الكريكنك في أي دراسة إذا كان من الممكن تعريف الظاهرة قيد الدراسة على أساس المـسافة التي تفصل بين عينات بيانات هذه الظاهرة. أدى انتشار أسلوب الكريكنك في التنبؤ إلى تقليل استخدام اسلوب الانحدار في التنبؤ وذلك إن الأخير يستوجب تعريفاً متغيراً واحـداً أو عـدة متغيرات توضيحية في حين لا يتضمن الكريكنك سوى معرفة المسافة بين مشاهدات الظاهرة. فضلاً عن ذلك فان متوسط مربع الخطأ للتنبؤ في أسلوب الكريكنك اقل دائما مـن أسـلوب الانحدار Cressie (1993), Stein (1999).

2- هدف البحث :

إن هدف البحث الأساسي هو إجراء التنبؤ عن ظاهرة مكانية بواسطة أسـلوب الانحـدار وأسلوب الكريكنك. بعد دراسة الظاهرة المكانية قيد الدراسـة وفحـصها مـن حيـث خاصـية الاستقرارية (Stationarity) او عدم الاستقرارية (Nonstationarity) .

وتقدير معلمات دالة التغاير أو دالة الفاريوكرام من أجل الحصول عل تنبؤ دقيق وبعد الحصول على التنبؤ بواسطة كلا الأسلوبين تتم مقارنة دقة وضبط التنبؤ وذلك بواسطة حساب تباين الانحدار وتباين الكريكنك لمعرفة أيهما أفضل وأحسن دقة ليتم الاعتماد عليه .

3- المتغير المكاني ودالة الفاريوكرام:

يتعامل الإحصاء المكاني مع متغيرات عشوائية تختلف عن المتغيرات العشوائية الاعتيادية، حيث أن نظرية الإحصاء المكاني (او الفراغي) تعتمد على دراسة الاختلافات الموجودة بين المتغيرات المكانية $Z(x)$, $Z(x+h)$ والتي تفصل بينهما إزاحة h.

لكل قيمة من قيم المتغير المكاني إحداثيات تمثل موقع تلك النقطة سواء كانت على سطح الأرض في مستوى (ذي بعدين) أو في باطن الأرض أو خارج الأرض في فراغ (ذي ثلاثة أبعاد) .

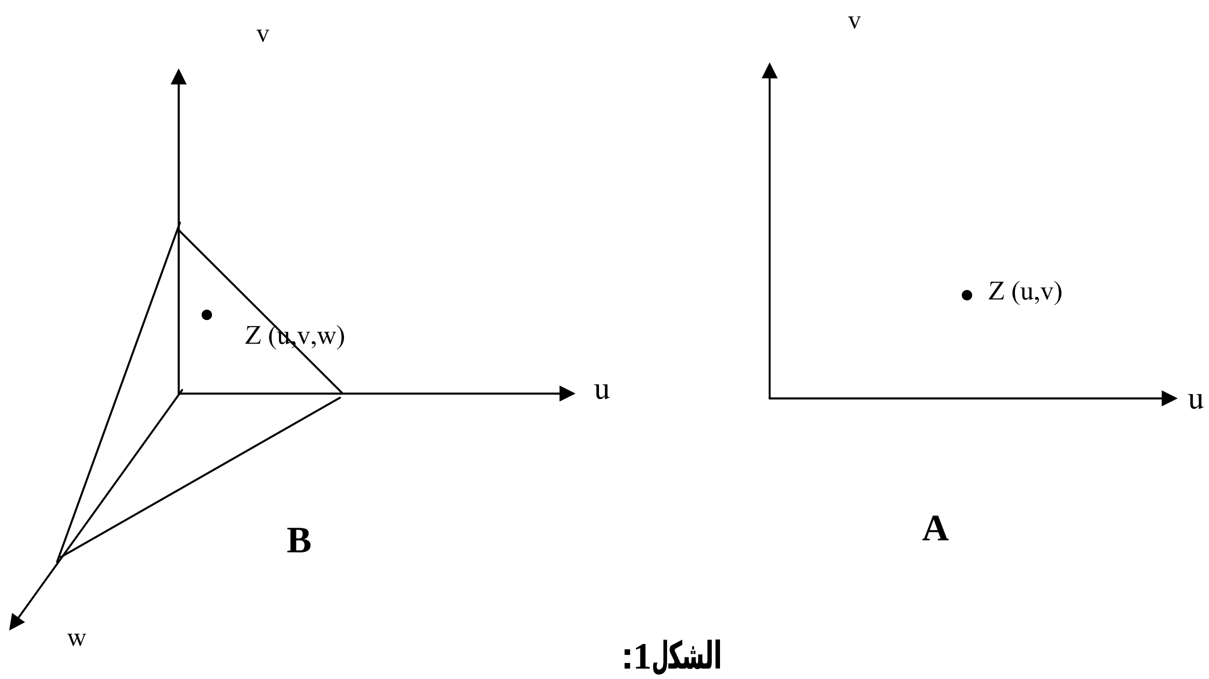
ليكن $Z(x)$ متغيراً مكانياً في الموقع X ضمن المنطقة D في فضاء اقليدس حيث ان $X \in D \subseteq R^p$. علما أن :

P=2 تكون ذات بعدين في المستوي $X= (u,v)$

والتي تم ايضاحها بالشكل (A-1)

P=3 تكون ذات ثلاثة أبعاد في الفراغ $X= (u,v,w)$

والتي تم ايضاحها بالشكل (B-1)



الشكل1:

A – موقع **المتغير المكاني في فضاء ذي بعدين**

B – موقع المتغير المكاني في فضاء ذي ثلاثة أبعاد

إن تباين مشاهدات المتغير المكاني وخاصة في الإحصاء المكاني يكون أحيانا كبيراً أو غير معروف مما يؤدي إلى أن تكون قيم معاملات الارتباط الناتجة من القانون :

$$\rho\big(Z(x),Z(x+h)\big)=\frac{\text{cov}\big(Z(x),Z(x+h)\big)}{\sigma z(x).\sigma z(x+h)} \quad \textbf{.................. (1)}$$

صغيرة ومن ثم تؤدي الأخيرة إلى تفسيرات غير صحيحة ونتائج غير دقيقـة، وعلـى أساس ذلك اقترح العـالم Krige(1951) دالـة شـبه الفـاريوكرام (Semi-variogram) المعروفة بالصيغة الآتية:

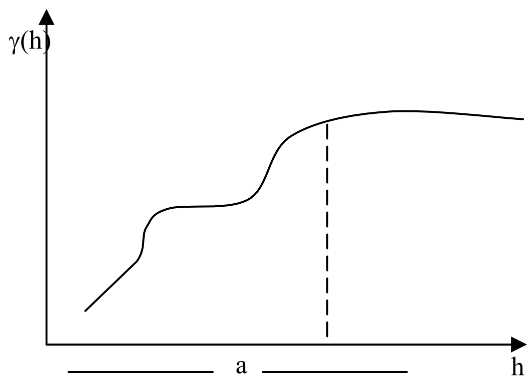
$$\gamma(h)=\frac{1}{2}.\frac{1}{n(h)}\sum_{i=1}^{n(h)}\big[Z(x_i)-Z(x_i+h)\big]^2 \quad ....(2)$$

وهي متوسط مربع الاختلافات الموجودة بين المشاهدات المكانية التي تبعد عن بعضها البعض إزاحة h، علما أن n(h) تمثل عدد أزواج المشاهدات Z(xi+h) و Z(xi) التي تفصل بينهما إزاحة h، Cressie (1993).

وعندما نضرب المعادلة (2) بالعدد 2 يتغير اسمها إلى دالة الفاريوكرام والتـي تكتـب بالصيغة الآتية:

$$2\gamma(h)=\frac{1}{n(h)}\sum_{i=1}^{n(h)}\big[Z(x_i)-Z(x_i+h)\big]^2 \quad ....(3)$$

والتي تم ايضاحها بالشكل (2)



الشكل 2: منحني دالة الفاريوكرام

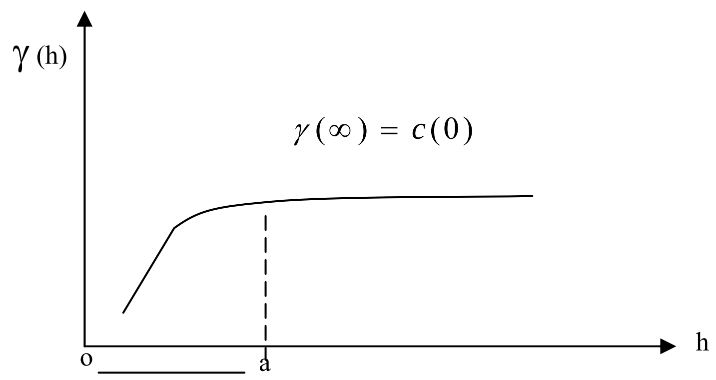
وكلما ازدادت الإزاحة h بين المشاهدات أصبح الفاريوكرام كبيراً حتى يستقر ارتفاعه عند إزاحة معينة مثل h = a وهذه الإزاحة a تسمى المدى وبعـدها نلاحـظ التغـاير يبـدأ بالتلاشي في دالة الفاريوكرام وهذا يفسر لنا خارج منطقة الظاهرة، أي عدم توافر تأثير لها أو وجودها بكميات قليلة جدا .

من تعريف دالة شبه الفاريوكرام يتبين بأنها دالة متزايدة مع ازدياد h ويستقر ويـصبح مساويا للتباين، ويستلزم الخواص الآتية:

1. $\gamma(0) = 0$
2. $\gamma(h) = \gamma(-h)$

أي أن دالة الفاريوكرام متناظرة

وبشكل عام عندما تزداد الإزاحة h فان متوسط مربع الفرق بين المتغيرين Z(x) و Z(x+h) يتجه بالتزايد أيضا ، وتسمى عنئذ بدالة شبه الفاريوكرام الشكل (3).

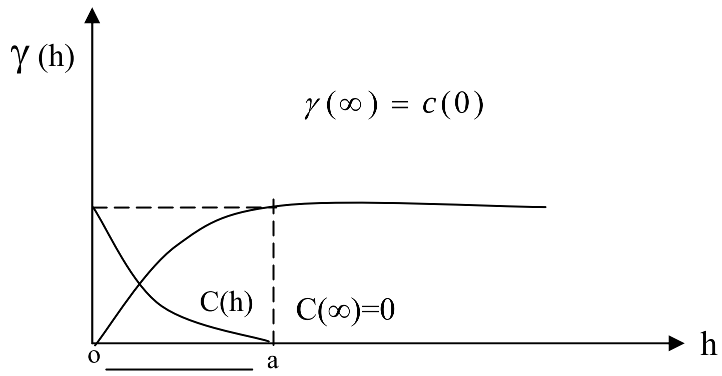


الشكل 3: تزايد دالة شبه الفاريوكرام

عندئذ فان قيمة $\gamma(\infty)$ تسمى الـ " Sill " في مصطلحات الاحصاء المكاني، Dubrule (2003). وهي ببساطة تعني التباين الاولـي Apriori variance C(0) للدالـة العـشوائية المكانية أي انه : $\lim_{h \to \infty} \gamma(h) = \gamma(\infty) = C(0)$ ، Cressie(1993)

حالات كهذه يكون فيها التباين الاولي موجودا وكـذلك دالتـا التغـاير والفـاريوكرام وتتميزان بواسطة قيمة الـ Sill والمدى Range تدعى بالانتقال وتناظر الدالـة العـشوائية

المكانية التي هي ليس فقط تحقق الفرضية الاساسية ولكن ايضا تحقق الاستقرارية من الرتبـة الثانية . الشكل(4).



الشكل 4: دالة التغاير والفاريوكرام

4- صياغة النموذج الخطي العام في الإحصاء المكاني

لتكن لدينا العملية العشوائية المكانية $X \in R^2$ و $x=(u,v)^T$ و $\{Z(x), X \in D\}$

وإذا كان المتغير المكاني Z(x) خطياً يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x)\beta_i + e(x) = f^T(x)\beta + e(x) \qquad \forall x \in D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

حيث ان β_i معلمات مجهولة و $f_i(x)$ دوال معلومة تمثل احـداثيات المواقـع أن المتغيـر المكاني Z(x) يحقق الفرضيات الآتية :

الفرضية الاولى :

$$E[Z(x)] = f^T(x)\beta \quad . \quad \forall x \in D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

الفرضية الثانية :

$$E[Z(x+h)-Z(x)]^2 = 2\gamma(h) \qquad \forall x, x+h \in D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ويكون $2\gamma(h)$ موحد الخواص (Isotropic)

أي يعتمد فقط على المسافة h وليس على الاتجاه ،Journel(1986).

الفرضية الثالثة : دالة التغاير موجودة ومعرفة كالآتي

$$Cov[Z(x),Z(x+h)] = C(h) \qquad \forall x, x+h \in D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

.Goovaerts(1997)

نفترض أن لدينا n من المشاهدات للمتغير المكاني هي

$Z(x1)\ , Z(x2), Z(x3)\ , \ldots\ldots\ldots, Z(xn)$

عند المواقع

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots,. x_n$

عندئذ يمكن كتابة النموذج (3) بلغة المصفوفات وكالاتي :

$Z = F\beta + e$

حيث أن:

$$\begin{pmatrix} Z(x_1) \\ Z(x_2) \\ \vdots \\ Z(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_n & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_o \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(x_1) \\ e(x_2) \\ \vdots \\ e(x_n) \end{pmatrix}$$

5- التقريب الخطي للدالة غير الخطية

نتناول هذه الفقرة لان في هذه البحث دالة الفاريوكرام الكروية يتطلب تقدير معلماتهـا بواسطة مقدر أصغر معيار تربيعي غير متحيز وهذا الأسلوب يتطلب أن تكون دالة التغـاير خطية في المعلمات ، Rao and Kleffe (1988).

فرضا أن الدالة $\varphi(s)$ هي دالة غير خطية في المتغيرات s_i

$s = (s_1, s_2,. \ldots\ldots. s_r)^T$

ونقطـة جـوار معلومـة $s_0 = (s_{10}, s_{20},. \ldots\ldots. s_{r0})^T$ وجميـع مـشتقات الجزيئـة للدالة $\varphi(s)$ موجودة ومعرفة .

عندئذ يمكن كتابة الدالة $\varphi(s)$ بواسطة تبسيط سلسلة تيلـر (Taylor Series Expansion) حول النقطة s_0 كالاتي:

$$\varphi(s) = \varphi(s_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k_!} \left[(s - s_o)^T \operatorname{grad}_s \varphi \big|_{s=s_o} \right]^k + Rm(s, s_o)$$

ونطبق التقريب الخطي على دالة التغاير (النموذج الكـروي) والمعرفـة بالـشكل الاتـي :

$$c(h) = \Psi_o + \Psi \left[(1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} (\frac{h}{a})^3) \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$$

وبعد عمل التقريب الخطي ستكون دالة التغاير لها الشكل الاتي: خضير (2011).

$$c^*(h;\theta) = k_o(h) + \sum_{i=1}^{r} (\theta_i - \theta_{io}) k_i(h)$$

$$= k_o(h) + \sum_{i=1}^{r} \theta_i k_i(h) - \sum_{i=1}^{r} \theta_{io} k_i(h)$$

$$= k_o(h) - \sum_{i=1}^{r} \theta_{io} k_i(h) + \sum_{i=1}^{r} \theta_i k_i(h) \quad ....(9)$$

حيث أن:

$$k_i(h) = \left(\frac{\partial c(h;\theta)}{\partial \theta_i} \right)_{\theta=\theta_o}$$

$$k_o(h) = \left(c(h;\theta) \right)_{\theta=\theta_o}$$

6- الانحدار الخطي المتعدد:

تتضمن معظم مسائل الانحدار أكثر من متغير مستقل واحد وبشكل عام يمكن كتابة نموذج الانحدار الخطي المتعدد بالشكل الآتي :

$$Z(xi) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + e_i \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$i = 1,2,\ldots,n$

$j = 1,2,\ldots,k$

حيث أن x_{ij} دوال معلومة تمثل إحداثيات مواقع المشاهدات $Z(x_i)$

وان $\beta_0 , \beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_k$ هي معلمات غير معلومة يتطلب تقديرها من البيانات المتوافرة.

يمكن كتابة النموذج (10) بصيغة المصفوفات

$$Z = F\beta + e \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

وهذا النموذج يسمى بالنموذج الخطي العـام (General Linear Model) حيـث أن Z متجه بسعة (n) من المشاهدات و F مـصفوفة معلومـة بـسعة ($n\times(k+1)$) مـن إحـداثيات المشاهدات و β متجه من المعلمات المجهولة بسعة (k+1) وان e متجـه الأخطـاء العـشوائية بسعة (n) .

وان :

$E(e) = 0$

$Var(e) = C$

8- النموذج الرياضي لمتنبأ الانحدار :

يمكن كتابة المعادلة (10) بالشكل الآتي

$$\hat{Z}(x_i) = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 u_i + \hat{\beta}_2 v_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(12)$$

حيث ان v_i,u_i تمثل احداثيات مواقع المشاهدات $Z(x_i)$

وان $\hat{\beta}_o, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ معلمات مجهولة تم حسابها من قانون مقدر المربعات الصغرى العامة وكالاتي:

$$\hat{\beta} = \left(F^T \hat{C}^{-1} F \right)^{-1} F^T \hat{C}^{-1} Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(13)$$

حيث أن $\hat{C}$ تمثل مصفوفة التغاير.

وأن تباين $\hat{\beta}$ هو:

$$Var(\hat{\beta}) = \left(F^T \hat{C}^{-1} F \right)^{-1}$$

وتباين التقدير $\hat{Z}(x_i)$ هو

$$Var\left(\hat{Z}(x_i) \right) = F Var(\hat{\beta}) F^T$$

وأن

$$b4 = diag[Var(\hat{Z}(xi))] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(14)$$

والتي تمثل تباين تنبؤ الانحدار

9- نظرية كريكنك:

أن مسألة التنبؤ الموقعي (Local prediction) في الإحصاء المكاني هي الحصول على أفضل تنبؤ لمتوسط المتغير المكاني المعرف في منطقة الدراسة ذات بعدين أو ثلاثة أبعاد مع افتراض الفرضية الأساسية أو الاستقرارية في المنطقة قيد الدراسة.

حيث أن الاستقرارية قد تكون في كثير من الدراسات العملية غير متوافرة. وسيقتصر بحثنا على التنبؤ الخطي الذي يتضمن ان متوسط العملية العشوائية له اتجاه (Trend) حيث يعتمد على موقع المتغير المكاني (Boogaart(1999.

10- النموذج الرياضي لمتنبأ كريكنك:

نفترض ان μ وسط العملية العشوائية المكانية $\{Z(x), X\in D\}$ غير معلوم ان $E[Z(x)] = \mu$ ، ونريد التنبؤ عن $Z(x_0)$ عند الموقع (x_0) .

ان افضل متنبا خطي غير متحيز $\hat{Z}(x_o)$ يكون كالآتي

$$\hat{Z}(x_o) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

حيث ان

$$Z = (Z(x_1), Z(x_2), \ldots\ldots\ldots Z(x_n))^T$$

$$\lambda = \gamma^{-1}\gamma_o - \gamma^{-1}F\left(\left(F^T\gamma^{-1}F\right)^{-1}\left(F^T\gamma^{-1}\gamma_o - f(x_o)\right)\right) \ldots\ldots.(16)$$

ولكي يكون $\hat{Z}(x_o)$ افضل متنبا خطي غير متحيز يجب تحقيق الشرطين الآتيين:

1. $E\left(\hat{Z}(x_o)\right) = Z(x_o)$

2. $\sigma_k^2 = \operatorname{var}\left(\hat{Z}(x_o) - Z(x_o)\right)$ is minimum

هذا التباين يدعى تباين كريكنك . خضير (2011) وله الصيغة الاتية:

$$\sigma_k^2 = \gamma_o^T\gamma^{-1}\gamma_o - \left[\left(\gamma_o^T\gamma^{-1}F - f^T(x_o)\right)\left(F^T\gamma^{-1}F\right)^{-1}\left(F^T\gamma^{-1}\gamma_o - f(x_o)\right)\right]..(17)$$

11- الجانب التطبيقي:

تمثل في التنبؤ عن مستويات المياه الجوفية لبيانات حقيقية تمثل ارتفاع مناسـيب آبـار المياه الجوفية في قضاء سنجار في محافظة نينوى، وتمثل هذه البيانـات (47) (بئـراً) مـع إحداثياتها حيث أن $Z(x_i)$ تمثل ارتفاع منسوب المياه الجوفية فيها بوحدة المتر في البئر عنـد الموقع $x_i = (u_i,v_i)$ والتي تمثل إحداثيات البئر في هذه النقطة، تم الحصول على هذه البيانات من رسالة ماجستير غير منشورة . المحسن (1985)، والجدول (1) يوضح البيانات الحقيقيـة مع احداثيات مواقعها.

جدول 1: البيانات الحقيقية مع إحداثيات مواقعها

ت	u	v	z(x)
1	1.9	3.7	6.2
2	3.8	4.3	7.4
3	1.5	3.7	6.2
4	1.4	3.9	6.2
5	4.5	4.4	7.3
6	1.8	3.8	6.1
7	1.5	4	6.1
8	3	4	3.6
9	3	5.1	3.4
10	3.3	4.9	3.4
11	4	4.5	7.5
12	4.9	4.2	7.4
13	1.7	3.5	6.2
14	4.7	4	7.3
15	1.8	3.4	6.2
16	1.7	2.9	6.2
17	0.8	3.1	3.9
18	0.8	3.3	3.5
19	0.8	3	3.5
20	3.2	3.6	3.2
21	3	3.9	7.2
22	1.7	3.8	6.2
23	1.5	3.9	6.2
24	4.5	4.2	7.3
25	1.5	3.1	6.1
26	1.3	5.1	5.8
27	1.1	5.4	5.6
28	1.2	4.4	5.4
29	1.4	4.2	5.3
30	3.2	3.9	7.1
31	1.6	3.5	6.2
32	1.8	3.1	6.1
33	1.8	3.3	6.2
34	1.8	2.9	6.1
35	1.1	5.1	5.8
36	1.5	4.9	5.6
37	1.4	5.4	5.2
38	1.4	4.7	5.2
39	1.7	2.8	6
40	1.5	3	6
41	2	3.3	6.1
42	0.8	4.5	5.9
43	1.3	4.9	5.6
44	1.2	5.2	5.6
45	1	4.4	5.2
46	1	4.2	5.1
47	0.7	3.1	3.9

12- تحليل البيانات وملاءمة أنموذج الفاريوكرام :

تم حساب مصفوفة المسافات بين (47) بئرا وذلك باستخدام قانون المسافة الاقليدية والتي يرمز لها بالرمز h.

$$h_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$$

حيث أن كل موقع يتمثل بالإحداثيات

$u_i , v_i \quad i = 1,2,\ldots,47$

$u_j , v_j \quad j = 1,2,\ldots,47$

وهكذا تم الحصول على مصفوفة ذات بعد (47×47) تحتوي على جميع المسافات بين أزواج المشاهدات . وقسمت هذه المسافة إلى عشر فئات بحيث شملت هذه الفئات اقل قيمة واكبر قيمة للمسافة ، ثم حساب مركز كل فئة ليمثل المسافة التقريبية h . وكذلك تم حساب

عدد أزواج المشاهدات n(h) التي تبعد عن بعضها البعض مسافة h لكل فئـة، وأخيـرا تـم حساب دالة الفاريوكرام لكل فئة من خلال تطبيق المعادلة (2) والمعادلة (3) والنتائج موضحة في الجدول (2).

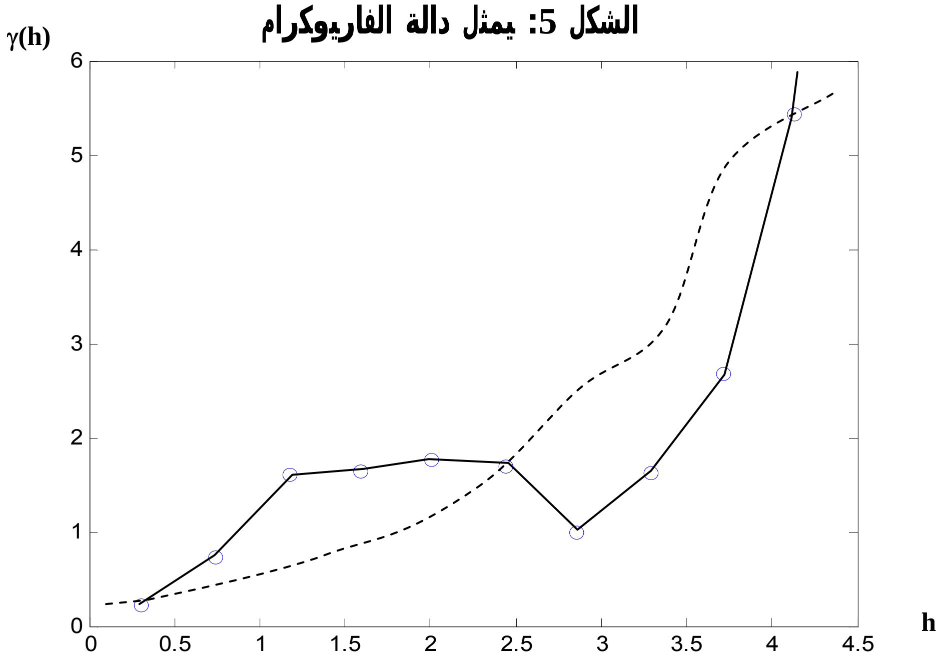
الجدول 2: نتائج حساب دالة الفايروكرام

ألفئات	أ د الأد	أ د الأعلى	أ ركز (h)	n(h)	$[z(xi)-z(xi+h)]^2$	γ(h)
فئة(1)	0.1	0.5099	0.305	150	0.3224	0.2264
فئة(2)	0.5385	0.9487	0.7436	150	0.7601	0.7298
فئة(3)	0.9849	1.3601	1.1725	181	1.1515	1.6026
فئة(4)	1.3892	1.7889	1.589	157	1.5761	1.6375
فئة(5)	1.8	2.2204	2.0102	147	1.9893	1.7677
فئة(6)	2.2361	2.6476	2.4419	117	2.4162	1.6901
فئة(7)	2.6571	3.048	2.8525	62	2.8514	0.9945
فئة(8)	3.0806	3.5	3.2903	68	3.2163	1.6201
فئة(9)	3.5057	3.9217	3.7137	35	3.5871	2.6791
فئة(10)	3.9319	4.3417	4.1368	14	3.7962	5.4261

13- تحديد نموذج الفاريوكرام:

تم رسم العلاقة بين h,γ(h) ومن ثم توفيق منحني الفاريوكرام بتمرير أفضل منحنٍ بين نقاط تلك العلاقة ويوضح الشكل(5) دالة الفاريوكرام .

الشكل 5: يمثل دالة الفاريوكرام



نلاحظ من الشكل (5) ان المنحني يستمر في الصعود وهذا دليـل علـى ان العمليـة العشوائية المكانية لهذه البيانات غير مستقرة .

Cressie (1993)

إلا انه من الممكن اعتماد النموذج الكروي الاتي:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \psi_o + \psi\left[\frac{3}{2}(h/a) - \frac{1}{2}(h/a)^3\right] & \text{if} \quad h < a \\ \psi_o + \psi & \text{if} \quad h \geq a \end{cases}$$

حيث a, ψ, ψo هي معلمات النموذج الكروي والتي يتم الحصول عليها بشكل تقريبي من رسم منحني دالة الفاريوكرام والتي تعد قيماً ابتدائية لهذه المعلمات وكما يأتي: نلاحـظ ان المنحني يقطع المحور العمودي $\gamma(h)$ عند $\psi o=0.2$ والمنحني يزداد ارتفاعاً ويكـاد يـستقر عند $h=4.14$ مما يدل على ان المدى $a=4.14$ ، نلاحظ ان دالة الفاريوكرام تـستقر عنـد $\gamma(h)=5.5$ والذي يساوي التباين تقريبا .

14- تنبؤ اسلوب الانحدار:

تم حساب القيم التنبؤية للانحدار من المعادلة (12) وكالاتي:

$$\hat{Z}(x_i) = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 u_i + \hat{\beta}_2 v_i$$

وكذلك تم حساب تباين الانحدار من المعادلة (14) والجدول (3) يمثل نتـائج القـيم التنبؤيـة للانحدار ، حيث كان متوسط مربعات الخطأ مقداره :

Mse=1.1843

الجدول 3: القيم التنبؤية للانحدار

ألتسلسل	u	v	z(xi)	z^(xi)	v(z^(xi))
1	1.9	3.7	6.2	5.6335	1.0426
2	3.8	4.3	7.4	6.5526	2.1691
3	1.5	3.7	6.2	5.4578	1.1254
4	1.4	3.9	6.2	5.4421	1.1299
5	4.5	4.4	7.3	6.8742	3.2492
6	1.8	3.8	6.1	5.6036	1.0306
7	1.5	4	6.1	5.5001	1.0885
8	3	4	3.6	6.1589	1.3487
9	3	5.1	3.4	6.3142	1.9118
10	3.3	4.9	3.4	6.4177	1.9618
11	4	4.5	7.5	6.6687	2.5051
12	4.9	4.2	7.4	7.0216	3.9534
13	1.7	3.5	6.2	5.5174	1.1423
14	4.7	4	7.3	6.9056	3.5496
15	1.8	3.4	6.2	5.5472	1.1759
16	1.7	2.9	6.2	5.4327	1.5852
17	0.8	3.1	3.9	5.0656	1.8617
18	0.8	3.3	3.5	5.0939	1.7169
19	0.8	3	3.5	5.0515	1.9482
20	3.2	3.6	3.2	6.1903	1.5814
21	3	3.9	7.2	6.1448	1.354
22	1.7	3.8	6.2	5.5597	1.048
23	1.5	3.9	6.2	5.486	1.0914
24	4.5	4.2	7.3	6.8459	3.1986
25	1.5	3.1	6.1	5.3731	1.4535
26	1.3	5.1	5.8	5.5675	1.7653
27	1.1	5.4	5.6	5.522	2.2414
28	1.2	4.4	5.4	5.4248	1.3099
29	1.4	4.2	5.3	5.4844	1.1499
30	3.2	3.9	7.1	6.2326	1.5082
31	1.6	3.5	6.2	5.4735	1.1662
32	1.8	3.1	6.1	5.5048	1.3836
33	1.8	3.3	6.2	5.5331	1.2357
34	1.8	2.9	6.1	5.4766	1.5692
35	1.1	5.1	5.8	5.4797	1.8812
36	1.5	4.9	5.6	5.6271	1.4857
37	1.4	5.4	5.2	5.6538	2.0766
38	1.4	4.7	5.2	5.555	1.3713
39	1.7	2.8	6	5.4186	1.6919
40	1.5	3	6	5.359	1.5411
41	2	3.3	6.1	5.6209	1.2236
42	0.8	4.5	5.9	5.2632	1.6386
43	1.3	4.9	5.6	5.5393	1.5729
44	1.2	5.2	5.6	5.5377	1.9303
45	1	4.4	5.2	5.337	1.4376
46	1	4.2	5.1	5.3087	1.376
47	0.7	3.1	3.9	5.0217	1.948

15- تنبؤ اسلوب كريكنك:

تم اخذ مواقع المشاهدات الحقيقية وقيمها في منطقة الدراسة وتطبيق العملية العـشوائية المكانية التي لها النموذج المقترح اعلاه، ولغرض تطبيق المعادلة رقم (15) لابد من حـساب مصفوفة الاوزان λ وذلك من خلال المعادلة (16) ولقد تم حساب هذه المصفوفة وكذلك تـم حساب تباين كريكنك لكل تنبؤ وفق المعادلة (17) وبالطريقة نفسها يتم حساب او تنبـؤ بقيـة المواقع المكانية الاخرى، والجدول (4) يبين القيم التنبؤية للكريكنك وكذلك تم حساب متوسـط مربع الخطا وقيمته mse=0.9297

الجدول 4: القيم التنبؤية للكريكنك

ت	u	v	z(x)	z^(x)	σ_k^2
1	1.9	3.7	6.2	6.0141	0.2518
2	3.8	4.3	7.4	6.15	0.2204
3	1.5	3.7	6.2	5.8653	0.2587
4	1.4	3.9	6.2	5.7299	0.2584
5	4.5	4.4	7.3	7.036	0.2175
6	1.8	3.8	6.1	6.0081	0.2567
7	1.5	4	6.1	5.7972	0.2588
8	3	4	3.6	6.0741	0.236
9	3	5.1	3.4	5.3358	0.1641
10	3.3	4.9	3.4	5.6046	0.1909
11	4	4.5	7.5	6.3146	0.216
12	4.9	4.2	7.4	7.3989	0.1659
13	1.7	3.5	6.2	6.0362	0.2633
14	4.7	4	7.3	7.3026	0.195
15	1.8	3.4	6.2	6.0701	0.2623
16	1.7	2.9	6.2	5.8534	0.2532
17	0.8	3.1	3.9	4.3614	0.2407
18	0.8	3.3	3.5	4.6539	0.2312
19	0.8	3	3.5	4.5051	0.2283
20	3.2	3.6	3.2	6.6016	0.204
21	3	3.9	7.2	5.1883	0.238
22	1.7	3.8	6.2	5.9889	0.2607
23	1.5	3.9	6.2	5.8516	0.2622
24	4.5	4.2	7.3	7.1156	0.2277
25	1.5	3.1	6.1	5.6906	0.2542
26	1.3	5.1	5.8	5.4405	0.2533
27	1.1	5.4	5.6	5.2535	0.2075
28	1.2	4.4	5.4	5.4714	0.2509
29	1.4	4.2	5.3	5.6914	0.2505
30	3.2	3.9	7.1	5.384	0.234
31	1.6	3.5	6.2	5.9491	0.2607
32	1.8	3.1	6.1	6.0227	0.2565
33	1.8	3.3	6.2	6.0556	0.2614
34	1.8	2.9	6.1	5.9458	0.2474
35	1.1	5.1	5.8	5.4022	0.2446
36	1.5	4.9	5.6	5.4478	0.2432
37	1.4	5.4	5.2	5.3801	0.2135
38	1.4	4.7	5.2	5.5553	0.2471
39	1.7	2.8	6	5.8109	0.2373
40	1.5	3	6	5.6614	0.2516
41	2	3.3	6.1	6.0768	0.2456
42	0.8	4.5	5.9	5.0632	0.2197
43	1.3	4.9	5.6	5.4888	0.2534
44	1.2	5.2	5.6	5.4432	0.2492
45	1	4.4	5.2	5.3876	0.2468
46	1	4.2	5.1	5.3489	0.2411
47	0.7	3.1	3.9	4.2345	0.2275

نلاحظ أن متوسط مربع الخطأ mse في أسلوب كريكنك اقل من متوسط مربع الخطأ في أسلوب الانحدار وكذلك تباين التقدير (أي التنبؤ) في أسلوب كريكنك اقل بشكل ملحوظ من تباين التنبؤ في أسلوب الانحدار ، وهذا دليل واضح على أن أسلوب كريكنك أفضل من أسلوب الانحدار وعليه نعتمد على تنبؤ أسلوب كريكنك وهذا يمثل نتيجة أساسية في سبب اعتماد التنبؤ في الإحصاء المكاني على أسلوب الكريكنك .

16- الاستنتاجات:

1. نلاحظ من خلال رسم منحني دالة الفايروكرام ان المنحني يستمر في الصعود فهذا دليل على ان العملية العشوائية المكانية غير مستقرة.
2. نتائج التنبؤ (التقدير) في الكريكنك أفضل من نتائج التقدير في الانحدار وذلك لان تباين التنبؤ للكريكنك اقل بشكل ملحوظ من تباين التنبؤ للانحدار وكذلك متوسط مربع الخطأ في الكريكنك اقل من متوسط مربع الخطأ للانحدار وعليه يكون الأفضل دائما استخدام أسلوب الكريكنك في التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية .

17- التوصيات :

1. يمكن التوسع بهذه الدراسة مستقبلا وذلك بادخال عوامل اخرى مثل (الزمن ، درجـة الحرارة ، الامطار)، او عوامل لها علاقة بارتفـاع وانخفاضـها مـستويات الميـاه الجوفية.
2. يمكن التنبؤ عن ظاهرتين في نفس الوقت قد يكون مستوى ارتفـاع منـسوب الميـاه الجوفية وتركيز الأملاح في هذه المياه, وهذا ما يعرف بإسلوب كريكنـك المـشترك Cokriging Technique أو أسلوب كريكنك متعدد المتغيرات .

18- المصادر:

1. خضير،بشار طه (2011): التنبؤ بواسطة الانحدار والكريكنك للبيانات المكانيـة مـع التطبيق، رسالة ماجستير غير منشورة في الرياضيات،جامعة الموصل كلية التربية.
2. المحسن، اسباهية يونس (1985) : " المياه الجوفية في منطقة سنجار واستثماراتها " ، رسالة ماجستير (غير منشورة) في الجغرافية الطبيعية ، جامعة بغداد ، كلية الآداب.
3. Boogaart, K.G. (1999): " New Possibility for Modeling Variorums In Complex Geology " , to Appear In Proc. of Stat GIS 1999.
4. Cressie, N., (1993). Statistic, for Spatial Data. J. Wiley, New York Second Edition.
5. Diggle, P.J. and Ribeirro, P.J., (2007). Model-based Geostatistics. Springer. Berlin. London.
6. Dubrule, O., (2003). Geostatistics for Seismic Data Integration in Earth Models, America.
7. Goovaerts, P., (1997). Geostatistics for Natural Resource Evaluation, Oxford University Press, Oxford.
8. Journel, A.G., (1986). "Geostatistics Models and tools for the Earth Sciences", Mathematical Geology, No. 18, PP. (119-140).
9. Krige, D.G., (1951). A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems at the Witwatersrand? Unpublished M. Sc. Thesis University of the Witwatersrand, Johonnesburg (C.T) Histroical Thesis.
10. Rao, C.R., and Kleffe, J., (1988). Estimation of Variance Components and Application.S. North-Holland, New York.
11. Stein, M.L., (1999). Interpolation of Spatial Data : Some Theory for Kriging, Springer, New York.