التحليل الحركي لدوال العرض والطلب

أ.م.د محسن عبد الله حسن
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة كربلاء

المستخلص

يدور البحث ضمن إطاريه النظري والتطبيقي على التحليل الحركي للمتغيرات الاقتصادية باستخدام أساليب القياس الاقتصادي والمعادلات التفاضلية.

ركز البحث نظرياً وتطبيقياً على تحليل دالتي العرض والطلب تم استخدام الأسلوب القياسي لأجل تحديد معالم دالتي العرض والطلب . ثم تم توليف ذلك مع استخدام المعادلات التفاضلية للتوصل إلى النتائج النهائية.

تم التوصل إلى نتائج رائعة أكدت أهمية استخدام هذين الأسلوبين في التحليل .

المقدمة

أصبح من الواضح في الزمن المعاصر التعقيد المستمر في الحياة الاقتصادية بشكل كبير بسبب الكم الهائل من التعاملات إضافة إلى المؤثرات الاقتصادية داخلياً وخارجياً.

لذا بدا من غير الممكن اعتماد التوازن الساكن أو الساكن المقارن على مستوى التشكيل الهائل من التغيرات و المتغيرات المؤثرة فيها.

عليه فان اعتماد التوازن الحركي يعتبر السبيل الوحيد الذي يمكن من خلاله التوصل إلى معرفة نقاط التقارب والتباعد ما بين المتغيرات الاقتصادية عبر الزمن.

استناداً لذلك يهدف البحث استخدام أساليب حديثة يمكن من خلالها تحليل التوازن الحركي للمتغيرات الاقتصادية بشكل عام ومتغيري العرض والطلب كحالة دراسية خاصة.

لذا جاء البحث بفرضية مفادها :

يعتبر التوازن الحركي الأسلوب الأمثل لتحليل واقع المتغيرات الاقتصادية عبر الزمن.

تعتبر المعادلات التفاضلية أسلوبا متقدماً في تشخيص نقاط التقارب والتباعد ما بين المتغيرات الاقتصادية عبر المسار الزمني.

أولا : المنطق التحليلي في ظل استخدام المعادلات التفاضلية.

لو كانت لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$Y_{(t)}^{n} + a_1 Y_{(t)}^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} Y_{(t)} + a_n Y = b$ ....(1)

وبشكل مختصر ومحدد ،

$Y_{(t)} + a_1 Y_{(t)} + a_2 Y = b$ .... (2)

حيث إن كل من (a_1 , a_2 , b_1) ثوابت .

لو كان الحد الثابت (b) يساوي صفراً ، حينئذ تسمى المعادلة بالمعادلة المتجانسة . لكن إذا كان الحد الثابت (b) لا يساوي صفراً ، حينئذ ستكون المعادلة غير متجانسة.

في الحالة التي تكون فيها ، $b \neq 0$ فان الحل الخاص بالعلاقة(٢) سيكون بالشكل

$Y_{(t)} = Y_c + Y_p$

حيث إن Y_p تمثل التكامل الخاص (particular integral) كحل رياضي فضلا عن انه يعطي القيمة التوازنية للمعادلة Y_t ، بينما يشير Yc إلى انحراف Y_t عن حالة التوازن . علماً إن التكامل الخاص للعلاقة(٢) يكون بالشكل .

$Yp = \frac{b}{a2}$ .... (3) $a_2 \neq 0$

إضافة لذلك يمكن القول إن Yc تمثل الدالة المتممة للعلاقة (٢) .

لكن لو كانت المعادلة التفاضلية بالشكل

$Y_{(t)} + a_1 Y_{(t)} + a_2 Y = 0$ .... (4)

هنا نتساءل كيف يمكن التوصل إلى الحل المطلوب . لكن لو تمعنا النظر بالمعادلة الاسية من النوع ($Y=Ae^{rt}$) للاحظنا انها تعتبر أسلوبا مناسباً لحل العلاقة (٤) وفي هذا المجال لنعتبر إن

$\bar{Y}_{(t)} = rAe^{rt}$

وان

$\bar{\bar{Y}}_{(t)} = r^2 Ae^{rt}$

على اعتبار إن العلاقة الأولى هي المشتقة الأولى للمتغير Y وان العلاقة الثانية هي المشتقة الثانية للمتغير Y .

استناداً إلى الصيغ (Y , Y , Y) يمكن إن نحول العلاقة (٤) إلى الشكل التالي :

$Ae^{rt} (r^2 + a_1 r + a^{a2}) = 0$ .... (4a)

على اعتبار إن القيم المتعلقة بكل من (A , r) تستوفي العلاقة (٤) . لذا فان محاولة الحل للعلاقة ($Y=Ae^{rt}$) يجب إن تتحقق وذلك بتعريف قيمة الثابت A وذلك باستخدام الشروط الابتدائية للمسألة . فضلا عن إن قيم r يجب إن تستوفي العلاقة

$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ .... (4b)

إن العلاقة أعلاه تعرف بأنها المعادلة المميزة للمعادلة (٤) أو انها المعادلة الكاملة للعلاقة (٢) لأنها عبارة عن معادلة تربيعية في r إذ انها تعطي جذرين في الحل حيث يشار لهما بالجذرين المميزين . إذ يعبر غنهما بالشكل ،

$$r_1 , r_2 = \frac{-a1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

حيث إن بين هذين الجذرين علاقة بسيطة والتي يمكن إن تستخدم كأوساط ملائمة في مسار الحل . إذ إن مجموع هذين الجذرين يساوي $-a_1$ وان حاصل ضربهما يساوي a_2 . أي إن :

$$r_1 + r_2 = \frac{-a1 + \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2} + \frac{-a1 - \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2} = \frac{-2a1}{2} = -a1$$

$$r_1 . r_2 = = \frac{-a1 + \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2} + \frac{-a1 - \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2}$$

$$= \frac{(-a1)^2 - (a_1^2 - 4a2)}{4} = \frac{4a2}{4} = a2$$

إن قيمة هذين الجذرين هي فقط القيم التي سوف نحددها لـ r إثناء حل العلاقة ($Y=Ae^{rt}$) لكن هذا يعني إن هناك حلين للعلاقة وعلى الشكل التالي ،

$Y_1=A_1e^{r1t}$

$Y_2=A_2e^{r2t}$

حيث إن كل من A_2, A_1 هما ثابتان وان كل من r_1, r_2 هما جذرين مميزين تم الحصول عليهما من العلاقة (٥) لذا نحتاج إلى حل عام واحد يستوفي كل من الثابتين A_2,A_1 ومؤهل كحل عام لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية . إن هذا يأتي من الحقيقة القائلة انه لدى مفاضلة العلاقة $y_{(t)}$ للمشتقة الثانية $\bar{\bar{Y}}_{(t)}$ فانه سوف نفقد ثابتين خلال عملية الاشتقاق. لذا فان العودة ثانية إلى العلاقة Yt فان ذلك يحصل بالتكامل لذا يتطلب ذلك إضافة ثابتين ، حيث يكون إمامنا طريق واحد وهو جمع كل من Y_1 , Y_2 لأجل تضمين كلا الثابتين A_1 , A_2 ويمكن لنا إن ننهي ذلك من خلال عملية جمع Y_1+Y_2 كحل عام للعلاقة (٤) فإذا كان كل من Y_1 , Y_2 هما حل للعلاقة (٤) فان تعويضهما وفقاً لترتيبهما في العلاقة (٤) سيكون بالشكل :

$$\bar{\bar{Y}}_{1t} + a_1\bar{Y}_{1t} + a_2Y_1 = 0$$

$$\bar{\bar{Y}}_{2t} + a_1\bar{Y}_{2t} + a_2Y_2 = 0$$

وبجمع هاتين العلاقتين نحصل على:

$$(\bar{\bar{Y}}_{1t} + \bar{\bar{Y}}_{2t}) + a_1(\bar{Y}_{1t} + \bar{Y}_{2t}) + a_2(Y_1 + Y_2) = 0 \qquad (6)$$

$$d2/d2t(Y1 + Y2) \qquad d/dt(Y1 + Y2)$$

نستنتج إن عملية الجمع تستوفي العلاقة (٤) بالشكل المطلوب وفقاً لذلك فأن الحل العام للعلاقة (٤) (أي المعادلة المتجانسة) أو بتعبير أدق الدالة لمتممة للعلاقة (٢) يمكن إن يكتب بالشكل ($Y_c = Y_1 + Y_2$) وحسب صيغة الجذور المميزة المشار إليها بالعلاقة (٥).

وبقدر تعلق الأمر بقيم الجذرين r_1 , r_2 فان ثلاثة خالات يمكن إن تعتمد في مجال الحل حسب طبيعة كل من r_1 , r_2 وعلى الشكل التالي :

الحالة الأولى: الجذر المميز الحقيقي (distinct real root) :

عندما تكون $a_1^2 > 4a_2$ فان الجذر ألتربيعي في العلاقة (٥) هو عبارة عن عدد حقيقي وان الجذرين r_1 , r_2 سيأخذان قيم حقيقية مميزة عليه يمكن إن نكتب الآتي :

$Y_c = Y_1+Y_2 = A_1e^{r1t} +A_2e^{r2t}$ .... (7)

الحالة الثانية: الجذر المتكرر:

حينما تكون المعاملات في المعادلة التفاضلية بالشكل $a_1^2 = 4a_2$ فان الجذر ألتربيعي في العلاقة (٥) سوف يتلاشى وان الجذرين المميزين سيأخذان قيم متماثلة ، أي إن :

$r\ (= r_1 = r_2) = \frac{-a1}{2}$

إن مثل هذه الجذور تسمى بالجذور المتكررة، لذا ووفقاً لحالة الجذور المتكررة لو كتبنا الدالة المتممة بالشكل:

$Y_c = Y_1 + Y_2$

فان المجموع سينتهي في صيغة مفردة (إي سنحصل على نتيجة واحدة) أي :

$Y_c = A_1e^{rt} + A_2e^{rt} = (A_1+A_2)e^{rt} = A_3e^{rt}$ .... (8)

حيث سنحصل على ثابت واحد فقط وهذه الحالة لم تطن كافية لتقودنا من معادلة تفاضلية من مرتبة ثانية إلى المعادلة الأصلية لذا فان الطريق الوحيد هو إيجاد حد يستوفي العلاقة (٤).

إن الصيغة التي ستؤدي هذا المطلب هي(A_4te^{rt}) إذ طالما إن المتغير t يدخل في عملية الضرب لذا فان هذا الحد المتمم هو حد مستقل خطياً عن الحد (A_3e^{rt}) لذا فان الدالة المتممة للجذر المتكرر هي :

$Y_c = A_3e^{r1t} +A_{4t}e^{r2t}$ .... (9)

الحالة الثالثة: الجذور المعقدة (The complex roots):

عندما تكون معاملات الدالة التفاضلية بالشكل $a_1^2 < 4a_2$ فان الجذر ألتربيعي في الصيغة (٥) يمكن إن يكتب بالشكل :

$$\sqrt{a_1^2 - 4a2} = \sqrt{4a2 - a_1^2} \, . \sqrt{-1} = \sqrt{4a2 - a_1^2\ i}$$

وهنا سنأخذ الصيغة المختزلة الشكل :

$$h= \frac{-a1}{2} \text{ and } v_i= \frac{\sqrt{4a2 - a_1^2}}{2}$$

إذ إن الجذرين يمكن إن يشار لهما بعدين معقدين أي :

$r_1 , r_2 = h \pm vi$

حيث إن هذين الجذرين المعقدين يقال لهما بالجذرين الثنائيين لأنهما دائماً يظهران سوية حيث إن احدهما يمثل مجموع vi , h والثاني يمثل الفرق ما بين vi, h لذا فان الدالة المتممة ستكتب بالشكل :

$$Y_c = e^{ht} (A_1e^{vit} + A_2e^{-vit}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

لو حولنا التعبير الآسي التصوري ما بين الأقواس إلى صيغة مثلثيه فان الدالة المتممة ستكون دالة مثلثيه وسوف تمثل باستخدام علاقات اويلر . وبالشكل التالي :

$$e^{i\text{Ø}} \equiv \cos\text{Ø} + i \sin \text{Ø} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$e^{-i\text{Ø}} \equiv \cos\text{Ø} - i \sin \text{Ø} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

وبجعل ($\text{Ø} = vt$) ، لذا سنحصل على :

$$e^{vit} = cosvt + i\, sinvt \text{ and } e^{-vit} = cosvt - isinvt \ldots\ldots\ldots (13)$$

ومن هذه العلاقة يتبع ذلك إن الدالة المتممة (Y_c) في الصيغة (١٠) ووفقاً للصيغتين (١١) و (١٢) يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي :

$$Y_c = e^{hit} [A_1 (cosvt + isinvt) + A_2 (cosvt - isinvt)]$$
$$= e^{ht} [(A_1+A_2) cosvt+(A_1-A_2)isinvt] \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

وبالاختزال نحصل على:

$$A_5 \equiv A_1 + A_2 \text{ and } A_6 \equiv (A_1 - A_2) i$$

لذا فان العلاقة ١٤ ستصبح :

$$Y_c = e^{ht} (A_5cosvt + A_6sinvt) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14a)$$

لو تمعنا بالعلاقة (١٤a) ولاحظنا الحد (A_5cosvt) نلاحظ إن ($cosvt$) هو دالة مثلثيه للمتغير vt بالفترة الزمنية : 2π

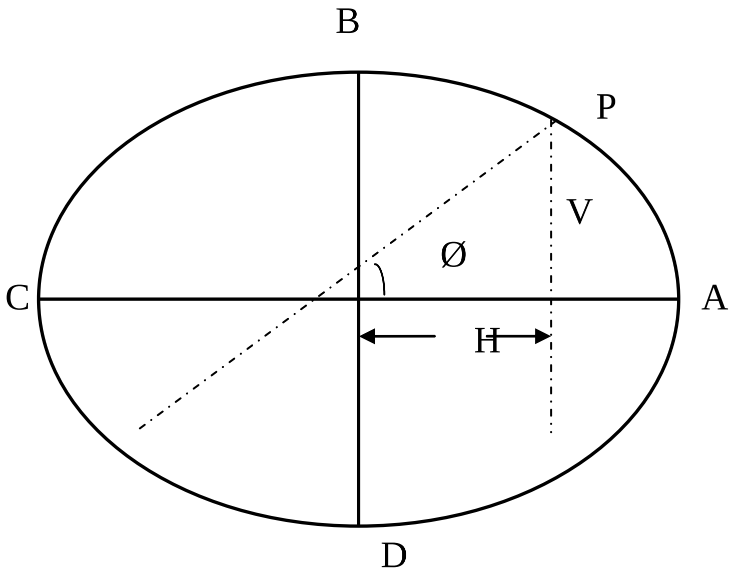
Where : ($2\pi = 6.2832$)

وبمدى قدره (١) : إن الفترة الزمنية 2π تعني إن النقطة تتكرر في كل وقت بحيث إن vt ستزداد بمقدار 2π ،وحينما نأخذ الزمن t كمتغير وحيد لذا فان التكرار سيحدث في كل زمن t بحيث تكون الزيادة بالمقدار $2\pi/v$.

لذا وبالإشارة إلى t على اعتبار انها مناسبة في التحليل الحركي لذا سوف نعتبر الفترة الزمنية ($cosvt$) على اعتبار انها تساوي $2\pi/v$. ولدى مضاعفة الثابت A_5 فان ذلك سينعكس على الحد ($cosvt$) لذا فان التذبذب في مستوى التغيير سيأخذ الشكل (± 1 to $\pm A_5$) هذا في حالة كون المدى قدره (١) .

إما عن الفترة الزمنية فستبقى كما هي . وبايجا زان الحد (A_5cosvt) هو عبارة عن دالة جيب تمام للزمنt وبفترة قدرها ($2\pi/v$) وبمدى قدره A_6.

لذا ستكون لدينا فترة عامة أو مشتركة حيث إن المقدار $(A_5cosvt+A_6sinvt)$ سوف يوفر لنا تكرار دائري في أي زمن t بحيث يزداد هذا التكرار بمقدار 2π/v وعند العودة إلى العلاقة $(Y_t = Y_c + Y_p)$ يمكن القول إن الحد Y_c يتألف من $(A_5cosvt+A_6sinvt)$ إن هذه الصيغة تمثل المسار الزمني للمتغير (Y) والذي لم ينتهي والذي بدوره يعبر عن مدى تذبذب معين حول مستوى التوازن (Y_p) إما عن الحد المضروب e^{ht} كما يبدو في الصيغة (١٤) فله أهمية كبيرة في التحليل الحركي ، وذلك لأنه يجيب عن السؤال القائل هل إن المسار الزمني سوف يتباعد لدى زيادة (t) أو انه سيتقارب أو سيبقى عند مستواه . وهنا يمكن القول انه في حالة كون h=0 لذا فان $e^{ht}=1$ وفي هذه الحالة فان الدالة المتممة المعبر عنها بالشكل $(A_5cosvt+A_6sinvt)$ سيكون مداها ثابت أي عند نقطة الاستقرار . إما لو كانت h< ٠ فان الحد e^{ht} سوف يتناقص باستمرار مع تزايد t وان كل دورة متعاقبة ستعبر عن مدى متصاغر عن الدورة السابقة لها . والعكس حينما تكون h> ٠ فإنها ستشير إلى تذبذب متزايد أي عن انحراف متزايد عن حالة التوازن علماً إن ما تم ذكره يتضح جلياً في الشكل أدناه.



علماً انه في المجال التطبيقي يثبت متغير الزمن على محيط الدائرة ويكون المسار الزمني معاكس لاتجاه عقرب الساعة.

ثانياً : المسار التوازني لدوال العرض والطلب :

استناداً إلى مفاهيم الزمن المستمر إن اتجاه الأسعار يمكن إيجاده باستخدام المشتقتين الأولى والثانية . ولأجل اخذ اتجاه الأسعار بالحسبان ستأخذ موضوع دالتي العرض والطلب ضمن استخدام المشتقتين الأولى والثانية في هذا المجال:

لو كانت لدينا الدالتين:

$$Q_d = D\,(\,p_{(t)}\,,\,\bar{P}_{(t)}\,,\,\bar{\bar{P}}_{(t)}\,)$$

$Q_s = s\,(p_{(t)}\,,\,\bar{P}_{(t)}\,,\,\bar{\bar{P}}_{(t)}\,)$ ………………………….. (15)

لو أكدنا على الحالة الخطية لهذه الدوال وبسطنا رموز المتغيرات المستقلة $(p, \bar{P}, \bar{\bar{P}})$ عليه يمكن كتابة الآتي :

$Q_d = \alpha - \beta P + m\bar{P} + n\bar{\bar{P}}$ …………$(\beta,\alpha > 0)$

$Q_s = -\gamma + \delta P + \mu\bar{P} + w\bar{\bar{P}}\,)$ ………..$(\gamma,\delta > 0)$…………(16)

إن المعالم (μ, w, n, m) تجد توقعات الأسعار للباعة والمشترين ، حيث لو كانت $m > 0$ يتبع ذلك إن زيادة الأسعار تؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة Q_d ، وهذا سيؤدي إلى إن المشترين سيتوقعون إن ارتفاع الأسعار سيستمر لذا يرون لابد من زيادة مشترياتهم حالياً طالما إن الأسعار لم تزل نسبياً منخفضة إما لو كانت $m < 0$ فان ذلك سيؤدي إلى توقع معاكس في الأسعار ، لذا فان المشترين سوف يقطعون مشترياتهم لأجل انتظار انخفاض الأسعار .

إما عن المعلمة n فإنها تجعل سلوك المشترين يعتمد أيضا على معدل تغير (dp/dt) لذا فان المعالم m,n تدخل كعناصر مادية في موضوع المضاربة السعرية.

إما عن المعالم w, μ فإنها تجلب للباعة نفس ما مر من مضامين . ولأجل تبسيط سنفترض إن دالة الطلب فقط تتضمن توقعات أسعار وذلك بجعل كل من m,n ذات قيم غير صفرية . معنى ذلك إن دالة العرض لا تتضمن توقعات سعريه . كذلك إن السوق دائماً تكون في حالة تصفية . لذلك يصبح من الممكن موازنة دالتي العرض والطلب . استناداً لذلك وبجمع الدالتين في العلاقة (١٦) وبإعادة الترتيب سنحصل على العلاقة التالية :

$$\bar{\bar{P}} + \frac{m}{n}\bar{p} - \frac{\beta+\delta}{n}p = \frac{\alpha+\gamma}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (17)$$

إن العلاقة أعلاه هي على هيئة العلاقة (٢) ، حيث إن حدودها تقابل حدود المعادلة (٢) ووفقاً للتعويض التالي :

$$Y = P \quad ; a1 = m/n \quad ; a_2 = \frac{\beta+\delta}{n} \qquad b = \frac{\alpha+\gamma}{n}$$

وطالما إن هذه الصيغة أي (١٧) تتضمن كل من المشتقتين الأولى والثانية $(\bar{p}, \bar{\bar{p}})$ لذا فان السعر الذي يظهر هو عبارة عن السعر التوازني في مفهوم تصفية الأسواق .

إن التوازن ألسعري ضمن هذه العلاقة من السهولة إيجاده وذلك باستخدام العلاقة :

$$Y_{(p)} = \frac{b}{a2}\,;\; a_2 \neq 0$$

ووفقاً للعلاقة (١٧) فان :

$$P_{(p)} = \frac{b}{a2} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

ولكون الصيغة موجبة لذا فإنها تعبر عن توازن ساكن ، أما عن الدالة المتممة $p_{(c)}$ فان لها ثلاثة حالات هي :

الحالة الأولى : جذر حقيقي مميز أي إن

$$(m/n)^2 > -4(\frac{\beta+\delta)}{n})$$

إن الدالة المتممة الممثلة لهذه الحالة هي :

$$P_{(c)}= A_1e^{r1t} + A_2e^{r2t}$$

حيث إن :

$$r_1,r_2= \frac{1}{2}[- \frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + (\frac{\beta+\delta}{n})}$$

ووفقاً لذلك فان الحل العام هو :

$$P_{(t)} = P_c + P_p = A_1e^{r1t} + A_2e^{r2t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

الحالة الثانية : حينما تكون

$$(m/n)^2 = -4(\frac{\beta+\delta)}{n})$$

في مثل هذه الحالة إن الجذور المميزة تأخذ قيم منفردة وهي :

$$r = -M/2n$$

لذا فان الحل العام يصبح بالشكل :

$$r= -m/2n \quad P_{(t)} = A_3e^{-mt/2n} + A_4te^{-mt/2n} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

الحالة الثالثة : حينما تكون

$$(m/n)^2 < -4(\frac{\beta+\delta)}{n})$$

في مثل هذه الحالة إن الجذور المميزة هي عبارة عن زوج من الإعداد المعقدة ثنائية الأزواج ، أي إن :

$$r_1,r_2 = h+v_i$$

$$\text{where } h = - \frac{m}{2n} \quad \text{and } vi = 1/2 \sqrt{-4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) - \left(\frac{m}{n}\right)^2}$$

لذا فان الحل العام يصبح بالشكل :

$$P_{(t)} = e^{-mt/2n} [A_5 cosvt + A_6 sinvt] + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

الإطار التطبيقي للدراسة :

لأجل إيجاد المسار العملي لما ورد من تحليل نظري ، فانه ذلك يمكن التوصل إليه وفقاً لنماذج افتراضية أربعة مبنية على الافتراضات التالية :

تحديد ثلاثة نماذج تمثل العلاقة ما بين السعر والكمية المطلوبة . بمعنى إيجاد دالة تقديرية على ثلاثة مراحل .

المرحلة الأولى : تعبر عن واقع الأسعار السائدة في السوق وفقاً لحالة توازن وقتي ما بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة .

المرحلـة الثانيـة: تستند هذه المرحلة على توقع المشترين بزيادة الأسعار لذا فأنهم سيزيدون من مشترياتهم خلال هذه المرحلة، إن هذه المرحلة تتسم بتغير مستوى الطلب dp/dt .

المرحلـة الثالثـة: يتوقع المشترين إن الأسعار ستنخفض لذا ستخفض بالمقابل مشترياتهم وهذا التغير في مستوى الأسعار والطلب dp^2/dt^2 مبني استناداً إلى نتائج المرحلة السابقة ودراسات السوق.

تحديد نموذج قياسي افتراضي يمثل العلاقة ما ين السعر والكمية المعروضة . فضلا عن انه لا يتضمن توقعات بمعنى أخر إن المتغير الذي يتحكم بمسارات التوازن هو متغير الطلب كما سيتضح لاحقاً.

نماذج الطلب:

النموذج الأول : العلاقة التالية تمثل مستوى Qd مقابل مستوى الأسعار p وفقاً للمشاهدات التالية :

Q	P	P.Q	P^2
24	16	384	256
26	15	390	225
31	13	403	169
41	10	410	100
46	9	414	81
48	4	192	16
∑Q = 216	٦٧∑P =	٢١٩٣∑P.Q=	$\sum P^2 = 847$

$$(\acute{p}\,P) = \begin{vmatrix} 6 & 67 \\ 67 & 847 \end{vmatrix}; \ |D| = 593$$

$$(\acute{p}\,P)^{-1} = \begin{vmatrix} 847 & -67 \\ -67 & 6 \end{vmatrix}; \ \bullet B = \begin{vmatrix} 1.428 & -0.1129 \\ -0.1129 & 0.010 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 216 \\ 2193 \end{vmatrix}$$

- $b_0 = 61$
- $b_1 \equiv 2.5$

النموذج الثاني :

استناداً للنموذج الأول ودراسات السوق يتوقع المشترين استمرار زيادة الأسعار لذا فأنهم سيزيدون مشترياتهم في هذه المرحلة وفقاً للعلاقة التالية :

Q	P	P . Q	P^2
٦٢	36	2232	1296
69	33	2277	1089
75	28	2100	784
81	20	1620	400
95	17	1615	289
122	6	732	36
∑Q = 504	∑P = 140	∑P. Q = 10576	$\sum P^2 = 3894$

نتائج النموذج بدون حد ثابت وبالانحرافات هي :

$\sum QP = - 1184$
$\sum p2 = 628$
$\acute{b} = \frac{-1184}{628} = -1.8$

النموذج الثالث :

استناداً لواقع السوق الذي يشير له النموذج رقم ٢ وتوقعات المشترين بجنوح الأسعار إلى الانخفاض لذا فان العلاقة ما بين السعر والكمية المطلوبة تتضح من العلاقة التالية والتي تشير إلى انخفاض نسبي في الكمية المطلوبة نظراً لحصول توقع انخفاض السعر مستقبلاً :

Q	P	P . Q	P^2
45	30	1350	900
43	33	1419	1089
39	36	1404	1296
36	39	1404	1521
33	42	1386	1764
31	45	1395	2025
$\sum Q = 225$	$\sum P = 227$	$\sum P.Q = 8358$	$\sum P^2 = 8395$

نتائج النموذج بالانحرافات وبدون حد ثابت هي :

$\sum QP = -155$
$\sum P^2 = 157$

- $b- = \frac{-155}{157} = - 0.99 \approx -1$

نموذج العرض :

يمكن عرض النموذج الافتراضي الذي يوضح العلاقة مابين السعر والكمية المعروضة بالشكل التالي :

Q_d	P	P . Q	P^2
22	2	44	4
28	3	84	9
34	5	170	25
39	7	273	49
42	8	336	64
52	12	624	144
$\sum Q_d = 217$	$\sum P = 37$	$\sum P.Q = 1531$	$\sum P^2 = 295$

$$(\acute{p}\ P) = \begin{vmatrix} 6 & 37 \\ 37 & 295 \end{vmatrix} \;;\; |D| = 401$$

$$(\acute{p}\ p)^{-1} = \begin{vmatrix} 295 & -37 \\ -37 & 6 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 217 \\ 1531 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0.7336 & -0.0922 \\ -0.0922 & 0.0149 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 217 \\ 1531 \end{vmatrix}$$

- $b_0 = 18 \quad , \; b_1 = 2.8$

استناداً إلى نماذج العرض والطلب ونتائجها يمكن ترتيب دالتي الطلب والعرض بالشكل التالي :

$Q_d = 61 - 2.5P - 1.8P - P$

Qs = - 18 + ٢,٨ P

ووفقاً لافتراض تصفية الأسواق Qd = Qs لذا فان :

$61 - ٢,٥p - 1.8\bar{P} - \bar{\bar{p}} = -18 + 2.8P$

وبإعادة الترتيب والقسمة على ١− نحصل على :

$\bar{\bar{p}} + 1.8\bar{p} + 5.3\,P = 79$

إما الشروط الابتدائية للمسالة نفترض إن :

$P_{(0)} = 16$

$\bar{p}_{(0)} = 1$

الحل :

ابتداءً يمكن إن حصل على التكامل الخاص من الدالة أعلاه بالشكل التالي :

$P_{(p)} = 79/5.3 = 14.9$

حيث يمثل P(p) حالة التوازن بشكلها الأولي :

ومن خصائص العلاقة :

$r^2 + 1.8^r + 5.3 = 0$

يمكن إيجاد الجذور وبعد ذلك نتعرف على خصائصها لكي يمكن التوصل إلى الحل المطلوب عليه :

$$r_1 , r_2 = \frac{-a1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a2}}{2}$$

$$= \frac{-1.8 \pm \sqrt{(1.8)^2 - 4(5.3)}}{2} = 1/2\ (-1.8 \pm 4.2) = -0.9 \pm 2.1\, i$$

- $h = -0.9$
- $v_i = 2.1\, i$

لذا فان الحل العام سيكون :

$$P_{(t)} = e^{-0.9} [A_5 \cos 2.1t + A_6 \sin 2.1t] + 14.9$$

ولأجل تحديد قيم الثابتين A_5 , A_6 لابد من الرجوع إلى الشروط الأولية للمسالة ، حيث نجد إن الشرط الأول :

$\bar{P}_{(0)} = 16$; and $t = 0$

لذا فان

$e^0 = (A_5 \cos (0) + A_6 \sin (0) + 14.9$

$\cos (0) = 1$ and $\sin (0) = 0$

لذا فان :

$A_5 + 14.9 = 16$

$A_5 = 1.1$

ومن الشرط التالي :

$P_{(0)} = 1$ and $t = 0$

لذا سنحصل على :

$\bar{P}_{(t)} = -0.9e^{-0.9t}[A_5\cos2.1t + A_6\sin2.1t] + e^{-o.9t}[-2.1A_5\sin2.1t + 2١.A_6\cos2.1t]$

And

$\bar{P}_{(0)} = -0.9e^0[A_5\cos(0) + A_6\sin(0)] + (-0.9)e^0[-2.1A_5\sin(0) + 2.1A_6\cos(0)]$

$= -0.9[(A_5 + 0) + (0 + 201\ A_6)] = 0.9A_5 + 1.89A_6$

ووفقاً للشرط الأولي ، $P_{(0)} = 1$

لذا فان :

$-0.9(A5) + 1.89A_6 = 1$

بما إن : $A_5 = 1.1$

$-0.9(1.1) + 1.A6 = 1$

$A_6 \approx (1)$

عليه فان الحل العام يصبح :

$P_{(t)} = e^{-0.9t}[1.1\cos 2.1t + \sin2.1t] + 14.9$

يبدو من حيث العلاقة أعلاه إن المسار الزمني يتمثل بفترة زمنية ذات تذبذب دوري. حيث إن الدورة ممثلة بالعلاقة ($2.1\pi / v = \pi$) أي هنالك دورة كاملة في كل زمن (t) تزداد بالقدر ($\pi =$ 3.1459) . وان ما يتعلق بالحد المضروب $e^{-0.9}$ فانه يشير إلى إن التذبذب سيتضاءل .

حيث إن المسار الزمني الذي يبدأ بسعر ابتدائي قدره ($P_{(0)} = 12$) سيتقارب نحو حالة التوازن المؤقت بالسعر ($P_{(p)} = 14.9$) وهذا يتضح من إكمال حل العلاقة :

$P_{(t)} = e^{-0.9}[1.1\cos2.1t + \sin2.1t] = 14.9$

$P_{(t)} = e^{-0.9}(1.1349) + 14.9$

علماً انه كلما تصاعد الأس (0.9-) ، كلما اتجهت قيمة e إلى الصفر ، حتى تصبح قيمة ($P_{(t)} = 14.9$)، وهي تمثل حالة توازن مؤقت يتغير مع طبيعة التغيرات الحاصلة في مستويات العرض والطلب .

الاستنتاجات :

تعتبر أساليب التحليل الحركي للمتغيرات الاقتصادية من الأساليب المتقدمة التي يمكن إن نتوصل من خلالها تشخيص المسار الزمني لحركة المتغيرات الاقتصادية وتحديد نقاط التوازن المؤقت التي لها اثر بالغ في تشخيص الواقع الاقتصادي وحركته المستقبلية .

تم الإثبات نظرياً وتطبيقياً أهمية ودور المعادلات التفاضلية في استكمال دور التحليل القياسي حيث إن التوليف ما بين التحليلين يحقق الهدف المطلوب المتمثل في تأشير واقع العلاقة ما بين المتغيرات الاقتصادية قيد الدراسة.

أظهرت النتائج النهائية إمكانية تشخيص حالات التباعد والتقارب ما بين المتغيرات على مستوى المسار الزمني ، مما يترتب على ذلك إمكانية اتخاذ ما يلزم لتصحيح الواقع للمتغيرات المقصودة.

المصادر

Fundamental methods of mathematical Economics; Alpha c . chains , third edition mcG grow . hill book company . 1984.

Glass, J. Colin, Introduction to mathematical methods in economics , McGraw hill , inc, 1980.

Stafford L.W.T; mathematics for economics; MacDonald and Evans LTD, London, 1974.

التفاضل والتكامل ، IBCD سلسلة أيكل الرياضية ترجمة رشيد عبد الرزاق ومعروف محمد حديد ، جامعة بغداد ، كلية الهندسة ، مطبعة العاني ، ١٩٧٧.