



المجلة العراقية للعلوم الإحصائية

www.stats.mosuljournals.com



دراسة توزيع وايبل ذو معلمتين وتقدير معلمة القياس والشكل مع التطبيق على بيانات الجهد مادة الاسمنت (مراجعة مقال)

صفوان ناظم راشد ^{ID} ، فاروق ظافر رمضان ^{ID} و علي عبد الله سليمان ^{ID}

قسم الاحصاء والمعلوماتية ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

الخلاصة

تعتبر توزيعات البقاء من التوزيعات المهمة والشائعة الاستخدام في مجالات مختلفة ويعتبر توزيع وايبل (Weibull Distribution) احد هذه التوزيعات الذي له صيغة مختلفة و قد تم اختيار توزيع وايبل ذو معلمتين هي معلمة القياس و معلمة الشكل ، وقد تم دراسة خصائصه وتقدير معلمتي التوزيع بطريقتين هما طريقة الامكان الاعظم واسلوب بيز وذلك عندما تكون المعلومات حول المعلمة غير متوفرة (Non-Informative) وعندما تكون المعلومات حول المعلمة متوفرة (Informative) ، تم تطبيقها ما تم التوصل اليه في الجانب النظري على بيانات حقيقيه تمثلت بمقياس الجهد لمادة الاسمنت لمدة سبعة ايام.

معلومات النشر

تاريخ المقالة:
تم استلامه في 1 تموز 2022
تم القبول في 9 تشرين الاول 2022
متاح على الإنترنت في 1 كانون الاول 2022

الكلمات الدالة:

توزيع وايبل ، ذو معلمتين ، مقدر امكان الاعظم ، مقدر بيز

المراسلة:

صفوان ناظم راشد
Safwan75nathem@uomosul.edu.iq

DOI: <https://doi.org/10.33899/ijjoss.2022.176206> , ©Authors, 2022, College of Computer and Mathematical Science, University of Mosul. This is an open access article under the CC BY 4.0 license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).

1. المقدمة Introduction

تم في هذا البحث دراسة بعض الخصائص الاساسية لتوزيع وايبل ذو المعلمتين حيث يعود تسميته الى الباحث الفيزيائي السويدي Waloddi Weibull في عام 1939 ، وقد تم استخدام هذا التوزيع على نطاق واسع في مشكلة العمر الافتراضي و الموثوقية ، وربما يكون توزيع وايبل هو نموذج اكثر استخداماً على نطاق واسع ما بين التوزيعات في المجالات الصناعية وذلك لتطبيقه فيما يتعلق بالعمر الافتراضي لأنواع عديدة من المنتجات الصناعية على نطاق واسع فضلاً عن تطبيقه في المجال الطبي ومجالات اخرى (Bilal and Aslam,2021).

تم تقدير معلمة القياس لهذا التوزيع عندما تكون معلمة الشكل معلومة بطريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Estimation) والتي تكون شائعة الاستخدام و ذلك من خلال معرفة التوزيع الاحتمالي للملاحظات و اعتبار المعلمة كمية ثابتة . كما وتم استخدام اسلوب بيز (Bayesian Approach) وذلك باستخدام المعلومات حول المعلمة من المشاهدات فضلاً عن المعلومات السابقة للمعلمة في حالتين ذو معلومات و عديم المعلومات (Informative and Non-Informative) على اعتبار ان المعلمة متغير عشوائي له توزيع احتمالي (Saholz,2015).

2- توزيع وايبيل

في نظرية الاحتمالات والإحصاء يعد توزيع وايبيل توزيع احتمالي مستمر ومن المعروف لدينا ان توزيع وايبيل له صيغ مختلفة ومن بين هذه الصيغ توزيع وايبيل ذو المعلمتين ، الاولى معلمة الشكل (Shape parameter) و الثانية معلمة القياس (Scale parameter) ، حيث ان دالة توزيع وايبيل ذو المعلمتين (Rinne,2008) تأخذ الصيغة الآتية:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}}, x \geq 0 \quad (1)$$

اذ ان:

($\alpha > 0$) وهي معلمة القياس

اما ($\beta > 0$) تمثل معلمة الشكل.

ونلاحظ من الشكل (a-1) ان منحنى دالة كثافة الاحتمال ملتوي التواء موجب ويزداد التواء المنحني بزيادة قيمة معلمة الشكل β وكذلك نلاحظ من المنحني ان معلمة القياس تؤثر على التقلطح وبتزايد معلمة القياس يزداد التقلطح.

3- الحالات الخاصة للتوزيع

عندما تكون قيمة ($\beta=1$) فان توزيع وايبيل سوف يتحول الى التوزيع الاسي والدالة تصبح كالآتي:

$$f(x; \alpha, 1) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, x \geq 0$$

عندما تكون قيمة ($\beta=1$) فان توزيع وايبيل سوف يتحول الى التوزيع العام معلمة واحدة كالآتي:

$$f(x; 1, \beta) = \beta x^{\beta-1} e^{-x^\beta}, x \geq 0$$

والشكل (b-1) يوضح الدالة التجميعية $F(x)$ لتوزيع وايبيل كالآتي:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = 1 - e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} \quad (2)$$

والشكل (c-1) يوضح دالة البقاء لتوزيع وايبيل وفق الصيغة الآتية:

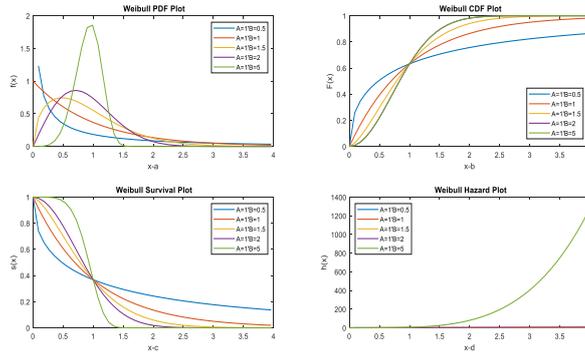
$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} \quad (3)$$

والشكل (d-1) يوضح دالة الخطورة لتوزيع وايبيل وفق الصيغة الآتية:

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

وبتعويض معادلة دالة الكثافة في المعادلة (1) ودالة البقاء في المعادلة (3) نحصل على:

$$h(x) = \frac{\frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}}}{e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}}} = \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} \quad (4)$$



الشكل (1) دالة كثافة الاحتمال والدالة التجميعية ودالة البقاء ودالة معدل الفشل لتوزيع وايبيل ذو معلمتين

4- خصائص التوزيع

4-1 المنوال و الوسيط

• المنوال :

هو القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات، ويمكن أن تحتوي مجموعة البيانات الواحدة على منوال واحد، أي تكون قيمة واحدة هي الأكثر تكراراً، أو يكون هناك أكثر من منوال، أي تحتوي مجموعة البيانات على مجموعة قيم متكررة بنفس عدد المرات، كما يمكن ان تكون مجموعة البيانات لا تحتوي على أي منوال (Nabeshima and Gunji,2004) ويمكن الحصول على المنوال لتوزيع وايبل ذو المعلمتين على النحو الاتي، وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (1) نحصل على:

$$\ln f(x; \alpha, \beta) = \ln \beta - \ln \alpha + (\beta - 1) \ln x - \frac{x^\beta}{\alpha}$$

وبأخذ المشتقة نسبة الى x مع مساوات المعادلة بالصفر نحصل على:

$$\frac{\ln f(x; \alpha, \beta)}{dx} = \frac{\beta - 1}{x} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha} = \frac{\alpha(\beta - 1) - x(\beta x^{\beta-1})}{x\alpha} = 0$$

نحصل على:

$$x = \left(\frac{\alpha(\beta - 1)}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (5)$$

• الوسيط :

هو القيمة الوسطى بين مجموعة من البيانات الإحصائية ، ومن أبرز خصائص الوسيط أن تكون نصف البيانات أكبر منه ونصفها الآخر أصغر منه ، يتم الحصول على (الوسيط) للمتغير العشوائي x لتوزيع وايبل (Murthy et al.,2004) وفق الصيغة الآتي:

$$F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} = \frac{1}{2}$$

على فرض ان x يمثل الوسيط، بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\text{the median} = \left(-\alpha \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (6)$$

2-4 العزم حول الصفر

حيث ان التوقع لـ r لتوزيع وايبل (Cho,2015) هو كالآتي:

$$\begin{aligned} Ex^r &= \int_0^\infty x^r f(x; \alpha, \beta) dx & x > 0, \alpha, \beta > 0 \\ Ex^r &= \int_0^\infty x^r \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} dx & \text{put } \frac{x^\beta}{\alpha} = z \quad dx = \frac{1}{\beta} \alpha^{\frac{1}{\beta}} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz \\ Ex^r &= (\alpha)^{\frac{r}{\beta}} \int_0^\infty z^{\frac{r}{\beta}+1-1} e^{-z} dz = (\alpha)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma \left(\frac{r}{\beta} + 1 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

عندما تكون قيمة r=1 :

$$Ex = \alpha^{\frac{1}{\beta}} \Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (8)$$

عندما تكون قيمة r=2 اي لمعلمتين من معالم توزيع وايبل تصبح قيمة الدالة كالآتي:

$$Ex^2 = \alpha^{\frac{2}{\beta}} \Gamma \left(\frac{2}{\beta} + 1 \right) \quad (9)$$

أما التباين لتوزيع وايبل (Bassiouni,2007) هو كالآتي:

$$\sigma^2 = Ex^2 - (Ex)^2 = \alpha^{\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) - \Gamma \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right)^2 \right) \quad (10)$$

3-4 الدالة المولد للعزوم لتوزيع وايبل

يتم استخدامها لإيجاد العزوم ويمكن ايجاده كالآتي(Ahmad,2013):

$$\mu_x^t = Ee^{tx} = \int_0^\infty e^{tx} f(x; \alpha, \beta) dx = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} dx$$

$$e^{tx} = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-tx)^r}{r!} \quad \text{حيث ان:}$$

$$\mu_x^t = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-t)^r \beta}{r! \alpha} \int_0^\infty x^{\beta+r-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} dx \quad ; u = \frac{x^\beta}{\alpha} \leftrightarrow x = (\alpha u)^{\frac{1}{\beta}}$$

نشتق بالنسبة لـ u $(dx = \frac{1}{\beta} \alpha^{\frac{1}{\beta}} u^{\frac{1}{\beta}-1} du)$ نحصل على:

$$\mu_x^t = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t)^r}{r!} \alpha^{\frac{r}{\beta}} \int_0^{\infty} (u)^{\frac{r}{\beta}+1-1} e^{-u} du$$

لنحصل على نواة توزيع كما حيث ان $\frac{r}{\beta} + 1 = \alpha$ و ان $\beta = 1$ فان:

$$\mu_x^t = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t)^r}{r!} \alpha^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) \quad (11)$$

4-4 الالتواء و التفلطح

- **الالتواء** : يعرف عدم تناسق الاطراف (حول المتوسط) لمنحنى التوزيع بالالتواء، يتم اعطاء صيغة قياس الالتواء التي قدمها (Kenney and Keeping, 1961) وفق قانون الالتواء الخاص استناداً الى المعادلة (7) على النحو الاتي:

$$skewness = \frac{E(x^3) - 3E(x)E(x^2) + 2(E(x))^3}{[E(x^2) - (E(x))^2]^{3/2}} \quad (12)$$

- عندما $skewness < 0$ يكون منحنى التردد سلبياً منحرفاً
- عندما $skewness \geq 0$ يكون منحنى التردد ايجابياً منحرفاً (السلماني، 2021)
- **التفلطح**: هو مؤشر لقياس درجة تحذب أو تقوس دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي حقيقي هو، إلى جانب التجانس من أهم معالم اشكال توزيع المتغيرات العشوائية ويمكن من وصف شكل توزيع الاحتمالات في جوار القيمة المتوقعة. حيث انه يمكن تمثيل قانون التفلطح الخاص بتوزيع واييل (Bilici, 2021) كالآتي:

$$ku = \frac{E(x^4) - 4E(x)E(x^3) - 6(E(x))^2E(x^2) - 3E(x)^4}{(E(x^2) - (E(x))^2)^2} \quad (13)$$

- عندما $kurtosis > 0$ فان المنحنى يكون حلزونياً
- عندما $kurtosis < 0$ فان المنحنى يكون واسع النطاق
- عندما $kurtosis = 0$ يكون المنحنى متوسط الحجم او يمكننا القول لا يوجد تفلطح

5- طرق التقدير

لغرض تقدير المعلمات لمجتمع احصائي هناك العديد من الطرائق الاحصائية للتقدير سنستعرض طريقتي الامكان الاعظم فضلاً واسلوب بيز والذي يتضمن ايجاد التوزيع اللاحق بالاعتماد على التوزيع السابق (اي توزيع Prior) ودالة الامكان في تقدير معلمتي التوزيع وعلى النحو الاتي (المتولي، 2021):

5-1 التقدير بطريقة التقدير بالإمكان الأعظم

لتكن (x_1, x_2, \dots, x_n) قيم عشوائية ذات حجم n فان التوزيع الاحتمالي المشترك للقيم العشوائية للعينة (الناصر واخرون، 2009) تعرف بدالة الامكان وفق الصيغة الاتية:

$$L(X|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (14)$$

للحصول على المقدر $\hat{\theta}$ يتم بحل المعادلة $\frac{\partial L(X|\theta)}{\partial \theta} = 0$ وعند اخذ المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 L(X|\theta)}{\partial \theta^2}$ يتم تحديد ما اذا كان مقدر المعلمة في نهايته الصغرى ام العظمى .

وعليه فان دالة الامكان لتوزيع واييل (Aexopoulos, 2019) ستكون كالآتي:

$$\begin{aligned} L(X|\beta, \alpha) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta, \alpha) = \frac{\beta^n}{\alpha^n} \left(\prod_{i=1}^n (x_i)^{\beta-1} \right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \\ &= \beta^n \alpha^{-n} e^{(\beta-1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين نحصل على:

$$\ln(L(X|\alpha, \beta)) = n \ln(\beta) - n \ln(\alpha) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha} \quad (15)$$

وسوف يتم ايجاد مقدرات معلمات التوزيع وفق الحالات الاتية:

- تقدير معلمة القياس α عندما تكون معلمة الشكل معلومة.

بالاستناد الى المعادلة (15) يتم أخذ المشتقة نسبة الى α لنحصل على مقدر المعلمة كالآتي:

$$\frac{\partial \ln(L(X|\alpha, \beta))}{d\alpha} = \frac{-\alpha n + \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha^2} = 0$$

$$\therefore \hat{\alpha}_{MLS} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n} \quad (16)$$

• تقدير معلمة الشكل β عندما تكون معلمة القياس معلومة.
بالاستناد الى المعادلة (15) يتم أخذ المشتقة نسبة الى β لنحصل على مقدر المعلمة كالآتي:

$$\frac{\partial \ln(L(X|\alpha, \beta))}{d\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \ln(x_i)}{\alpha} = 0 \quad (17)$$

وبالاعتماد على الطرق العددية يمكن الحصول على مقدر معلمة الشكل لـ $\hat{\beta}_{MLS}$.

• تقدير معلمتي القياس والشكل.

بحل المعادلتين (16) و(17) بالطرق العددية نسبةً الى α, β يتم الحصول على مقدر معلمتي القياس $\hat{\alpha}_{MLS}$ والشكل $\hat{\beta}_{MLS}$.

2-5 اسلوب بيز او طريقة بيز

زاد الاهتمام بأسلوب Bayesian في الآونة الاخيرة لتحليل بيانات زمن الفشل وازدادت الاهتمام في الحصول على مقدر المعلمة او معلمات عن طريقها كبديل عن الطرائق التقليدية والتي تجعل فيها المعلمة كمية ثابتة، اما مدرسة بيز جعلت المعلمة متغير عشوائي يتبع توزيع معين، حيث يعتمد اسلوب Bayes على جمع المعلومات حول المعلمة عن طريق المعلومات الاولية (Prior) عن المعلمات غير المعلومة (Non-Informative) او المعلومة (Informative) ودمجها مع معلومات العينة الموجودة في دالة الامكان والتي تنتج من خلالها التوزيع اللاحق $p(\theta|X)$ الذي يأخذ الصيغة المعروفة لأسلوب Bayes (Al-Naser, Saleh, 2009) ليتم تقدير معلمتي توزيع وابليل عن طريقه، وهي:

$$p(\theta|X) \propto g(\theta)L(X|\theta) \quad (18)$$

1-2-5 Lindely Approximation تقريبي لنديلي

يستخدم تقريبي لنديلي عندما يكون التوزيع اللاحق عبارة عن نسبة تتضمن تكامل في البسط والمقام لا يمكن اختزالها الى شكل مبسط حيث ان التوقع اللاحق للمعلمات غير المعلومة يكون معقدًا ويصعب ايجاده فاذا كان التوقع اللاحق لـ $u(\theta)$ Abbas et al. (2019).

$$E(u(\theta)|D) = \frac{\int u(\theta)L(\theta)p(\theta)d\theta}{\int L(\theta)p(\theta)d\theta} \quad (19)$$

وان تقريبي لنديلي للمعادلة (19) يكون كما في الصيغة الآتية

$$E(u|X) = \hat{u}(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (u_{ij} + 2u_i \rho_i) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m L_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \quad (20)$$

$\hat{u}(\alpha, \beta)$: يمثل مقدر الامكان الاعظم للمعلمتين $u(\theta) = (\alpha, \beta)$: دالة للمعلمة θ و u_i : المشتقة الاولى $u(\theta)$ نسبة لـ θ و u_{ij} : المشتقة الثانية $u(\theta)$ نسبة الى θ .

$L_{ijk} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$: المشتقة الثالثة للوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان نسبة الى معلمات التوزيع المدروس σ_{ij} : تمثل العنصر (i,j) في معكوس المصفوفة $(-L_{ij})$. ρ : اللوغاريتم الطبيعي للتوزيع الاولي المشترك لمعلمات اي توزيع. ρ_j : تمثل مشتقة ρ . m : تمثل عدد معلمات.

2-2-5 عندما يكون التوزيع الاولي (Non-Informative)

وسوف يتم ايجاد معلمات التوزيع وفق الحالات الآتية:

• تقدير معلمة القياس α عندما تكون معلمة الشكل β معلومة.

بافتراض ان المعلومات اولية حول المعلمة (Non-informative) يتم الحصول عليها من خلال معلومات فيشر $I_n(\theta)$ (Ahmad, 2013) ومنها سوف نحصل على معلمات حول المعلمة من خلال صيغة Jeffery التي اقترحها نفس العالم بصيغته:

$$g(\theta)\alpha \sqrt{\det(I_n(\theta))} \quad (21)$$

اذ ان:

$$\theta = (\alpha, \beta)$$

بالرجوع الى المعادلة (14) والتي تمثل دالة الامكان ودمجها مع التوزيع الاولي $\frac{1}{\alpha} \propto g(\alpha)$ التي تم الحصول عليها وفق المعادلة (21) وتعويضهم في المعادلة (18) لنحصل على التوزيع اللاحق:

$$p(\alpha|X) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \propto \alpha^{-(n+1)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}}$$

ان توزيع اللاحق اعلاه يمثل نواة توزيع معكوس كما والذي تكتب وصفاً $x \sim \text{Gamma}(n, \sum_{i=1}^n x_i^\beta)$ ويمكن كتابة التوزيع اللاحق بصيغته النهائية (Waheed and hashem,2006):

$$p(\alpha|X) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^\beta)^n}{\Gamma(n)} \alpha^{-(n+1)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \quad (22)$$

فان مقدر بيز لمعلمة القياس لـ α هي:

$$\hat{\alpha}_{NB1} = E(\alpha|X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n-1} \quad (23)$$

• تقدير معلمة الشكل β عندما تكون معلمة القياس α معلومة.
وادمج المعادلة (14) التي تمثل دالة الامكان مع التوزيع الاولي $\frac{1}{\beta} \propto g(\beta)$ التي تم الحصول عليها وفق المعادلة (21) وتعويضهم في المعادلة (18) لنحصل على التوزيع اللاحق:

$$p(\beta|X) \propto \beta^{n-1} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \quad (24)$$

وللحصول على مقدر بيز لمعلمة الشكل يتم اخذ التوقع اللاحق للمعادلة (24) نسبة للمعلمة β :

$$\hat{\beta}_{NB1} = E(\beta|X) = \frac{\int_0^\infty \beta^{n+1-1} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\beta}{\int_0^\infty \beta^{n-1} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\beta} \quad (25)$$

وبالاعتماد على الطرق تقرب لندلي في المعادلة (20) للوصول الى مقدر بيز معلمة الشكل لـ $\hat{\beta}_{NB1}$ والموضح صيغتها ادناه.

• تقدير معلمة القياس والشكل عندما يكونان غير معلومين
وادمج المعادلة (14) مع التوزيع الاولي $\frac{1}{\beta\alpha} \propto g(\beta, \alpha)$ حسب صيغة (Jeffery) في المعادلة (21) وتعويضهم في المعادلة (18) لنحصل على التوزيع اللاحق:

$$p(\alpha, \beta|X) = \beta^{n-1} \alpha^{-(n+1)} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \quad (26)$$

للحصول على مقدر بيز لكل من المعلمتين يتم ايجاد التوزيع الهامشي لكل معلمة كالاتي:

$$E(\alpha, \beta|X) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n+1-1} \alpha^{-n-1+1} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n-1} \alpha^{-(n+1)} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\alpha d\beta} \quad (27)$$

وبالاعتماد على الطرق تقرب لندلي في المعادلة (20) للحصول على مقدر بيز لمعلمة $\hat{\alpha}_{NB1}$ القياس والشكل $\hat{\beta}_{NB1}$:

3-2-5 عندما يكون التوزيع الاولي (Informative)

وسوف يتم تقدير معلمات التوزيع وفق الحالات الاتية:

• تقدير معلمة القياس α عندما تكون معلمة الشكل β معلومة.

لنفرض ان التوزيع الاولي يتبع توزيع كما $\alpha \sim \text{Gamma}(a, b)$ (Bilal, et al (2021)) والتي تأخذ الصيغة:

$$g_1(\alpha) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{\alpha}} \quad (28)$$

وادمج التوزيع الاولي في المعادلة (28) مع دالة الامكان في المعادلة (14) نحصل على التوزيع اللاحق حسب الصيغة في المعادلة (18) (Azeiz,2009) وعلى النحو الاتي:

$$p(\alpha|X) \propto \alpha^{-((a+n)+1)} \exp\left(-\frac{(b + \sum_{i=1}^n x_i^\beta)}{\alpha}\right)$$

وان التوزيع اللاحق اعلاه يمثل نواة توزيع معكوس كما والذي يكتب وصفاً $\alpha|x \sim \text{Gamma}(a+n, b + \sum_{i=1}^n x_i^\beta)$ ليصبح التوزيع اللاحق لـ α هو:

$$p(\alpha|X) = \frac{(b + \sum_{i=1}^n x_i^\beta)^{a+n}}{\Gamma(\alpha + n)} \alpha^{-((a+n)+1)} \exp\left(-\frac{b + \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}\right) \quad (29)$$

فان مقدر بيز اللاحق لمعلمة القياس ل α هو :

$$\hat{\alpha}_{1\beta 2} = E(\alpha|x) = \frac{b + \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha + n - 1} \quad (30)$$

• تقدير معلمة الشكل β عندما تكون معلمة القياس α معلومة.

لنفرض ان التوزيع الاولي يتبع توزيع كاما $\beta \sim IGamma(c, d)$ والتي تأخذ الصيغة:

$$g_2(\beta) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \beta^{-(c+1)} e^{-\frac{d}{\beta}} \quad (31)$$

وبدمج المعادلة (31) مع المعادلة (14) وتعويضهم في المعادلة (18) نحصل على:

$$p(\beta|X) \propto \beta^{n-c-1} e^{-\frac{d}{\beta}} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \quad (32)$$

وللحصول على مقدر بيز لمعلمة الشكل يتم اخذ التوقع اللاحق للمعادلة (32) نسبة للمعلمة β :

$$\hat{\beta}_{1B2} = E(\beta|X) = \frac{\int_0^\infty \beta^{n-c} e^{-\frac{d}{\beta}} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\beta}{\int_0^\infty \beta^{n-1} e^{\beta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\beta} \quad (33)$$

وبالاعتماد على الطرق تقريب لنذلي في المعادلة (20) للوصول الى مقدر بيز معلمة الشكل ل $\hat{\beta}_{1B2}$ والموضح صيغتها ادناه.

• تقدير معلمة القياس والشكل عندما يكونان غير معلومين

ودمج المعادلة (14) الخاصة بدالة الامكان مع التوزيع الاولي $g_2(\beta) \propto g_1(\alpha)$ في المعادلة (20) نحصل على:

$$p(\alpha, \beta|X) = \beta^{n-(c+1)} \alpha^{-n-(a+1)} e^{-\frac{d}{\beta}} e^{-\frac{b}{\alpha}} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} \quad (34)$$

للحصول على مقدر بيز لكل من المعلمتين يتم ايجاد التوزيع الهامشي لكل معلمة كالآتي:

$$E(\alpha, \beta|X) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n+1-(c+1)} \alpha^{-n-(a+1)+1} e^{-\frac{d}{\beta}} e^{-\frac{b}{\alpha}} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n-(c+1)} \alpha^{-n-(a+1)} e^{-\frac{d}{\beta}} e^{-\frac{b}{\alpha}} e^{(\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha}} d\alpha d\beta} \quad (35)$$

وبالاعتماد على الطرق تقريب لنذلي في المعادلة (20) للوصول على مقدر بيز لمعلمة $\hat{\alpha}_{1B2}$ والقياس والشكل $\hat{\beta}_{1B2}$:

6- الجانب التطبيقي.

تم جمع البيانات من كلية الهندسة فرع المختبرات من جامعة الموصل وتتألف هذه البيانات قياس الجهد لمادة الاسمنت خلال مدة سبعة ايام لغرض تحديد متانة المادة وان وحدة قياسها ب Mpa (Bilal et.al,2021) قوامها 130 (<http://uomosul.edu.iq/pages/ar/engineering/>)، حيث تم اختبار ملائمة البيانات للتوزيع قبل عملية دراسة خصائصها وتقدير معلمة القياس لها.

6-1 اختبار البيانات

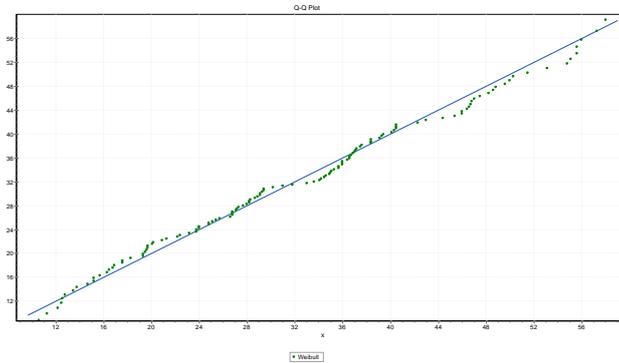
تم اختبار ملائمة البيانات لتوزيع وايبل وفق المختبرات الاحصائية بالاستعانة ببرنامج Easy fit 5.5 بالاعتماد الى الفرضية العدم H_0 التي تؤكد ان البيانات تتبع توزيع وايبل والفرضية البديلة المعاكسة لها. وكانت نتائج المختبرات الثلاثة المبينة بالجدول(1):

جدول (1): اختبارات ملائمة البيانات الحقيقية لتوزيع وايبل استنادا الى المختبرات الثلاثة

	مستوى المعنوية	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Kolmogorov-Smirnov	Sample Size=130 ; Statistic=0.05955 ; P-Value=0.72296 ; Rank=5					
	Critical Value	0.09411	0.10726	0.1191	0.13314	0.14287
	Reject?	No	No	No	No	No
	Anderson-Darling					
Anderson-Darling	Sample Size=130 ; Statistic=0.47515 ; Rank=6					
	Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
	Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared	Deg. of freedom=7; Statistic=6.2389 ; P-Value=0.51215 ; Rank=8					

	Critical Value	9.8032	12.017	14.067	16.622	18.475
	Reject?	No	No	No	No	No

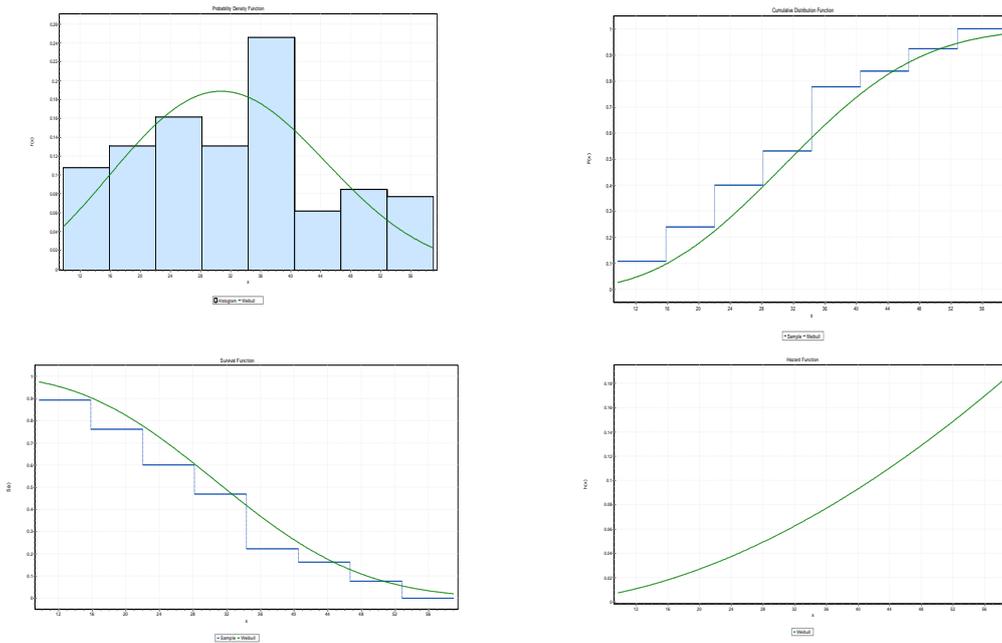
والشكل Q-Q plot يؤكد على ملاءمة البيانات لتوزيع وايبل بقيم معاملات $\alpha = 13.14033$; $\beta=0.746$



الشكل (1) طبيعة البيانات التي تلائم توزيع وايبل Q-Q Plote

2-6 خصائص التوزيع

نلاحظ ان منحى دالة توزيع وايبل يكون متزايدا ومن ثم متناقص وهذا النوع من المنحنيات يدل على ان الدالة هي دالة فشل المبينة في الشكل (2) يوضح فيه دالة الكثافة للتوزيع مع توضيح الدالة التراكمية للتوزيع ودالة البقاء التي تكون متناقصة من الواحد الى الصفر فضلاً عن دالة المخاطرة التي تأخذ منحى غير خطي.



الشكل (2) رسم توضيحي لدالة الكثافة والدالة التراكمية و دالة البقاء و دالة المخاطرة

3-6 ايجاد مقاييس النزعة لتوزيع وايبل

بعد التأكد من ملاءمة البيانات يتم حساب الوسط الحسابي و التباين و الالتواء و التقلطح والجدول ادناه يبين نتائج العمليات الحسابية، حيث ان قيمة المعلمات تساوي:

$$\alpha = 13.14033 ; \beta = 0.746 ; a = 1.2 ; b = 1.5$$

الجدول (2) قيم الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال و كل من الالتواء و التقلطح لتوزيع وايبل

α	β	mean	Median	Mod	skewness	Kurtosis
13.14033	0.746	37.7748	19.3250	3.5799	3.1486	116.4142

ونلاحظ من الجدول اعلاه ان التوزيع ملتوي التواء موجب كون القيمة ذات اشارة موجبة و نلاحظ ان قيم التقلطح ذات نيل خفيف و مستوي.

4-6 تقدير معلمة القياس لتوزيع وايبل ذو معلمتين بحالات مختلفة

استنادا الى الطرق التي تم دراستها في تقدير معلمة القياس والشكل للتوزيع والمتمثلة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة Bayesian ذات معلومات قليلة (Non-Informative) وذات معلومات غنية اي متوفرة المعلومات (Informative) تم الحصول على مقدر المعلمة القياس α والشكل β بحالات مختلفة بالاعتماد على البيانات الحقيقية المتمثلة بقياس جهد مادة الاسمنت والجدول (3) يوضح نتائج التقدير حيث تم وضع معيار متوسط مربعات الخطاء MSE لتحديد افضل طريقة للتقدير .

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n}$$

الجدول (3) طرق تقدير معلمة القياس لتوزيع وايبل عندما تكون معلمة الشكل معلومة

Estimation	$\alpha = 13.14033 ; \beta = 0.746$			
	عندما مجهولة $\hat{\alpha}$	عندما مجهولة $\hat{\beta}$	عندما مجهولتين $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$	
MLE	13.1628	0.64612	11.5684	0.5648
MSE	0.00050597	0.01297	0.18133	0.2111
Bayes I (Non-Informative)	13.2649	0.68981	12.4354	0.5124
MSE	0.0155	0.0118	0.09413	0.1789
Bayes II (Informative)	13.1541	0.71292	12.7158	0.6129
MSE	0.00019031	0.0031	0.01256	0.1254

نلاحظ من الجدول (3) نتيجة المقارنة ما بين طرق التقدير المستخدمة تفوق اسلوب بيز عندما تكون المعلومات حول المعلمة القياس α والشكل β متوفرة (Informative) وذلك لحصولها على اقل متوسط مربعات خطأ MSE وتفوق طريقة الامكان الاعظم في التقدير لحصولها على اقل متوسط مربعات خطأ MSE من اسلوب بيز عندما تكون المعلومات حول المعلمة القياس α غير متوفرة (Non-Informative).

7- الاستنتاجات: تعتبر النتائج التي تم التوصل اليها خاصة بالبيانات الحقيقية التي سحبت منها العينة. تطابق البيانات الحقيقية مع توزيع وايبل من خلال المختبرات الاحصائية المدروسة. الحصول على الاشكال البيانية الخاصة للدراسة حسب طبيعة البيانات لها. ملاحظة ان الالتواء لطبيعة البيانات موجبة فضلاً عن تفلطح ذو ذيل خفيف و مستوي. الحصول على افضل مقدر لمعلمة القياس بأسلوب بيز عندما تكون المعلومات متوفرة حول المعلمة القياس α والشكل (Informative) β لجميع الحالات التي تم دراتها من خلال حصوله على اقل MSE.

المصادر:

1. AL-Salmani, Ayad Sabri Fneker,(2021)," The use of McDonald's generalization in the frieght and exponential frieght distributions with the application", MSc. Theais,College of Computer and Mathematical Science, University of Mosul ,Mosul .Iraq.
2. AL-Mutawali, Ramadan Mohamed Ahmed,(2021)," Simulation of the finite mixed Weibel distributions to model the size of the insurance claim", Journal of Financial and Business Research,No.2 Issue 22, Pp.467-484.
3. AL-Naser, Abd AL-majeed Hamza, Saleh ,Make Akram Mohamad (2009)," Use a generalized loss function of the Bayesian method to estimate the scaling parameter and the reliability function of the Weibull distribution", Iraq Journal of Statistical Science.No.16,Issue9,Pp.185-198.
4. Aziz , Maysoun Mal Alla, Naser Aldeen Abd,(2009)," Estimation of the parameters of the Weibel distribution", Iraq Journal of Statistical Science.No.16,Issue9,Pp.53-72.
5. Ghanem ,Adnan & Metanyos Mukwel,(2011)," The effectiveness of using the Weibull probability distribution in forecasting", Damascus University Journal of Economic and Legal Sciences",NO.4 ,Issue 27, Pp. 119-138.
6. Abbas, K., Abbasi, N. Y., Ali, A., Khan, S. A., Manzoor, S., Khalil, A., & Altaf, M. (2019)," Bayesian analysis of three-parameter Fréchet distribution with medical applications" Computational and mathematical methods in medicine.
7. Ahmad, Kaisar ,(2013), "Bayesian Analysis of Weibull Distribution and Its Application" , A master message that is not published , University of Kashmir , pp . 17_26 .
8. Alexopoulos, A. (2019).” One-parameter Weibull-type distribution, its relative entropy with respect to Weibull and a fractional two-parameter exponential distribution”. Stats, 2(1), 34-54.
9. Bassiouni, K. M. H. (2007). “Optimization Neural Network for Blind Signal Separation Using an Adaptive Weibull Distribution”. Georgian Electronic Scientific Journal, 11, 68-74.

10. Bilal, M., Mohsin, M., & Aslam, M. (2021). "Weibull-exponential distribution and its application in monitoring industrial process". *Mathematical Problems in Engineering*, 2021.
11. Bilici, E. (2021). "Investigation of Feller-Buncher Performance Using Weibull Distribution". *Forests*, 12(3), 284..
12. Cho, Y., Sun, H., & Lee, K. (2015). Estimating the entropy of a Weibull distribution under generalized progressive hybrid censoring. *Entropy*, 17(1), 102-122.
13. Kenney, J. F., & Keeping, E. S. (1961), "Skewness Mathematics of Statistics ",Part, 1, 100-101.
14. Murthy, D. P., Xie, M., & Jiang, R. (2004). "Weibull models " (Vol. 505). John Wiley & Sons.
15. Nabeshima, T., & Gunji, Y. P. (2004). "Zipf's law in phonograms and Weibull distribution in ideograms": comparison of English with Japanese. *BioSystems*, 73(2), 131-139.
16. Rinne, H. (2008). "The Weibull distribution: a handbook. Chapman and Hall/CRC..
17. Scholz, F. W. (2015). "Inference for the Weibull Distribution: A tutorial". *The Quantitative Methods for Psychology*, 11(3), 148-173.
18. Waheed, m. e. s., and Hashem, k. (2006). "Optimization neural Network for Blind Dignal Separation using an Adaptive Weibull Distribution". in georgian electronic scientific journal: computer science and telecommunications.

Study of the two-parameter Weibull distribution and Estimation of the scale and shape parameter application to the voltage data of the cement material (review)

Safwan Nathem Rashed Farok THafer Ramadan Ali Abd Alla Sulayman

Safwan75nathem@uomosul.edu.iq

farok.cs1180@student.uomosul.edu.iq

Ali.cs1175@student.uomosul.edu.iq

Department of Informatics & Statistic, College of Computer & Mathematical Science, University of Mosul, Mosul, Iraq

Abstract:

Survival distributions are important and commonly used in different fields and the Weibull Distribution is one of these distributions that has a different formula and the Weibull distribution has been chosen with two parameters, the measurement parameter and the shape parameter, and its properties have been studied and the two distribution parameters have been estimated in two ways, namely the method of greatest possibility and the method of Biz when the information about the parameter is not available (Non-Informative) and when the information about the parameter is available (Informative), What was reached in theory was applied to real data represented by a potentiometer of cement material for seven days.

Keyword: Weibull distribution, two parameters, maximum possibility estimator, Bayes estimator