المجلة العراقية للعلوم الإحصائية
www.stats.mosuljournals.com

التقدير البيزي لمعلمة توزيع زمن الحياة تحت دالة خسارة مركبة مع تحديد حجم العينة الامثل

صفوان ناظم راشد و ريا سالم الرسام

قسم الاحصاء والمعلوماتية ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

معلومات النشر

تاريخ المقالة:
تم استلامه في 17 تشرين الثاني 2019
تم القبول في 5 كانون الاول 2019
متاح على الإنترنت في 1 حزيران 2020

الكلمات الدالة:
مقدر بيز، توزيع زمن الحياة، دوال الخسارة المتماثلة وغير المتماثلة، دالة الكلفة، حجم العينة الامثل

المراسلة:
صفوان ناظم راشد
Safwan75nathem@uomosul.edu.iq

الخلاصة

يهدف هذا البحث إلى إيجاد مقدر بيز تحت دالتي خسارة متماثلة وغير متماثلة تمثلت بدالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي ودالة الخسارة الانتروبية فضلاً عن دالة خسارة تجمع بين الدالتين أطلق عليها دالة الخسارة المركبة وهي غير متماثلة بطبيعتها. وتم مقارنة مقدر بيز لمعلمة القياس لتوزيع زمن الحياة (Life–Time distribution) والذي يضم فيه مجموعة من التوزيعات المعروفة تحت دالة الخسارة المقترحة المركبة والدوال المكونة لها فضلاً عن تقدير حجم العينة الامثل. وباستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) تم المقارنة بين المقدرات بعد توليد بيانات عشوائية باستخدام المحاكاة لغرض تقدير معلمات توزيع وايبل الذي يمثل حالة خاصة من توزيعات زمن الحياة وبأحجام مختلفة (n=10,50,100) وبتكرار قدره N=1000 مع اخذ قيم أولية للمعلمتين α_0,β_0 توصلنا الى مقدر متوازن يجمع بين دالتين للخسارة.

DOI: https://doi.org/10.33899/iqjoss.2020.165447 ,

1– المقدمة Introduction

يهتم الاستدلال الإحصائي بعملية التقدير وفق أساليب مختلفة ومن بينها الأسلوب المعروف بأسلوب بيز (Box and Tio,1973) الذي يوصلنا إلى اتخاذ القرار الأمثل في حل المسائل وبأقل خطأ ممكن وتزداد أهميته عند ارتباطه مع دوال الخسارة $L(\hat{\theta},\theta)$ (Bolstad,2004) بنوعيها المتماثلة التي يكون فيها فوق التقدير (Overestimation) متساوي مع تحت التقدير (Underestimation) ومنها دالة خسارة التربيعية ودالة الخسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي المقترحة من قبل (Brown,1968) ودوال خسارة أخرى (Mood,et al,1974) ودوال غير متماثلة مستخدمة بشكل واسع من قبل العديد من الباحثين لأنها تعطي تقديرات أكثر واقعية خاصة مع بيانات الحياة ليكون فيها فوق التقدير(Overestimation) غير متساوي مع تحت التقدير(Underestimation) من بينها دالة الخسارة الأسية الخطية (LINEX) المقدمة من قبل (Varian,1975) والتي تم تعديلها من قبل (Zellner,1986) الأكثر استخداماً ودالة الخسارة الانتروبية وهي تعديل لدالة الخسارة (LINEX) المقترحة من قبل (Calabria and Pulcini,1994) وغيرها من الدوال (العيساوي،2011) وتم اقتراح دالة أكثر توازناً وأكثر واقعية من دوال الخسارة السابقة والتي تجمع بين دالتين متماثلة وغير متماثلة من بينها دالة الخسارة الأسية اللاخطية (NLINEX) (Saiful Islam,et al.2004) و دالة الخسارة المركبة (PE) المقترحة من قبل (العكاش،2018) والتي أخذت بنظر الاعتبار دالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي (LogSE) ودالة الخسارة الانتروبية (E)، ولأهمية توزيع زمن الحياة (Life–Time Distribution) وذلك لارتباطه مع مجموعة من التوزيعات (Kazmi,Aslam and Ali,2012) تم تقدير معلمة القياس لها بالاعتماد على دالة الخسارة (PE)، وتم إجراء محاكاة بأسلوب Monte Carlo لغرض تقدير معلمة القياس لتوزيع زمن الحياة تحت دالة الخسارة المركبة المقترحة ومقارنتها مع مقدرات أخرى لنفس المعلمة ولكن تحت دالة الخسارة الانتروبية والخطأ اللوغارتمي التربيعي وذلك باستخدام أسلوب بيز مع تحديد حجم العينة الأمثل (Lindley,1997) من خلال توليد بيانات عشوائية تحت نفس التوزيع وبأحجام مختلفة (n=10,50,100) وبتكرار قدره N=1000 مع اخذ قيمة أولية لمعلمة القياس θ للتوزيع وقيم أولية للمعلمتين α_0,β_0 اللتان تمثلان معلمتي التوزيع السابق للمعلمة θ وتم استخدام نظام (MATLAB) و(MAPLE) في الدراسة.

2– توزيع زمن الحياة

اذا كان لدينا عينة لعشوائية $x_1,x_2,\ldots,x_n$ بحجم n مسحوبة من توزيع زمن الحياة (Life-Time Distribution)(Kazmi,Aslam and Ali,2012) فان دالة الكثافة الاحتمالية لها تأخذ الصيغة التالية:

$$P(x;\theta,A,D)=\frac{D}{\Gamma A\ \theta^{A}}\,x^{AD-1}\,e^{-\frac{x^{D}}{\theta}}\ ;\theta>0\ \ ;\ 0\le x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ان θ هي معلمة غير معلومة، وان كل من (A,D) يمكن أن تكون معلمات لتوزيعٍ ما وبتعويض قيم مختلفة لـ(A,D) نحصل على أشكال مختلفة من التوزيعات (Prakash and Singh,2010) والموضحة بالجدول الاتي:

الجدول(1): علاقة توزيع زمن الحياة بتوزيعات الحياة الاخرى عند تحديد كل من A,D

Distribution	A	D
Negative Exponential	1	1
Two Parameter Gamma		1
Erlang	Positive Integer	1
Two Parameter Weibull	1	
Rayleigh	1	2
Maxwell	3/2	2

علماً ان دالة التوزيع التراكمية للمعادلة (1) وكذلك دالة الموثوقية $R(t)$ ودالة معدل الفشل $h(t)$ عند الزمن t حيث ان $t>0$ معرفة على الترتيب كالاتي:

$$F(t)=1-e^{-\frac{t^{D}}{\theta}} \qquad ; \qquad R(t)=e^{-\frac{t^{D}}{\theta}} \qquad ; \qquad h(t)=\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A\ \theta^{A}}$$

3– دوال الخسارة

يتم تقييم نتائج اتخاذ القرارات باستخدام مقياس كمي على شكل دالة تبين الخسارة لكل توليفة من الإجراءات بين المقدر $\hat{\theta}$ للمعلمة θ والتي تقابل الصيغة المعروفة رياضياً بـ $L(\hat{\theta},\theta)$ (Mood,et. al.,1974) والدالة أما ان تكون متماثلة أو غير متماثلة بالاعتماد على المقدر $\hat{\theta}$.

* دالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي The Squared Log Error Loss function

تم اقتراح هذه الدالة من قبل (Brown,1968) وهي من دوال الخسارة المتماثلة والتي سيتم الاخذ بها في هذا البحث وصيغتها الرياضية:

$$L(\hat{\theta},\theta)=\left(\mathrm{Ln}(\hat{\theta})-\mathrm{Ln}(\theta)\right)^{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ومقدر بيز لـ θ تحت دالة خسارة الخطأ أللوغاريتمي التربيعي ($\hat{\theta}_{LogSE}$) وفق المعادلة (2) (Muhammad,et.at.2010) يكون بالصيغة الاتية:

$$\hat{\theta}_{LogSE}=\mathrm{EXP}\left(E_{\theta}\left(\mathrm{Ln}(\theta)\right)|X\right)=\mathrm{EXP}\left(\int\left(\mathrm{Ln}(\theta)\right)p(\theta|X)d\theta\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ودالة المخاطرة اللاحقة لدالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي الموضحة في المعادلة (2) ستكون:

$$PR=E_{\theta}\left(\left(\mathrm{Ln}(\theta)\right)^{2}|X\right)-\left(\mathrm{Ln}(\hat{\theta}_{LogSE})\right)^{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

*دالة الخسارة الانتروبية Entropy Loss function

في العديد من الحالات الطبيعية تبدو الخسارة النسبية $\hat{\theta}/\theta$ أكثر واقعية، وفي هذه الحالة من المفيد اعتماد دوال الخسارة غير المتماثلة ومنها دالة الخسارة الانتروبية وهي تعديل لدالة الخسارة الأسية الخطية (LINEX) المقترحة من قبل (Varian,1975) و (Zellner,1986) والتي استخدمها (Calabria and Pulcini,1994) والصيغة الرياضية لها:

$$L(\hat{\theta},\theta)=\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{b}-b\,Ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1 \qquad ....(5)$$

وان مقدر بيز لـ θ تحت دالة الخسارة الانتروبية هي:

$$\hat{\theta}_E^{-b}=\left(E(\theta^{-b}\,|\,X)\right)^{-\frac{1}{b}} \qquad ....(6)$$

ودالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة الانتروبية الموضحة في المعادلة (5) ستكون:

$$PR=E_{\theta}(L(\hat{\theta},\theta)\,|\,X)=-b\left(Ln(\hat{\theta}_E)-E_{\theta}\left(Ln(\theta)\right)\right) \qquad ....(7)$$

* دالة الخسارة المركبة Compound Loss function

هذه الدالة مقترحة من قبل (العكاش،2018) لها اهمية في حل العديد من المسائل التي يؤخذ فيها خطأ التقدير بشكل نسبي (المقدر $\hat{\theta}$ نسبةً إلى المعلمة θ) وهي دالة غير متماثلة بطبيعتها ويمكن ان نعبر عن هذا الخطأ بالرمز $\nu=\hat{\theta}/\theta$. وتكون صيغة دالة الخسارة المركبة حسب الصيغة الأولية المقترحة من قبل (Varian,1975) وهي:

$$L(\nu)=k\,(\nu)^{b}+\gamma\,(Ln(\nu))^{2}-\gamma\,Ln(\nu)-k \quad ;b,k>0 \qquad ....(8)$$

وكما نعلم ولكي تكون دالة الخسارة اقل ما يمكن $L(\nu)=0$ فيجب أن تكون $\hat{\theta}=\theta$ وبالتالي فان $\nu=1$.

والحد الأدنى الذي يجعل $L'(\nu)|_{\nu=1}=0$ (أي من خلال اشتقاق $L(\nu)$ المعرفة في المعادلة (8) وتعويض $\nu=1$) سوف نحصل على نهاية صغرى للدالة ونحصل على $\gamma=k\,b$، بحيث تكون المشتقة الثانية لـ $L(\nu)$ أي $L''(\nu)>0$ ، وعليه فان صيغة دالة الخسارة تكون بصيغة ابسط وبالإمكان التعامل معها وعلى النحو الآتي:

$$L(\nu)=k\left((\nu)^{b}+b\,(Ln(\nu))^{2}-b\,Ln(\nu)-1\right) \quad ;k,b>0$$

المعادلة أعلاه تمثل دالة الخسارة المركبة وهي من الدوال غير المتماثلة ويمكن كتابتها بشكل أبسط لتسهيل العمليات الحسابية وكالاتي:

$$L(\hat{\theta},\theta)=k\left(\left((\frac{\hat{\theta}}{\theta})^{b}-b\,Ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta})-1\right)+b\,(Ln(\hat{\theta})-Ln(\theta))^{2}\right) \qquad .... (9)$$

$$=k\left((\text{Entropy Loss function})+b\,(\text{Squared Log Error Loss function})\right)$$

وعليه مقدر بيز للمعلمة θ ($\hat{\theta}_{PE}$) وتحت دالة الخسارة المركبة (PE) يكون بالصيغة الآتية:

$$\hat{\theta}_{PE}=EXP\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\hat{\theta}_E^{-b}\right)+2Ln(\hat{\theta}_{LogSE})\right)\right) \qquad ....(10)$$

ودالة المخاطرة اللاحقة لمقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) المركبة هي:

$$PR(\hat{\theta},\theta)=k\,b\left(E_{\theta}\left((Ln(\theta))^{2}\,|\,X\right)-\left(Ln(\hat{\theta}_{PE})\right)^{2}\right) \qquad ....(11)$$

4- دالة الكلفة

تعتبر الكلفة من المسائل المهمة في إي دراسة والتي نهدف عادة إلى جعلها اقل ما يمكن لذلك سوف نستخدم في هذا البحث دالة الكلفة الخطية (Linear Cost function) تكون فيها $(n>0)$ و $(C_{(0)}=0)$ وصيغتها (Lindley ,1972):

$$C_{(n)}=c_0+c\times n$$

وان c_0 هي كلفة إعداد المعاينة أو إي كلف أخرى ذات علاقة بأخذ العينة و c هي كلفة المعاينة لكل مشاهدة. وباستخدام أسلوب بيز نحتاج تقدير حجم العينة بالاعتماد على الكلفة الكلية $TC_{(n)}$ والتي يمكن حسابها بالصيغة الآتية عندما لا تحتوي على المشاهدات $\underline{X}$. (Saiful Islam, 2011)

$$TC_{(n)}=C_{(n)}+PR \qquad ....(12)$$

إذ إن PR تمثل دالة المخاطرة اللاحقة (Posterior Risk) والتي تمثل القيمة المتوقعة لدالة الخسارة. أما إذا احتوت دالة الكلفة الكلية على المشاهدات(X) ففي هذه الحالة نأخذ التوقع لدالة المخاطرة اللاحقة ونظيف لها دالة الكلفة لنحصل على متوسط الكلفة الكلية وكالاتي:

$$E\left(TC_{(n)}|n\right) = C_{(n)} + E(PR) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(13)$$

وعليه نشتق القيمة المتوقعة للكلفة الكلية $E\left(TC_{(n)}|n\right)$ بالنسبة إلى n ومساواتها بالصفر لنجد حجم عينة بيز.

5– تقدير معلمة القياس لتوزيع زمن الحياة

بتوفر المعلومات عن العينة العشوائية بحجم n المأخوذة من توزيع (Life-Time Distribution) بمعلمة غير معلومة، الموضحة في المعادلة (1) وبالاعتماد على نظرية بيز في التقدير وتوفر المعلومات حول المعلمة θ فان دالة الامكان لـ n من مشاهدات العينة العشوائية تكون كالاتي:

$$p(X\,|\,\theta) = \left(\frac{D}{\Gamma A}\right)^{n} \frac{1}{\theta^{An}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{AD-1}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{D}}{\theta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

وان التوزيع الاولي المرافق (Conjugate Prior) للمعلمة θ سوف يتبع توزيع معكوس كاما بالمعلمتين $\alpha_0\,,\beta_0$ ودالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$p(\theta) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma\alpha_0}\, \theta^{-(\alpha_0+1)}\, e^{-\frac{\beta_0}{\theta}}\ ;\alpha_0,\beta_0 > 0\ ;\quad \theta > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

وبدمج المعلومات حول المعلمة θ مع معلومات العينة سوف نحصل على التوزيع اللاحق لـ θ وفق نظرية بيز كالاتي.

$$p(\theta\,|\,X) \propto p(\theta)\, p(X\,|\,\theta)$$

وعليه فان

$$p(\theta\,|\,X) \propto \theta^{-(\alpha_0+1)}\, e^{-\frac{\beta_0}{\theta}}\, \theta^{-An}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{D}}{\theta}} = \theta^{-((\alpha_0+An)+1)}\, e^{-\frac{1}{\theta}\left(\beta_0+\sum_{i=1}^{n} x_i^{D}\right)}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق للمعلمة θ سوف يتبع توزيع معكوس كاما $\theta\,|\,X \sim IGamma\left((\alpha_0+An),(\beta_0+u)\right)$ ودالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لـ θ هي:

$$p(\theta\,|\,X,A,D) = \frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma(\alpha_0+An)}\, \theta^{-((\alpha_0+An)+1)}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\beta_0+u)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

إذ أن: $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^{D}$

التوقع والتباين اللاحق للمعلمة θ على التوالي كالاتي:

$$\left.\begin{aligned} E_\theta(\theta\,|\,X,A,D) &= \frac{(\beta_0+u)}{(\alpha_0+An-1)} \\ Var(\theta\,|\,X,A,D) &= \frac{(\beta_0+u)^2}{(\alpha_0+An-1)^2(\alpha_0+An-2)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ولإيجاد مقدر بيز تحت دالة الخسارة المركبة (PE) المعرفة في المعادلة (10) سوف يتم ايجاد مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والموضح في المعادلة (6) وتحت دالة خسارة الخطأ الوغاريتمي التربيعي (LogSE) والموضح في المعادلة (3) وعلى النحو الاتي:

$$\hat{\theta}_E^{-b} = E_\theta\left(\frac{1}{\theta^b}\,|\,X,A,D\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^b}\, p(\theta\,|\,X,A,D)\,d\theta$$

وبالتعويض عن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ θ المعرف في المعادلة (13) نحصل على:

$$\hat{\theta}_E^{-b} = E_\theta\left(\frac{1}{\theta^b}\,|\,X,A,D\right) = \frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma\alpha_0+An} \int_0^\infty \theta^{-((\alpha_0+An+b)+1)}\, e^{-\frac{(\beta_0+u)}{\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma\alpha_0+An}\, \frac{\Gamma\alpha_0+An+b}{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An+b)}}$$

$$\hat{\theta}_E = \left(\frac{\Gamma(\alpha_0 + An + b)}{\Gamma(\alpha_0 + An)\,(\beta_0 + u)^b} \right)^{-\frac{1}{b}} \qquad ....(18)$$

أما مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة خسارة الخطأ الوغاريتمي التربيعي (LogSE) ستكون:

$$Ln(\hat{\theta}_{LogSE}) = E_\theta\left(Ln(\theta) \mid X, A, D\right) = \int_0^\infty Ln(\theta) p(\theta \mid X, A, D) d\theta$$

$$= \frac{(\beta_0 + u)^{(\alpha_0 + An)}}{\Gamma(\alpha_0 + An)} \int_0^\infty Ln(\theta)\, \theta^{-((\alpha_0 + An)+1)}\, e^{-\frac{(\beta_0 + u)}{\theta}} d\theta$$

بافتراض ان $Q = (\beta_0 + u)$, $N = (\alpha_0 + An)$ وتعريف متغير عشوائي متقابل هو: $y = \frac{Q}{\theta}$

إذ ان $0 < y < \infty$ وباستخدام التحويلات لـ $Ln(\hat{\theta}_{LogSE})$ معتمدين على المشتقة الاولى لـ (Digamma Function) (Lanping,2013) نحصل على:

$$\theta = Qy^{-1} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \left| \frac{-Q}{y^2} \right| dy = \frac{Q}{y^2} dy$$

إذن

$$Ln(\hat{\theta}_{LogSE}) = -\frac{Q^N}{\Gamma N} \int_0^\infty Ln\left(\frac{Q}{y}\right) \left(\frac{Q}{y}\right)^{-N-1} e^{-y} \frac{Q}{y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma N} \int_0^\infty \left(Ln(Q) - Ln(y)\right) y^{N-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma N} \left(\int_0^\infty Ln(Q) y^{N-1}\, e^{-y} dy - \int_0^\infty Ln(y) y^{N-1}\, e^{-y} dy \right)$$

$$= \frac{Ln(Q)}{\Gamma N} \int_0^\infty y^{N-1}\, e^{-y} dy - \int_0^\infty \frac{Ln(y) y^{N-1}\, e^{-y}}{\Gamma N} dy$$

علماً ان: $\Gamma N = \int_0^\infty y^{N-1} e^{-y} dy \;\; ; \;\; \Psi(N) = \Gamma N' = \frac{\partial}{\partial N} Ln\Gamma N = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma N} Ln(y)\, y^{N-1} e^{-y} dy$

وبالتعويض عن N وQ نحصل على:

$$Ln(\hat{\theta}_{LogSE}) = Ln(\beta_0 + u) - \Psi(\alpha_0 + An) \qquad ....(20)$$

وعليه فان مقدر بيز تحت دالة الخسارة المركبة (PE) وفق المعادلة (10) بعد تعويض ناتج المعادلة (18) و(20) لنحصل على:

$$Ln(\hat{\theta}_{PE}) = \frac{1}{(b+2)} \left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0 + An + b)}{\Gamma(\alpha_0 + An)\;(\beta_0 + u)^b} \right) + 2\left(Ln(\beta_0 + u) - \Psi(\alpha_0 + An)\right) \right)$$

$$\hat{\theta}_{PE} = Exp\left(\frac{1}{(b+2)} \left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0 + An + b)}{\Gamma(\alpha_0 + An)\;(\beta_0 + u)^b} \right) + 2\left(Ln(\beta_0 + u) - \Psi(\alpha_0 + An)\right) \right) \right)$$

................(21)

وقام الباحث باستنتاج مقدرات بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة المركبة لتوزيعات زمن الحياة عند تحديد قيم A,D (Prakash and Singh,2010) والموضحة بالجدول الاتي:

الجدول(2): مقدر بيز لكل توزيع تحت دالة خسارة PE عند تحديد كل من A,D الموضحة في الجدول (1)

Distribution	Bayesian estimation of $\hat{\theta}_{PE}$	u
Negative Exponential	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+n+b)}{\Gamma(\alpha_0+n)\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+n)\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
Two Parameter Gamma	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+An+b)}{\Gamma(\alpha_0+An)\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+An)\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
Erlang	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+An+b)}{\Gamma(\alpha_0+An)\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+An)\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
Two Parameter Weibull	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+n+b)}{\Gamma(\alpha_0+n)\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+n)\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^D$
Rayleigh	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+n+b)}{\Gamma(\alpha_0+n)\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+n)\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
Maxwell	$Exp\left(\frac{1}{(b+2)}\left(-Ln\left(\frac{\Gamma(\alpha_0+\frac{3n}{2}+b)}{\Gamma(\alpha_0+\frac{3n}{2})\,(\beta_0+u)^b}\right)+2\left(Ln(\beta_0+u)-\Psi(\alpha_0+\frac{3n}{2})\right)\right)\right)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

6- تحديد حجم عينة بيز تحت دالة الخسارة المركبة

بعد حصولنا على المعطيات السابقة المتمثلة بمقدر بيز تحت دالة الخسارة المركبة في المعادلة (21) يتم ايجاد دالة المخاطرة اللاحقة لغرض ايجاد حجم العينة الامثل حيث يتم الحصول على $E_\theta\left((Ln(\theta))^2 \mid X,A,D\right)$ وبالصيغة الاتية:

$$E_\theta\left((Ln(\theta))^2 \mid X,A,D\right)=\int_0^\infty (Ln(\theta))^2\, p(\theta \mid X,A,D)\, d\theta$$

$$E_\theta\left((Ln(\theta))^2 \mid X,A,D\right)=\frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma(\alpha_0+An)}\int_0^\infty (Ln(\theta))^2\, \theta^{-((\alpha_0+An)+1)}\, e^{-\frac{(\beta_0+u)}{\theta}}\, d\theta$$

وباتباع نفس الاسلوب باستخدام التحويلات لـ(Digamma Function)(Lanping,2013) بعد افتراض ان Q,N وتعريف $y=\frac{Q}{\theta}$

نحصل على:

$$Ln(\hat{\theta}_{LogSE})=\frac{Q^N}{\Gamma N}\int_0^\infty \left(Ln\left(\frac{Q}{y}\right)\right)^2 \left(\frac{Q}{y}\right)^{-N-1} e^{-y}\,\frac{Q}{y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma N}\int_0^\infty \left(Ln(Q)-Ln(y)\right)^2 y^{N-1}\, e^{-y} dy$$

$$=\frac{(Ln(Q))^2}{\Gamma N}\int_0^\infty y^{N-1}\, e^{-y} dy-2Ln(Q)\int_0^\infty \frac{Ln(y)\, y^{N-1}\, e^{-y}}{\Gamma N}dy+\int_0^\infty \frac{(Ln(y))^2\, y^{N-1}\, e^{-y}}{\Gamma N}dy$$

وبما ان المشتقة الثانية لـ ΓN يعبر عنها بالصيغة التالية: $\Gamma N'' = \frac{\partial^2}{\partial N^2} Ln \Gamma N = \frac{1}{\Gamma N}\int_0^\infty \left(Ln(y)\right)^2 y^{N-1} e^{-y} dy = \Psi'(N)$

وبالتعويض عن قيمة N و Q في المعادلات اعلاه لإيجاد $E_\theta\left(\left(Ln(\theta)\right)^2 \mid X,A,D\right)$ نحصل على.

$$E_\theta\left(\left(Ln(\theta)\right)^2 \mid X,A,D\right) = \left(Ln(\beta_0+u)\right)^2 - 2Ln(\beta_0+u)\,\psi(\alpha_0+An) + \psi'(\alpha_0+An) \qquad ....(22)$$

وبتعويض ناتج المعادلة (22) في المعادلة (12) التي تمثل الكلفة الكلية وكالاتي:

$$TC(n) = C_0 + C\,n + k\,b \times \left(\left(\left(Ln(\beta_0+u)\right)^2 - 2Ln(\beta_0+u)\,\psi(\alpha_0+An) + \psi'(\alpha_0+An) \right) - \left(\frac{1}{(b+2)} \left[-\left(Ln\left(\frac{\Gamma \alpha_0+An+b}{\Gamma \alpha_0+An} \right) - bLn(\beta_0+u) \right) + 2\left(Ln(\beta_0+u) - \Psi(\alpha_0+An)\right) \right] \right)^2 \right)$$

ولغرض التبسيط نفرض ان:

$$Z = -\frac{1}{(b+2)} Ln\left(\frac{\Gamma \alpha_0+An-b}{\Gamma \alpha_0+An} \right) + \frac{2\Psi(\alpha_0+An)}{(b+2)} \qquad ....(23)$$

وبإجراء بعض التبسيطات لدالة الكلفة الكلية نحصل على:

$$TC(n) = C_0 + C\,n + k\,b\,\left(\psi'(\alpha_0+An) - 2Ln(\beta_0+u)\left(\psi(\alpha_0+An) - Z \right) - Z^2 \right)$$

نلاحظ من دالة الكلفة الكلية TC(n) اعلاه أنها تعتمد على المتغير x_i من خلال وجودها في ($u = \sum_{i=1}^{n} x_i^D$) لذلك لابد من التخلص منهُ ومن المعلمات المجهولة قبل اخذ التوقع لدالة الكلفة الكلية سوف تقرب $Ln(\beta_0+u)$ باستخدام توسيع ماكلورين لغاية الرتبة الثانية لنحصل على(العكاش،2018).

$$Ln(\beta_0+u) = Ln\left(\beta_0(1+\frac{u}{\beta_0}) \right) = Ln\left(\beta_0\right) + \frac{u}{\beta_0} - \frac{u^2}{2\beta_0^2} \quad ; \quad -1 < \beta_0(1+\frac{u}{\beta_0}) < 1$$

وبتعويض الناتج اعلاه بدالة الكلفة الكلية لنحصل على:

$$TC(n) \cong C_0 + Cn + kb \left(\psi'(\alpha_0+An) - 2\left(Ln\left(\beta_0\right) - \frac{u}{\beta_0} + \frac{u^2}{2\beta_0^2} \right) \times \left(\psi(\alpha_0+An) - Z \right) - Z^2 \right)$$

وبأخذ التوقع لدالة الكلفة الكلية TC(n) التقريبية نسبة للمشاهدات لنحصل على:

$$E\left(TC(n)\right) \cong C_0 + C\,n + k\,b \left(\psi'(\alpha_0+An) - 2\left(Ln\left(\beta_0\right) - \frac{E(u)}{\beta_0} + \frac{E(u^2)}{2\beta_0^2} \right) \times \left(\psi(\alpha_0+An) - Z \right) - Z^2 \right) \qquad ....(24)$$

علماً أن $u \sim Gamma\,(An,\theta)$ و $\frac{1}{\theta} \sim IGamma\,(\beta_0,\alpha_0)$ إذن :

$$E(u) = E_\theta(E_x(u) \mid \theta) \quad ; \quad E_x(u) = \frac{An}{\theta}$$

$$E(u)=E_\theta\left(\frac{An}{\theta}\right)=AnE_\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{An\beta_0}{\alpha_0-1}\quad ;\quad \alpha_0\neq 1 \qquad ....(25)$$

$$E(u^2)=E_\theta\left(\frac{(An+1)An}{\theta^2}\right)=\frac{(An+1)An\,\beta_0^2}{(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)}\quad ;\alpha_0\neq 1,2 \qquad ....(26)$$

وبتعويض المعادلتين (25) و(26) في توسيع ماكلورين سوف نحصل على:

$$Ln(\beta_0)+\frac{E(u)}{\beta_0}-\frac{E(u^2)}{2\beta_0^2}=Ln(\beta_0)+\frac{An}{\alpha_0-1}-\frac{(An+1)\,An}{2(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)}=\upsilon \qquad ....(27)$$

ومن تعويض المعادلتين (23) و(27) في دالة الكلفة الكلية التقريبية الموضحة في المعادلة (24) نحصل على:

$$E\big(TC(n)\big)\cong C_0+C\,n+k\,b\left(\psi'(\alpha_0+An)-2\upsilon\big(\psi(\alpha_0+An)-Z\big)-Z^2\right) \qquad ....(28)$$

وبأخذ المشتقة الاولى للمعادلة (28) نسبةً الى n ومساواتها بالصفر فضلاً عن اخذ المشتقة الثانية للمعادلة (28) وكانت اكبر من الصفر مما يجعل دالة الكلفة الكلية التقريبية في نهايتها الصغرى. لذلك تم استخدام الطرق العددية للحصول على حجم العينة الامثل تحت دالة الخسارة المركبة PE نسبةً الى توزيع زمن الحياة (Life-Time distribution) ومنها سوف نتوصل الى احجام العينة المثلى لمجموعة من التوزيعات الخاصة والموضحة في الجدول (1).

7- مقدر بيز لدالة الموثوقية R(t)

لإيجاد مقدر بيز لدالة الموثوقية R(t) تحت دالة الخسارة المركبة PE وفقا لمعادلة (10) نسبةً الى R(t) ونبدأها بإيجاد مقدر بيز لدالة الموثوقية تحت دالة الخسارة الانتروبية E (Boudjerda and Merradj,2013) وفق الصيغة الرياضية الاتية:

$$\hat{R}_E^{-b}(t)=E\big(R^{-b}(t)\,|\,t,A,D\big)=\int_0^\infty R^{-b}(t)p(\theta\,|\,t,A,D)\,d\theta$$

إذ أن $p(\theta\,|\,t,A,D)$ يمثل دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لـ θ الموضحة في المعادلة (16) وان $R(t)=e^{-\frac{t^D}{\theta}}$ لنحصل على:

$$\hat{R}_E^{-b}(t)=E\big(R^{-b}(t)\,|\,t,A,D\big)=\frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma(\alpha_0+An)}\int_0^\infty \theta^{-((\alpha_0+An)+1)}\,e^{-\frac{1}{\theta}\left((\beta_0+u)-bt^D\right)}d\theta$$

$$\hat{R}_E^{-b}(t)=\left(1-\frac{b\;t^D}{(\beta_0+u)}\right)^{-(\alpha_0+An)} \qquad ....(29)$$

اما مقدر بيز لدالة الموثوقية R(t) تحت دالة خسارة الخطأ اللوغارتيمي التربيعي LogSE يتم ايجادها كما في الصيغة الاتية:

$$Ln\big(\hat{R}_{LogSE}(t)\big)=E\big(Ln(R(t))\,|\,t,A,D\big)=\int_0^\infty Ln\big(R(t)\big)p(\theta\,|\,t,A,D)\,d\theta$$

إذ أن $p(\theta\,|\,t,A,D)$ يمثل دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لـ θ فان:

$$Ln\left(\hat{R}_{LogSE}(t)\right)=\frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}}{\Gamma(\alpha_0+An)}\int_0^\infty -t^D\;\theta^{-((\alpha_0+An+1)+1)}\;e^{-\frac{(\beta_0+u)}{\theta}}d\theta$$

$$Ln\left(\hat{R}_{LogSE}(t)\right)=-\frac{(\alpha_0+An)t^D}{(\beta_0+u)} \qquad ....(30)$$

وبتعويض المعادلتين (29) و (30) في المعادلة (10) نحصل على:

$$\hat{R}_{PE}(t)=EXP\left(\frac{1}{b+2}\left((\alpha_0+An)Ln\left(1-\frac{b\;t^D}{(\beta_0+u)}\right)-2\frac{(\alpha_0+An)t^D}{(\beta_0+u)}\right)\right)$$

...............(31)

8- مقدر بيز لدالة معدل الفشل h(t)

يتم ايجاد مقدر بيز لدالة معدل الفشل تحت دالة الخسارة المركبة وفق المعادلة (10) وبالاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لـ θ الموضحة في المعادلة (16) سيتم ايجاد اولاً مقدر بيز لـ h(t) تحت دالة الخسارة الانتروبية E وحسب الصيغة الرياضية الاتية:

$$\hat{h}_E^{-b}(t)=\frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+n)}}{\Gamma(\alpha_0+n)}\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A}\right)^{-b}\int_0^{\infty}\theta^{-((\alpha_0+An-Ab)+1)}\,e^{-\frac{(\beta_0+u)}{\theta}}d\theta$$

$$=\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A\,(\beta_0+u)^{A}}\right)^{-b}\frac{\Gamma(\alpha_0+An-Ab)}{\Gamma(\alpha_0+An)}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

الان يتم ايجاد مقدر بيز لدالة معدل الفشل h(t) تحت دالة خسارة الخطأ اللوغارتيمي التربيعي LogSE وفق الصيغة الاتية:

$$Ln\left(\hat{h}_{LoSE}(t)\right)=E\left(Ln\left(h(t)\right)|\,t,A,D\right)=\int_0^{\infty}Ln\left(h(t)\right)p(\theta|\,t,A,D)\,d\theta$$

$$=Ln\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A}\right)-\frac{(\beta_0+u)^{(\alpha_0+An)}\,A}{\Gamma(\alpha_0+An)}\int_0^{\infty}\left(Ln(\theta)\right)\theta^{-((\alpha_0+An)+1)}\,e^{-\frac{(\beta_0+u)}{\theta}}d\theta$$

وبنفس الاسلوب المتبع يتم اجراء التحويلات المناسبة معتمدين فيها على المشتقة الاولى (Digamma Function) لنحصل على:

$$Ln\left(\hat{h}_{LogSE}(t)\right)=Ln\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A}\right)+\left(\Psi(\alpha_0+An)-Ln(\beta_0+u)\right)\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

وبتعويض المعادلتين (32) و (33) في المعادلة (10) نحصل على:

$$\hat{h}_{PE}(t)=EXP\left(\frac{1}{b+2}\left(-Ln\left(\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A\,(\beta_0+u)^{A}}\right)^{-b}\frac{\Gamma(\alpha_0+An-Ab)}{\Gamma(\alpha_0+An)}\right)+2\left(Ln\left(\frac{D\,t^{AD-1}}{\Gamma A}\right)+\left(\Psi(\alpha_0+An)-Ln(\beta_0+u)\right)\right)\right)\right)\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

9- الجانب التطبيقي.

تم توليد بيانات باستخدام احدى طرق المحاكاة (Monte Carlo) بإحجام مختلفة (n=10,50,100) من خلال اختيار توزيع من توزيعات ازمنة الحياة الموضحة في الجدول (1) والمتمثل بتوزيع وايبل (Weibull Distribution ,A=1,D= β is known) مع أخذ قيم افتراضية للمعلمات الخاصة بالتوزيع بالإضافة إلى إعطاء قيم أولية للمعلمات α_0,β_0 ومعلمة دالة الخسارة والخاصة بالتقدير وتم تكرار التجربة (N=1000) لغرض الحصول على مقدرات للمعلمة θ عندما تكون معلمة الشكل β معلومة تحت دالة الخسارة المركبة (PE) وكذلك مقدرات المعلمة θ تحت دالة خسارة الخطأ اللوغارتيمي التربيعي (LogSE) ودالة خسارة الانتروبية (E) حسب المعادلات (18) و(20) و(21) وباستخدام معيار للمقارنة (متوسط مربعات الخطأ (MSE)) الموضحة في الجدول (2) و (3) فضلاً عن تحديد حجم العينة الأمثل تحت دالة الخسارة المركبة (PE) وحسب المعادلة (28) الموضحة في الجدول (3)، وتم استخدام برنامج MATLAB و MAPLE للوصول الى النتائج المطلوبة، علما ان القيمة الافتراضية لكلفة المعاينة لكل وحدة هي C=0.001.

الجدول (2): مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (LogSE) و(E) و(PE) بقيم أولية $\alpha_0 \ge \beta_0$

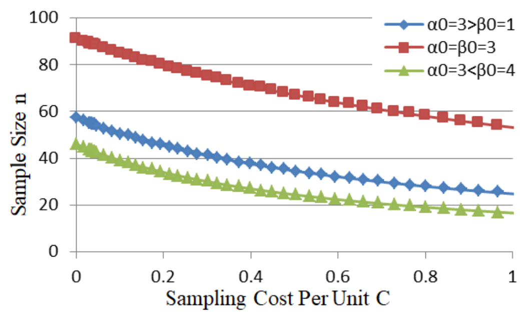
N	b	معيار المقارنة	$\theta=1 \quad k=1$			$\theta=1 \quad k=2$		
			$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_{E}$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_{E}$
10	1		1.0155	1.0807	1.0911	0.9542	0.9425	0.9192
		MSE	0.0011	0.0072	0.0081	0.00195	0.0058	0.00992
	2		0.9960	0.9898	0.9986	0.9576	0.9934	0.9292
		MSE	0.0036	0.00418	0.00539	0.0015	0.00196	0.00197
	3		0.9417	0.9070	0.9495	0.9672	0.9689	0.95300
		MSE	0.00159	0.00193	0.00681	0.0055	0.00865	0.01554
50	1		0.9863	0.9831	0.9767	0.9901	0.9869	0.9805
		MSE	0.001099	0.000897	0.0004153	0.000810	0.0001915	0.0001190
	2		0.9910	0.9816	0.9722	0.9850	0.9757	0.9664
		MSE	0.001095	0.0004041	0.0001861	0.001059	0.0003925	0.0001621
	3		0.9924	0.9758	0.9648	0.9877	0.9713	0.9603
		MSE	0.0009	0.0008	0.00015	0.001	0.0007	0.00015
100	1		1.0007	0.9991	0.9958	0.9960	0.9944	0.9911
		MSE	0.000074	0.0000478	0.0001058	0.000266	0.0000466	0.0001033
	2		0.9953	0.9904	0.9856	0.9935	0.9887	0.9839
		MSE	0.0000267	0.0001020	0.0001013	0.000260	0.0000999	0.0000219
	3		0.9936	0.9850	0.9793	1.0004	0.9917	0.9859
		MSE	0.000263	0.0001920	0.0001874	0.000272	0.0001974	0.0001280

الجدول (3): مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (LogSE) و(E) و(PE) بقيم أولية $\alpha_0 < \beta_0$

N	b	معيار المقارنة	$\theta=2 \quad k=1$			$\theta=3 \quad k=2$		
			$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_{E}$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_{E}$
10	1		2.1257	1.7470	0.9897	2.9825	2.9708	1.8526
		MSE	0.0232	0.1143	0.8226	0.0057	0.0521	0.4466
	2		2.1490	2.4044	1.9579	3.0215	2.9513	2.8241
		MSE	0.0020	0.0029	0.0102	0.0001	0.0005	0.0012
	3		2.1179	2.2128	1.4333	2.9719	2.6067	3.6591
		MSE	0.0001	0.0036	0.0224	0.00001	0. 0005	0.0008
50	1		2.0300	2.0169	1.9906	3.0139	2.9857	2.9292
		MSE	0.009142	0.0003897	0.0001449	0.0002	0.00012	0.0001184
	2		2.0285	1.9910	1.9535	3.0103	2.8561	2.7019
		MSE	0.0039	0.0004	0.0029	0.0008	0.000873	0.0003435
	3		2.0284	1.8896	1.8971	3.0007	3.0683	2.8866
		MSE	0.0053	0.000764	0.0002158	0.0021	0.0008156	0.0006039
100	1		2.0111	2.0045	1.9913	3.0002	2.9857	2.9567
		MSE	0.0007062	0.000299	0.0001494	0.000654	0.0003	0.00021
	2		2.0190	1.9996	1.9801	3.0287	3.0138	2.9840
		MSE	0.0008832	0.0001386	0.00009567	0.0008946	0.0002432	0.0001252
	3		2.0184	1.9843	1.9616	3.0430	2.9995	2.9561
		MSE	0.00098	0.0007	0.0024	0.0009	0.0003	0.000136

جدول(3):مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (LogSE) و(E) و(PE) باستخدام حجم العينة الامثل $C=0.001$

b	n	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{E}$	$\hat{\theta}_{PE}$	MSE_{LogSE}	MSE_{E}	MSE_{PE}
3	100	1.9913	1.9721	1.9817	0.0389836	0.0389402	0.0388687
2		1.9889	1.9745	1.9827	0.0352336	0.0352549	0.0351913
1		1.9875	1.9779	1.9843	0.0354383	0.0354302	0.0354148
b	n*	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{E}$	$\hat{\theta}_{PE}$	MSE_{LogSE}	MSE_{E}	MSE_{PE}
3	93	1.9926	1.9720	1.9822	0.039844	0.039756	0.039693
2	53	1.9786	1.9523	1.9673	0.065093	0.065204	0.064968
1	31	1.9725	1.9435	1.9628	0.115347	0.11444	0.114851



الشكل (1): علاقة حجم العينة الامثل مع تغير كلفة معاينة لكل وحدة C

10- الاستنتاجات

تعتبر دالة الخسارة المركبة (المعدل الموزون) بين دالة الخسارة الانتروبية الغير المتماثلة ودالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي المتماثلة هي تعديل لدالة الخسارة الانتروبية. مقدر بيز لمعلمة θ لتوزيع زمن الحياة عند اختيار توزيع وايبل للتقدير عندما تكون معلمة الشكل معلومة تحت دالة الخسارة المركبة اكثر كفاءة عند حجم العينة صغيرة بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 < \beta_0$ وقيمة موجبة لـk , b فان ($MSE_{PE} < MSE_E$) والعكس يكون اكثر كفاءة عندما يكون حجم العينة كبير بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 \ge \beta_0$ وقيمة موجبة لـk, b فان ($MSE_{PE} < MSE_{LogSE}$). الحصول على حجم العينة البيزي الأمثل تحت دالة خسارة المركبة (PE) باستخدام توزيع وايبل للمعلمة θ المختارة من توزيع زمن الحياة نلاحظ وجود علاقة عكسية بين كلفة المعاينة لكل وحدة C مع حجم العينة عند تغيير القيم الاولية لـ α_0,β_0 وهذا ما موضح في الشكل (1).

11–Reference

1. Al-Akash, S. N. Rashid, (2018), “Bayesian estimation of the parameters of some failure distributions, determining the optimal sample size under two compound loss functions,” an unpublished doctoral thesis, Department of Statistics and Informatics - College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul, Iraq.
2. Al-Issawi, Iqbal Jabbar, (2011), “Comparison of Standard Bease Estimates for the Exponential Distribution Parameter Using Different Loss Functions,” Al-Mustansiriya Science Journal, Journal (22), Issue (7), 61-74.
3. Bolstad, W.M.,(2004),”Introdiaction to Bayesian Statistics”, A John Wiley & Sons, INC., Publication, Wiley- Interscience.
4. Boudjerda, K., Chadli, A. and Merradji, A.,(2013),”Bayesian Estimation of the Rayleigh Distribution under Different Loss Function”, Electronic Journal of Applied Statistical Analysis, Vol. (2), No.(3), pp 1-35.
5. Box, G. E. P. and Tiao, G. C., (1973), "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addition –Wesley Publishing Company, California, London.
6. Brown, L.,(1968),”Inadmissibility of the Usual Estimation of scal Parameters in Problems with Unknown Location and scale Parameters”, Ann Mathematics statistics, Vol.(39), No.(1), pp 29-48
7. Calabria, R. and Pulcini, G.,(1994),”An Engineering Approach to Bayes Estimation for the Weibull Distribution”, Micro-electron, Reliab. Vol.(34), No.(5), pp 789-802.
8. Kazmi, A.S.,Aslam, M. and Ali, S.,(2012),”Preference of Prior for the Class of Life-Time distribution under different Loss function”, Pakistan Journal of statistics, Vol.(28), No.(4), pp 467-484.

9. Kifayat, T, Aslam, M and Ali, S,(2012)," Bayesian inference for the Parameter of the Power Distribution", Journal of Reliability and Statistical Studies, Vol.(5), No.(2), pp 45-58.
10. Lanping Li, (2013),"Minimax Estimation of Parameter of Generalized Exponential Distribution under Square Log Error Loss and MLINEX Loss function", Research Journal of Mathematics and Statistics, Vol.(5), No.(3), pp 24-27.
11. Lindley, D. V.,(1997)," The Choice of Sample Size", Journal of the Royal Statistical Society. Series, Vol. (46), No. (2), pp. 129-138.
12. Lindley, D.V.,(1972),"A Class of Utility Function", the Annals of statistics, Vol.(4), No.(1), pp 1-10.
13. Mood, A. ,Graybill, F.A. and Bose, D. ,(1974),"Introduction to the Theory of Statistics", Mc Gram-Hill series in probability and statistics.
14. Muhammad, S.A. ,Kundu, D. and Ali , S. M.,(2010)," Bayesian Estimation of the Mixture of Generalized Exponential Distribution using the Censored Sample under Different Loss Functions",AMS classification,pp 1-24.
15. Prakash, G. and Singh, D.C. ,(2010),"Bayesian Shrinkage estimation in a Class of Life Testing Distribution", Data Science Journal, Vol.(8), No.(30), pp 243-258.
16. Saiful Islam, A.F.M., Roy, M. and Ali, M.M.,(2004),"A Non-Linear Exponential (NLINEX) Loss Function in Bayesian", Journal of the Korean Data and information science society, Vol. (15), No. (4), pp 899-910.
17. Saiful Islam, A.F.M.,(2011),"Loss Function, Utility Function and Bayesian Sample Size Determination", Ph.D. thesis, University of London.
18. Varian, H.R.,(1975),"A Bayesian Approach to Real Estate Assessment", in studies in Bayesian Econometrics and statistics in Honour of Leoard J. savage.eds. Stephen E. Fienberg Arnold Zellner, Amsterdam, North Holland, pp 195-208.
19. Zellner, A.,(1986),"Bayesian Estimation & Prediction Using Asymmetric Loss Function", Journal of American statistics Association, Vol. (81), No.(394), pp 446-451.

Bayesian estimation for Life-Time distribution parameter under Compound Loss Function with Optimal Sample Size Determination

Safwan Nathem Rathed Raya salim Mohammed
Department of Statistics and Informatics, College of Computer science and Mathematics, University of Mosul, Mosul, Iraq

Abstract:
This research aims to find Bayes estimator under symmetric and asymmetric two loss functions, such as the squared Log error loss function and entropy loss function, as well as a loss function that combines these two functions. It's called compound loss function, which is asymmetric in nature. A comparison of the Bayes estimators for scale parameter of Life-Time distribution, which includes a collection of known distributions under the compound proposed loss function, and its contained loss functions as well as the estimation of optimal sample size. Using a mean square error criterion (MSE), where the generation of the random data using the simulation for estimate Weibull distribution parameters that represents a special case of Life-Time distribution different sample sizes (n=10,50,100) and (N=1000), taking initial values for the parameters α_0, β_0, to get to the balanced estimator that add between two loss functions.

Keyword: Bays estimator ,life time distribution ,symmetric and asymmetric loss functions ,cost function, optimum sample size