A New Formula for Conjugate Gradient in Unconstrained Optimization

Hussein A. Wali
ha678413@gmail.com

Khalil K. Abbo
kh_196538@yahoo.com

Department of Mathematics
College of Computers Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 25/08/2019 **Accepted on: 23/09/2019**

ABSTRACT

The conjugate gradient method is an important part of the methods of optimization that are not constrained by local convergence characteristics. In this research, a new formula for the conjugated coefficient is derived depending on the linear structure. The new method fulfills the regression requirement. In addition, using the Wolff search line terms, the overall convergence of the new method has been demonstrated. At the end of the research were presented numerical results that show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: unconstrained optimization, conjugate gradient method, sufficient descent property.

الصيغة الجديدة للتدرج المترافق في الامثلية غير المقيدة

حسين علي ولي **خليل خضر عبو**

قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٩/٠٨/٢٥ **تاريخ قبول البحث: ٢٠١٩/٠٩/٢٣**

الملخص

طريقة التدرج المترافق جزءِ مهم مِن طرائق الأمثلية غير المقيدة بخصائص تقاربه المحليّة، وان العامل الاساسي في هذه الطريقة هو العامل الترافق في اتجاهات البحث. في هذا البحث، تم اشتقاق صيغة جديدة للمعامل المترافق اعتمادا على تركيب خطي. وتتحقق الطريقة الجديدة شرط الإنحدار. بالإضافة إلى ذلك وباستخدام شروط خط بحث وولف، تم إثبات التقارب الشامل للطريقة الجديدة. وفي نهاية البحث تم تقديم النتائج العددية التي تظهر فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: الامثلية غير المقيدة، طريقة التدرج المترافق، خاصية الانحدار الكافي.

1 المقدمـة: (Introduction)

طريق التدرج المترافق الخطية هي طريقة تكرارية مُصممة لإيجاد قيمة صغرى شاملة عند المتجه حقيقي $x^* \in R^n$. أذا كان $f : R^n \to R$ تصغير دالة الهدف التي يعبر عنها بالصيغة الآتية:

$$Minimize\ f(x)\ , \quad \forall\ x^* \in R^n \tag{1}$$

من الصفات المهمة أن طريقة التدرج المترافق لها القابلية على توليد مجموعة متجهات لها خاصية الترافق (Conjugacy)، إذ يمكنها أن تحسب الاتجاه الجديد d_{k+1} باستخدام الاتجاه السابق d_k والتدرج الحالي g_k، ويمكن ان تحسب النقاط$[x_k]$المتولدة الجديدة عن طريق المتسلسلة :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k , k = 1,2,... \qquad (2)$$

ويختار بحيث يكون تركيباً خطياً من($-g_k$) (اتجاه الانحدار الشديد) و d_k (الاتجاه السابق) ولا نحتاج لمعرفة جميع الاتجاهات السابقة $d_0, d_1, \ldots , d_{n-1}$ للمجموعة المترافقة؛ إذ d_{k+1} مترافق مع جميع الاتجاهات السابقة. وهذه الصفة تجعل هذه الطريقة تتطلب مساحة خزن وحسابات قليلة. نكتب .(Abbo, Laylani, and Khudhur : 2016)

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_{k+1} d_k \qquad (3)$$

إذ β_{k+1} تمثل كمية عددية، تحدد بحيث يكون d_{k+1} و d_k مترافقين بالنسبة للمصفوفة. نختار اتجاه البحث الأول عند النقطة الابتدائية $d_0 = -g_0$ (اتجاه الانحدار الشديد)، (Nocedal and Wright, 2006). إن معدل التقارب لطرائق التدرج المترافق يكون خطياً ما لم يسترجع التكرار من أكثر الصيغ شهرة.

الخيارات المختلفة للمعلمة β_{k+1} في خوارزميات التدرج المترافق التقليدية

$$\beta_{k+1}^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}$$ (Hestenes-Stiefel(HS)1952)

$$\beta_{k+1}^{FR} = \frac{g_{k+1}^T g_k}{g_k^T g_k}$$ (Fletcher-Reeves (FR) 1964)

$$\beta_{k+1}^{PR} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{g_k^T g_k}$$ (Polak-Ribière (PR) 1969)

$$\beta_{k+1}^{DY} = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{d_k^T y_k}$$ (Dai-Yuan (DY) 1999)

$$\beta_k^{CC} = (1-\theta_k) \frac{g_{k+1}^T y_k}{g_k^T g_k} + \theta_k \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{s_k^T y_k}$$ (Andrei, 2007a)

$$\theta_k = \frac{(y_{k+1}^T g_{k+1})(s_k^T y_k) - (y_{k+1}^T g_{k+1})(g_k^T g_k)}{(y_{k+1}^T g_{k+1})(s_k^T g_k) - (g_{k+1}^T g_{k+1})(g_k^T g_k)}$$

$$\beta_k^{ND} = (1-\theta_k) \frac{g_{k+1}^T y_k}{g_k^T g_k} + \theta_k \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{s_k^T y_k}$$ (Andrei, 2007d)

$$\theta_k = \frac{g_{k+1}^T s_k}{g_k^T g_{k+1}}$$

$$\beta_{k+1}^{KH2} = \frac{(g_{k+1}^T y_k)^2}{g_k^T g_k (2 g_{k+1}^T y_k - \|g_{k+1}\|^2)}$$ (Abbo and Khudhur, 2015a)

$$\beta_{k+1}^{KH1} = \frac{(g_{k+1}^T y_k)^2}{d_k^T y_k (2 g_{k+1}^T y_k - \|g_{k+1}\|^2)}$$ (Abbo and Khudhur, 2015b)

الطرائق الهجينة هي الربط بين طريقتين إحداها تمتلك خواص حسابية جيدة (Good Computational Properties) والاخرى تمتلك خواص تقارب شاملة قوية(Strong Convergence Properties). وعليه فالخوارزمية الهجينة لها حافز قوي للاستفادة من السمات البارزة لخوارزمية CG الكلاسيكية (التقليدية).

(Andrei, 2011). هناك العديد من الاقتراحات من الطرائق الهجينة من اجل الوصول الى افضل طرائق التدرج المترافق التي لها خواص التقارب و كفاءة الحسابية جيدة بشكل أساسي، وكما ان الخوارزميات الهجينة لها الحافز الكبير لتجنب الفشل ولتطوير اداء الخوارزميات التدرج المترافق الكلاسيكية فنرى ان الخوارزميات CG الهجينة احسن من الخوارزميات التدرج المترافق الكلاسيكية .(Andrei, 2009a)

اختلاف معامل الترافق طرائق التدرج المترافق المختلفة لحل مسائل الامثلية اللاخطية وغير المقيدة.

2 اشتقاق الصيغة الجديدة للتدرج المترافق (The Derivation of the New CG Formals)

الفكرة من هذا الاشتقاق هو تطوير طريقة Dai and Lia اعتماداً على تركيب خطي. ان العامل الاساسي في طرائق التدرج المترافق هو العامل الترافق الاتجاهات البحث d_k اي ان :

$$d_k^T H_j d_k = 0, \forall k \neq j \tag{4}$$

نلاحظ ان المعادلة اعلاه تكون صحيحة في حالة دالة الهدف دالة تربيعية محدبة وبحث خطي تام , يمكن اعادة صيغتها كالاتي:

$$d_{k+1}^T y_k = 0 \tag{5}$$

وفي العام 1978 قد تم تعميم الشرط الترافق $(d_{k+1}^T y_k = 0)$ من قبل العالم Perry بالصيغةالاتية:

$$d_{k+1}^T y_k = -g_{k+1}^T s_k \tag{6}$$

قام العالمان Dai And Laio في السنة 2001 بالتعميم الشرط الترافق المقترح من قبل Perry الى الصيغة الاتية:

$$d_{k+1}^T y_k = -t g_{k+1}^T s_k \, , t > 0 \tag{7}$$

وعلى اساسها اقترح معامل الترافق التالية:

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T (y_k - t_k s_k)}{d_k^T y_k} \tag{8}$$

الان, اعتماداً على تركيب محدب نقترح الصيغة التالية:

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T ((1-r) y_k - r s_k)}{d_k^T y_k}$$

حيث ان $0 < r < 1$. ولايجاد قيمة r نتبع الخطوات الاتية:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T \left((1-r) y_k - r s_k \right)}{s_k y_k} s_k \tag{9}$$

نضرب المعادلة اعلاة في (y_k^T)

$$d_{k+1}^T y_k = -g_{k+1}^T y_k + \left(\frac{\left((1-r) y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1} \right)}{s_k^T y_k} \right) s_k^T y_k$$

مع بعض العمليات الجبرية وتعويض عن $d_{k+1}^T y_k$ بـ $(-s_k^T g_{k+1})$ نحصل على التالي:

$$-g_{k+1}^T y_k + (1-r) y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1} = -s_k^T g_{k+1}$$

من المعادلة اعلاه نحصل على الاتي:

$$-y_k^T g_{k+1} + y_k^T g_{k+1} - r y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1} = -s_k^T g_{k+1} \tag{10}$$

من المعادلة (10) نحصل على قيمة

$$r = \frac{s_k^T g_{k+1}}{(y_k^T g_{k+1} + s_k^T g_{k+1})} \qquad (11)$$

خوارزمية (2.1) (KHC Algorithm)

الخطوة 1 : اختر قيمة ابتدائية x_1 , $\varepsilon > 0$ ، ضع $g_1 = \nabla f_1$ ، $d_1 = -g_1$ و $k = 1$.

الخطوة 2 : إذا كان $\|g_k\|_\infty \le \varepsilon$ اذن توقف , x_k هو النقطة المثلى . وإلا اذهب إلى الخطوة 3

الخطوة 3: احسب طول الخطوة $\alpha_k > 0$ يحقق شرطي Wolfe القويين.

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k$$
$$\left|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k\right| \le c_2 \left|\nabla f(x_k)^T d_k\right| ,$$

الخطوة 4: احسب $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. واحسب f_{k+1} و g_{k+1} , احسب $y_k = g_{k+1} - g_k$ و $s_k = x_{k+1} - x_k$.

الخطوة 5: احسب اتجاه البحث d_{k+1} حسب المعادلة (3) .

الخطوة 6: إذا كان معدل التقارب $\left|g_{k+1}^T g_k\right| > 0.2\|g_{k+1}\|^2$ تتحقق اذن ضع $d_{k+1} = -g_{k+1}$

الخطوة 7 : احسب قيمة ابتدائية $\alpha_{k+1} = \alpha_k \left(\frac{\|d_k\|}{\|d_{k+1}\|}\right)$

الخطوة 8 : ضع $k = k + 1$ واذهب إلى الخطوة 2.

3 بعض الخواص النظرية للخوارزمية الجديدة

نبرهنها مثل خاصية الأنحدار من هذهِ الخوارزمية وخاصية الترافق.

النظرية (3.1)

سوف نفرض الفرضيات التالية على دالة الهدف

(i) مستوى المجموعة (Level Set) $S = \{x \in R^n : f(x) \le f(x_0)\}$ مقيدة عند النقطة المعطاة. اي يوجد هناك ثابت موجب B>0 بحيث ان $\|x\| \le B , \forall x \in S$

(ii) دالة الهدف f مستمرة وقابلة للاشتقاق في بعض الجوار N لمستوى المجموعة S ,وتدرجاتها تكون مستمرة ليبشتز (Lipschitz Continuous), اي يعني يوجد ثابت $L > 0$ بحيث ان

$$\|g(x) - g(y)\| \le L\|x - y\| , \forall x, y \in N \qquad (12)$$

باستخدام الفرضية , نحصل على الاتي:

يوجد ثابت $\Gamma > 0$ بحيث ان

$$\|\nabla f(x)\| \le \Gamma, \forall x \in S \qquad (13)$$

.(Laylani, , Abbo, and Khudhur. 2018), (Jabbar, Abbo and Khudhur. 2018)

4 خاصية الأنحدار للصيغة الجديدة (The Descent Property of the new formula)

سوف نبرهن خاصية الانحدار الكافي (Sufficient Descent Property) للصيغة الجديدة المقترحة لخوارزمية التدرج المترافق ويعبرعن خاصية الانحدار الكافي لخوارزمية التدرج المترافق بالصيغة التالية :

$$g_{k+1}^T d_{k+1} \le -c\|g_{k+1}\|^2 \quad \text{for} \quad k \ge 0 \quad \text{and} \quad c > 0 \qquad (14)$$

ومن جهة اخرى, يحقق لنا شرط (Lipschize) $y_k \le L s_k$ المتباينة التالية:

$$s_k^T y_k \le L\|s_k\|^2 \quad (15)$$

(Laylani, , Abbo, and Khudhur. 2018)

المأخوذة(4.1)(lemma):

نفرض ان الفرضيتين (i),(ii) في النظرية (3.1) قد تحققت. لذا g_k قد اثبتنا بواسطة الشرح

$$g_k^T g_{k-1} \ge 0$$

البرهان:

لكن $g_i(x_k)$ يمثل العنصر ذو الموقع i من g_k

$$g_k = \left(g_i(x_k)\right), i = 1,2,\dots,n$$

اذا فرضنا ان لدينا حالتين كالاتي:

اولا: اذا كانت اما $g_i(x_k) = 0$ او $g_i(x_{k-1}) = 0$ اذن $g_i(x_k)g_i(x_{k-1}) = 0$ بمعنى النتيجة صحيحة.

ثانيا: اذا كانت اما $g_i(x_k) \neq 0$ او $g_i(x_{k-1}) \neq 0$ اذن يوجد حالتان جزئيتان وهما:

اذا كانت $g_i(x_k) < 0$ و $g_i(x_{k-1}) > 0$ و g_k تحقق شرط (Liptchiz) و $\forall \varepsilon > 0$ بحيث ان $|g_i(x_k) - g_i(x_{k-1})| < \varepsilon$ بتغير المعادلة اعلاه الى:

$$-\varepsilon + g_i(x_{k-1}) < g_i(x_k)$$

ويؤدي الى ان $g_i(x_{k-1}) < g_i(x_k) + \varepsilon$ لتكن $\varepsilon \to 0$

$\therefore$ لدينا تناقض

اذا كانت $g_i(x_k) > 0, g_i(x_{k-1}) < 0$ و g_k مستمرة (Liptchiz). $\forall \varepsilon > 0$ بحيث ان

$$|g_i(x_k) - g_i(x_{k-1})| < \varepsilon$$

اذن $g_i(x_k) < g_i(x_{k-1}) + \varepsilon$ ليكن $\varepsilon \to 0$ ايضا نحصل على تناقض. اذن انتهى البرهان

النظرية (4.2):

لتكن d_k اتجاه البحث d_k $(k \ge 0)$ تتولد حسب الصيغة (3). نفرض ان حجم الخطوة α_k تحقق شرطا Wolfe القياسي عندئذٍ d_k تحقق خاصية الأنحدار الكافي (5).

البرهان:

برهان بطريقة الاستقراء الرياضي:

1- عندما $k = 1$ فإن $d_1 = -g_1 \;\; \to \;\; d_1^T g_1 = -\|g_1\|^2 < 0$

2- نفرض أن العلاقة (14) صحيحة لكل k .

3- نبرهن صحة العلاقة (5) عندما $k = k+1$ وذلك بضرب طرفي العلاقة d_{k+1} بـ g_{k+1}^T نحصل على

$$d_{k+1}^T g_{k+1} = -g_{k+1}^T g_{k+1} + \left(\frac{(1-r)y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1}}{s_k^T y_k}\right) s_k^T g_{k+1}$$

وتبسيط المعادلة اعلاه نحصل على

$$d_{k+1}^T g_{k+1} = -\|g_{k+1}\|^2 + \frac{(1-r)y_k^T g_{k+1} s_k^T g_{k+1}}{s_k^T y_k} - \frac{r\left(s_k^T g_{k+1}\right)^2}{s_k^T y_k}$$

نهمل الجزء السالب من المعادلة اعلاه ونفرض ان $c = (1-r)$ فنحصل على الصيغة الاتية:

$$d_{k+1}^T g_{k+1} = -\|g_{k+1}\|^2 + c\,\frac{y_k^T g_{k+1} s_k^T g_{k+1}}{s_k^T y_k}$$

نستخدام الصيغة الاتية $s_k^T y_k \geq s_k^T g_{k+1}$ في المعادلة اعلاة نحصل على التالي:

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + c\,\frac{y_k^T g_{k+1} s_k^T y_k}{s_k^T y_k}$$

نبسط المعادلة اعلاة نحصل على التالي:

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + c y_k^T g_{k+1}$$

بما ان : $y_k^T = (g_{k+1} - g_k)^T$ نعوض عن

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + c(g_{k+1} - g_k)^T g_{k+1}$$

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + c\|g_{k+1}\|^2 - g_k^T g_{k+1}$$

باستخدام المأخوذة(٣,١) فان $g_k^T g_{k+1} \geq 0$ ونهمل الجزء السالب من المعادلة اعلاه:

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 (1-c) \leq 0$$

$$\therefore\ d_{k+1}^T g_{k+1} < 0$$

5 تحليل التقارب (Convergence Analysis)

نبرهن في هذه الفقرة على أن طريقة KHC مع اتجاه البحث d_k يتقارب تقارباً مطلقاً و لنبرهن ذلك نحتاج إلى الفرضية التالية:

المأخوذة (5.1) (Lemma)

سوف نفرض إن الفرضية (3.1) تتحقق، والمتتابعة $\{x_k\}$ تتولد من (2), علية إن d_k اتجاه بحث منحدر وطول الخطوة تحقق شرطا (Wolfe) الاعتياديين. إذ إن

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty \tag{15}$$

إذ إن المعادلة (15) تسمى شرط **(Zoutendijk Condition)** التي تعد على قدر من الأهمية لبرهان التقارب الشامل لخوارزميات الأمثلية. (Zoutendijk , 1970)

المأخوذة (5.2) (Lemma)

سوف نفرض إن الفرضية (3.1) تتحقق, والمتتابعة $\{x_k\}$ تتولد من (3), علية إن d_k اتجاه بحث منحدر و طول الخطوة α_k تحقق شرطا (Wolfe) القويين

$$\begin{aligned} &f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \\ &\left|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k\right| \leq c_2 \left|\nabla f(x_k)^T d_k\right| , \end{aligned} \tag{16}$$

إذ ان:

$$\sum_{k>1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|^2} = \infty \tag{17}$$

نحصل على

$$\lim_{k\to\infty} \left(\inf\|g_k\|\right)=0 \tag{18}$$

الدالة المحدبة بانتظام, لذلك من خلال المأخوذة (5.2) نستطيع ان نثبت النظريات الاتية.

(Dai and Liao, 2001) ,(Khudhur. 2015)

النظرية (5.3):

سوف نفرض أن الفرضية (3.1) والمتتابعة $\{x_k\}$ تتولد من (2), علية إن d_k اتجاه بحث منحدر و α_k طول الخطوة تحقق شرطا (Wolfe) القويين (16) ، وأن دالة الهدف f محدبة بانتظام (Uniformly Convex Function)S في مستوى المجموعة S, حيث يوجد ثابت $\mu > 0$. لذلك فان $\lim_{k\to\infty} \left(\inf\|g_k\|\right)=0$ تتحقق.

البرهان:

$$\|d_{k+1}\| = \left\| -g_{k+1} + \left(\frac{(1-r)\, y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1}}{s_k^T y_k} \right) s_k \right\|$$

$$\|d_{k+1}\| = \left\| -g_{k+1} + \left(\frac{y_k^T g_{k+1} - r y_k^T g_{k+1} - r s_k^T g_{k+1}}{s_k^T y_k} \right) s_k \right\|$$

$$\|d_{k+1}\| \le \|g_{k+1}\| + \frac{\|s_k\|^2 \|g_{k+1}\| + (L - Lr - r)}{\dfrac{1}{L\,\|s_k\|}}$$

$$\|d_{k+1}\| \le \|g_{k+1}\| \left(1 + 1 - r - \frac{r}{L} \right)$$

$$\|d_{k+1}\| \le \|g_{k+1}\| \left(\frac{2L - rL - r}{L} \right) \bar{y}_k$$

ومن العلاقة أعلاه نحصل على:

$$\sum_{k\ge1} \frac{1}{\|d_k\|^2} \ge \left(\frac{1}{2L - rL - r} \right)^2 \frac{1}{\bar{y}} \sum_{k\ge1} 1 = \infty$$

وباستخدام المأخوذة (5.2) فان $\lim_{k\to\infty} \|g_k\| = 0$.

6 النتائج العددية (Numerical Results)

سنناقش في هذه الفقرة النتائج العددية للخوارزمية المقترحه الجديدة KHC التي حصلت عليها من استخدام الصيغة الجديدة للمعامل الترافق لمجموعة من دوال الاختبار في الأمثلية غير المقيدة مأخوذة.(Andrei,2008) ولتقييم أداء هذه الخوارزمية المقترحه تم اختيار (75) دالة اختبار أدرجت ضمن هذه الرسالة والموضحة في الملحق.

تم اختيار الدوال للأبعاد 1000 , ... , $n = 100$, وبمقارنة أداء هذه الخوارزمية المقترحه الجديدة مع خوارزميات ND, CC المقياس المستخدم لإيقاف تكرارات الخوارزميات هو $\|g_k\|^2 = 10^{-6}$، وقد كتب البرنامج بلغة فورتران (بالأعتماد على برنامج Andrei) (version 6.6.0) (FORTRAN 77) ، إن دوال الاختبار تبدأ عادة بنقطة البداية القياسية وخلاصة النتائج العددية دونت في الاشكال (1)و(2)و(3) وعن طريق البرنامج (Matlab R2009b)، إن مقياس تقييم الخوارزمية تمّ مقارنته بالاعتماد على طريقة لـ دولان و مور (Dolan and more) لمقارنة كفاءة الخوارزمية المقترحة مع خوارزميات ND, CC.عرف $p=750$ كمجموعة n_p من دوال الاختبار و $S=4$ عدد الخوارزميات المستخدمة. لتكن $l_{p,s}$ يمثل عدد مرات إيجاد قيمة دالة الهدف من قبل الخوارزمية s لحل مسألة p .

$$r_{p,s} = \frac{l_{p,s}}{l_p^*}$$

حيث ان $l_p^* = \min\{l_{p,s} : s \in S\}$. من الواضح ان $r_{p,s} \geq 1$ لكل قيم p,s . اذا فشلت الخوارزمية في حل المسائل فأن النسبة $r_{p,s}$ تساوى الى العدد الكبير M، خاصية الكفاءة للخوارزمية s تعرف كدالة توزيع المتراكم على نسبة الكفاءة $r_{p,s}$

$$\rho_s(\tau) = \frac{size\{p \in P : r_{p,s} \leq \tau\}}{n_p}$$

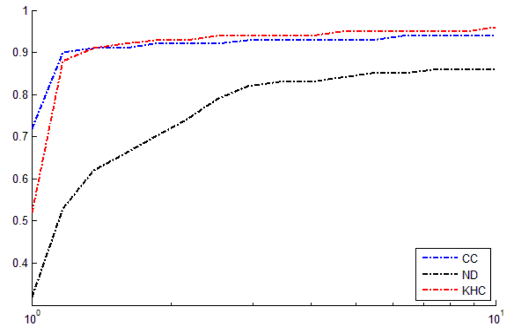
من الواضح $p_s(1)$ يمثل النسبة المئوية لنجاح افضلية الخوارزمية s. خاصية الكفاءة يمكن أن تستخدم ايضاً في تحليل التكرارات، عدد قيم التدرج ووقت المعالج، بالإضافة للحصول على الملاحظات الواضحة في المخطط الاتي الاحداثيات الافقية ومقياس الاسسي، (E. D. Dolan and J. J. Mor´e.2001)

الجدول (6.1): مقارنة الخوارزميات المختلفة للتدرج المترافق

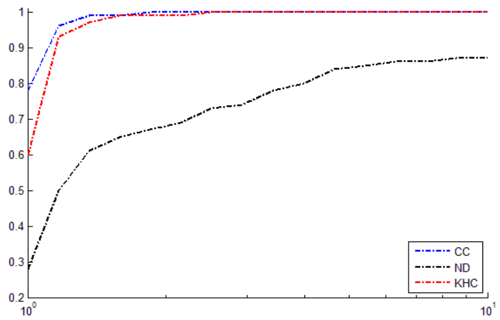
No.	Function	Dim	Algor	iter	Fg
1	Extended Trigonometric	100	Cc	19	35
			Nd	22	38
			Kh	19	35
	Extended Trigonometric	1000	Cc	40	67
			Nd	2002	2017
			Kh	36	64
2	Extended Penalty	100	Cc	9	16
			Nd	25	49
			Kh	9	16
	Extended Penalty	1000	Cc	12	23
			Nd	82	1870
			Kh	12	23
3	Raydan 2	100	Cc	5	10
			Nd	5	10
			Kh	5	10
	Raydan 2	1000	Cc	5	10
			Nd	5	10
			Kh	5	10
4	Extended Himmelblau HIMMELBC (CUTE)	100	Cc	11	20
			Nd	29	58
			Kh	11	20
	Extended Himmelblau HIMMELBC (CUTE)	1000	Cc	23	36
			Nd	31	62
			Kh	12	22
5	Extended PSC1	100	Cc	9	18
			Nd	17	34
			Kh	9	18
	Extended PSC1	1000	Cc	8	16

			Nd Kh	68 8	1945 16
6	ENGVAL1 (CUTE)	100	Cc Nd Kh	26 38 28	48 71 51
	cENGVAL1 (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	93 108 95	2429 2206 2205
7	BDQRTIC (CUTE)	100	Cc Nd Kh	472 2002 340	10904 2032 6313
	BDQRTIC (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	2002 2002 2002	95072 2026 85662
8	Extended DENSCHNA (CUTE)	100	Cc Nd Kh	11 25 10	20 38 18
	Extended DENSCHNA (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	22 24 10	35 38 19
9	Extended DENSCHNC (CUTE)	100	Cc Nd Kh	14 125 14	26 163 26
	Extended DENSCHNC (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	14 133 13	27 171 24
10	Generalized Tridiagonal 1	100	Cc Nd Kh	23 37 25	45 63 43
	Generalized Tridiagonal 1	1000	Cc Nd Kh	29 52 30	169 463 113
11	Extended Tridiagonal 1	100	Cc Nd Kh	11 2002 12	22 2102 24
	Extended Tridiagonal 1	1000	Cc Nd Kh	15 2002 12	28 2015 24
12	Extended Himmelblau HIMMELBG (CUTE)	100	Cc Nd Kh	10 10 10	12 12 12
	Extended Himmelblau HIMMELBG (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	10 10 10	12 12 12
13	FLETCHCR (CUTE)	100	Cc Nd Kh	23 39 24	47 79 48
	FLETCHCR (CUTE)	1000	Cc Nd Kh	30 33 31	60 63 56
14	Extended Block-Diagonal BD2	100	Cc Nd	14 123	24 157

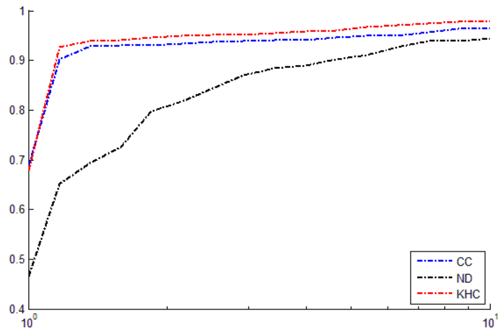
			Kh	15	25
	Extended Block-Diagonal BD2	1000	Cc	13	24
			Nd	131	167
			Kh	15	27
15	Extended DENSCHNF(CUTE)	100	Cc	21	37
			Nd	20	34
			Kh	23	37
	Extended DENSCHNF(CUTE)	1000	Cc	24	44
			Nd	22	39
			Kh	23	38



شكل (2) مقارنة بين الخوارزميات في عدد مرات حساب الدالة



شكل (1) مقارنة بين الخوارزميات في عدد التكرارات



شكل (3) مقارنة بين الخوارزميات في الوقت

المصادر

[1] Andrei, N., (2008), An Unconstrained Optimization Test Function collection, Advance Model. Optimization, Vol.(10), pp.147-161.

[2] Dai, Y. H. and Liao, L. Z., (2001), "New Conjugacy Conditions and Related Nonlinear Conjugate Gradient Methods". Applied Mathematics and Optimization, Springer-Verlag, New York, USA, 43, PP.87-101.

[3] Dolan.E. D and Mor´e.J. J, (2002), "Benchmarking optimization software with performance profiles", Math. Programming, 91, pp.201-213.

[4] Fletcher, R., (1987), Practical Methods of Optimization. Unconstrained Optimization, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.

[5] Zoutendijk, G. (1970) "Nonlinear programming, computational methods" in Integer and Nonlinear Programming, J. Abadie (Ed.), North-Holland: Amsterdam, pp.37-86.

[6] Abbo, Khalil K, and Hisham M Khudhur. 2015a. "New A Hybrid Conjugate Gradient Fletcher-Reeves and Polak-Ribiere Algorithm for Unconstrained Optimization." Tikrit Journal of Pure Science 21 (1).29-124.

[7] Abbo, Khalil K, and Hisham M Khudhur. 2015b. "New A Hybrid Hestenes-Stiefel and Dai-Yuan Conjugate Gradient Algorithms for Unconstrained Optimization." Tikrit Journal of Pure Science 21 (1).23-118.

[8] Abbo, Khalil K, Yoksal A Laylani, and Hisham M Khudhur. 2016. "Proposed New Scaled Conjugate Gradient Algorithm for Unconstrained Optimization" 5 (7).269-276.

[9] Abbo, Khalil K, Yoksal A Laylani, and Hisham M Khudhur. 2017. "A New Spectral Conjugate Gradient Algorithm Forunconstrained Optimization."1-9.

www.tjprc.org .

[10] Hisham M. Khudhur. 2015. "Numerical and Analytical Study of Some Descent Algorithms to Solve Unconstrained Optimization Problems." University of Mosul College Computer Sciences and Mathematics Department of Mathematics Iraq. University of Mosul,Master Thesis.

[11] Jabbar, Hawraz N, Khalil K Abbo, and Hisham M Khudhur. 2018. "Four--Term Conjugate Gradient (CG) Method Based on Pure Conjugacy Condition for Unconstrained Optimization." Kirkuk University Journal for Scientific Studies 13 (2).13-101.

[12] Laylani, Yoksal A., Khalil K. Abbo, and Hisham M. Khudhur. 2018. "Training Feed Forward Neural Network with Modified Fletcher-Reeves Method." Journal Of Multidisciplinary Modeling And Optimization 1 (1).14-22. .http://dergipark.gov.tr/jmmo/issue/38716/392124#article_cite

[13] Nocedal, J. and Wright, S. J., (2006), Numerical Optimization Springer Series in Operation Research, 2*nd* edition, Springer-Verlag, New York.

[14] Sun, W. and Yuan, Y., (2006), Optimization Theory and Methods, Nonlinear Programming, Springer Science, Business Media, LIC., New York.

[15] Hestenes, M. R. and Stiefel, E., (1952), Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. (5), No.(49), pp.409-436.

[16] Pedregal, P., (2004), Introducation to Optimization, Springer-Verlag, Inc., New York, USA.

[17] Powell, M. J. D., (1977), Restart Procedure for Conjugate Gradient Method, Mathematical Programming.12-241-254.

[18] Chong, E. K. P. and Zak, S. H., (2001), An Introduction to Optimization, Jone Wiley & Sons, Inc., Canada.

[19] Dai, Y. H. and Yuan, Y., (1999), A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property, SIAM Journal on Optimization, 10 (1)،177-182.

[20] Fletcher, R. and Reeves, C. M., (1964), "Function Minimization by Conjugate Gradients". Computer Journal،7,142-154.