On MP-Rings

Raida D. Mahmood — *raida.1961@uomosul.edu.iq*

Azhar M. Hajo — *azhar.mohammed911@gmail.com*

Department of Mathematics
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 28/11/2018 **Accepted on: 23/06/2019**

ABSTRACT

An ideal I of a ring R is said to be right (left) Pure if for every $\in I$, there is $b \in I$ such that $a = ab$ $(a = ba\, res)$. A ring R is said to be right (left) MP-ring, if every maximal right (left) ideal of R is a left (right) pure. In this paper have been studied some new properties of MP-rings, there connections with strongly regular rings.

Some of the main result of the present work are as follows:

1- Let R be aright MP-ring, r(a) is a W-ideal for all $a \in R$ then

a- Every essential ideal is a direct summand.

b- R is strongly regular ring.

2- Let R be aright MP-ring. If R is right almost abelian left NBF ring, then R is strongly regular.

Keywords: MP-ring, strongly regular, W-ideal, NBF-ring.

حول الحلقات من النمط-MP

رائدة داؤد محمود **أزهر محمد حاجو**

قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٨/١١/٢٨ **تاريخ قبول البحث:** ٢٠١٩/٠٦/٢٣

الملخص

يُقال لِلمثالي في الحلقة R ، بأنه نقي أَيمن (أَيسر)، إذا كانَ لِكل $a \in$ I يوجد $b \in$ I بِحيث إن $(a = ab$ $a = ba)$. يُقال لِلحلقة R حلقة مِن النمط-MP يُمنى (يُسرى)، إذا كانَ كل مِثالي أَعظمي أَيمن (أَيسر) نقي أَيسر (أَيمن). في هذا البحث درس بعض الخواص الجديدة لِهذه الحلقات وعلاقتها مع الحلقات المنتظمة بِقوة. ومِن أَبرز النتائج التي حَصلنا عليها:

1- لِتَكنْ R حلقة مِن النمط-MP يُمنى و r(a) مِثالي مِن النمط-W لِكُلْ $a \in R$ فَإن:

a) كُل مِثالي أَساسي هو مُركبة جمع مُباشر

b) R حلقة مُنتظمة بِقوة

2- لِتَكُنْ R حلقة مِن النمط-MP يُمنى. إذا كانت مِن النمط-NBF يُسرى وأَبيلية تقريبً يمنى فَإن R حلقة مُنتظمة بِقوة.

الكلمات المفتاحية: حلقة من النمط-MP، منتظمة بقوة، مثالي من النمط-W، حلقة من النمط-NBF

1. المقدمة

لتكن R حلقة تحوي على العنصر المحايد، والمقاسات كلها مقاسات يمنى أحادية. يُقال لِلمثالي I في الحلقة R بِأنه نقي أَيمن (أَيسر) إذا كان لِكل $a \in$ I يوجد b ∈ I بِحيث إن $a = ab$ $(a = ba)$. وهذا المفهوم درسه العديد مِن الرياضيين Abdullah[1] AL − Ezeh [2][3] $Mahmoud$[6][7] وكتعميم لِهذا المفهوم قدّمَ Mahmood[5] مَفهوم الحلقات مِن النمط-MP ؛ إذ يُقال لِلحلقة R بِأنها مِن النمط-MP يُمنى إذا كان كُل مِثالي أَعظمي أَيمن نَقي أَيسر. أعطيت خواص جديدة لِهذه الحلقات وطور بعض النتائج المعروفة. يقال للحلقة R بأنها منتظمة بقوة [4] إذا كان لكل $a \in R$ يوجد $b \in R$ بحيث إن $a = a^2b$. في [4] الحلقة R منتظمة بضعف يمنى (يسرى) إذا كان لكل $a \in R$ فأن $a \in aRaR$ $(a \in RaRa)$ ويقال بأنها منتظمة بضعف إذا كانت R منتظمة بضعف يمنى و يسرى . الحلقة R مختزلة اذا كانت لا تحتوي على عناصر غير صفرية معدومة القوى. يقال للحلقة R بأنها حلقة من النمط−NI [8] (عناصر معدومة القوى) إذا كان $N(R)$ هو مثالي. لكل $a \in R$, $r(a)$ $(l(a))$ يرمز إلى التآلف الأيمن (الأيسر) لـa ويرمز للمثالي المنفرد الأيمن (الأيسر) بالرمز $Y(R)$ $\big(Z(R)\big)$.

2. الحلقات من النمط-MP

ندرس في هذا البند الحلقات مِن النمط-MP وبعضاً مِن خواصها الأساسية وعلاقتها مع الحلقات المُنتظمة بقوة. الآن سَنقوم بِإعطاء تعريف الحلقات مِن النمط−MP .

تعريف$(\mathbf{2.1})$: **[5]**

يُقال لِلحلقة R بِأنها **حلقة من النمط-MP يُمنى (يُسرى)**، إذا كان كل مِثالي أَعظمي أَيمن (أَيسر) نقياً أَيسر (أَيمن).

مثال:− لِتكن Z_2 حلقة الأعداد الصحيحة معيار 2 ولتكن $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \;:\; a, b, c \in Z_2\right\}$ فَإن $\mathrm{I} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ مِثالي أَعظمي أَيمن ونقي أَيسر إذن R حلقة مِن النمط-MP يمنى.

قضية $(\mathbf{2.2})$: **[5]** لتَكُنْ R حلقة من النمط−MP يُمنى و $l(a) = 0$ لكل $a \in R$. فَإن كُل عنصر في R له معكوس أيمن.

كُل حلقة مُنتظمة بِقوة تكون حلقة مِن النمط-MP لكن العكس غير صحيح.

في المصدر [5] أعطيت المُبَرهنة الآتية:

مبرهنة $(\mathbf{2.3})$: الحلقة R مُنتظمة بِقوة إذا وفقط إذا كانت R مُختزلة ومِن النمط-MP يُمنى .■

تعريف: $(\mathbf{2.4})$: $[\mathbf{10}]$

يُقال لِلمثالي الأيمن (الأَيسر) K في الحلقة R بِأَنه **مِثالي من النمط−$\boldsymbol{W}$** $(\boldsymbol{Weak\ ideal})$ إذا كان لِكل $0 \neq a \in K$ ، يوجد $n > 0$ بِحيث إنَّ $a^n \neq 0$ وإن $\mathrm{R}a^n \subseteq K$.

مثال: لتكن $\left\{\begin{bmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} : a , a_i \in Z_2 , i = 1,2,3,4,5,6\right\}$ $= R$ حلقة بعنصر محايد . لتكن

$$L = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : b_i \in Z_2 , i = 1,2,3\right\} \in \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , L \in \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R

$$L \notin \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن ثَمَّ L ليس مثالياً في R لكنه مثالي من النمط$-W$

المبرهنة الآتية تُعطي أَحد الشروط لِلحلقة مِن النمط$-$ MP يُمنى لِلحصول على الحلقة المنتظمة بِقوة.

مبرهنة $(\mathbf{2.5})$: لِتكن R حلقة مِن النمط-MP يُمنى و $r(a)$ مِثالي مِن النمط-W لِكل $a \in$ R فَإِن R حلقة مُنتظمة بِقوة.

البرهان:$-$ نَفْتَرِض أَن $0 \neq b \in$ R ، بِحيث إِنَّ $b^2 = 0$. لِيكن $x \in l(b)$. إِذن $b \in r(x)$ لِهذا فَإِنَّ $l(b)$ هو مِثالي من النمط$-W$. بما أَن $b^2 = 0$ و يصبح لدينا $Rb \subseteq r(x)$ ومن هنا نحصل $l(b)$ مِثالي أَيمن في الحلقة R لِذلك يوجد مِثالي أَعظمي أَيمن M في الحلقة R بِحيث إِنَّ $l(\mathrm{b}) \subseteq M$. بِما أَن R هي حلقة مِن النمط-MP يُمنى و $b \in l(b) \subseteq M$ فَيوجد $c \in M$ بِحيث إِنَّ $b = cb$ وهكذا فَإِنّ $(1 - c) \in l(b) \subseteq M$ وهذا يؤدي إِلى أَن $1 \in M$ وهذا تناقض . لِذلك يكون $b = 0$ وعليه فَإِنَّ R مُختزلة وَبِاستخدام المبرهنة (2.3) فَإِنَّ R هي حلقة مُنتظمة بِقوة .■

يُقال للحلقة R بِأَنها **حلقة موحدة** $(\boldsymbol{Uniform\ ring})$ إِذا كان كُل مِثالي غير صفري في R أَساسياً. [4]

قضية مساعدة$(\mathbf{2.6})$:[**4**] إِذا كانت R حلقة مُختزلة فَإِنَّ

1- $r(a) = l(a)$ لكل $\mathrm{a} \in R$

2- $aR \cap r(a) = 0$ لِكُل $a \in R$.■

مبرهنة $(\mathbf{2.7})$: لِتكن R حلقة مِن النمط-MP يُمنى بحيث إِنَّ $r(a)$ هو مِثالي مِن النمط-W في R لكل $\mathrm{a} \in$ R ، فَإِنَّ R هي حلقة مقسومة يمنى إِذا كانت R حلقة موحدة.

البرهان:$-$ نَفْتَرِضْ أَنَّ $0 \neq a \in R$ وأَنَّ $aR \neq R$. إِذن يوجد مِثالي أَعظمي أَيمن M بحيث إِنَّ $aR \subseteq M$. وبِما أَن R هي حلقة مِن النمط-MP يُمنى . إِذن يوجد $b \in a$R بِحيث إِنَّ $a = ba$ وهذا يؤدي إِلى $a = ara$ حيث إِنَّ $r \in R$, $x \in r(ar) \cap aR$. فَإِنَّ $arx = 0$ وإِنَّ $\mathrm{x = az}$ لِبعض $z \in R$ وإِنَّ $x = araz = arx = 0$ لِذلك فَإِنَّ $r(ar) \cap aR = 0$, وهذا يؤدي إِلى $r(ar) = 0$ وبالتالي فإِنَّ $l(ar) = 0$ (مبرهنة (2.5)) . إِذن مِن القضية (2.2) نحصل على وجود معكوس أَيمن أي إِنَّ $arv = 1$ لِبعض $v \in R$ و $a(rv) = 1 \in M$ وهذا تناقض . إِذن $\mathrm{aR} = \mathrm{R}$ و R حلقة مقسومة يمنى .■

مبرهنة $(\mathbf{2.8})$: لِتكن R حلقة مِن النمط-MP يُمنى بِحيث إِنَّ r(a) هو مِثالي مِن النمط-W لِكل $a \in$ R . فَإِن كل مِثالي أَساسي هو مُرَكَّبة جمع مُباشر.

البرهان:− مِن المبرهنة (2.5) نحصل على R مُختزلة . لِكي نُبرهن أن bR هو مُركبة جمع مباشر في R . نَدعي أن $bR+r(b)=R$ نَفرض أن $bR+r(b)\neq R$. إذن يوجد مِثالي أعظمي أيمن M بحيث إنَّ $bR+r(b)\subseteq M$, بما أن M هو مِثالي نَقي أيسر لِذلك فَإنَّ b = cb لِبعض $c\in$ M لِهذا فإن $1-c\in$ $l(b)=r(b)\subseteq$ M (قضية مساعدة (2.6)) لذلك فإنَّ $1\in$ M وإنَّ $M=R$ وهذا تناقض لِذلك فَإنَّ $bR+$ $r(b)=$ R . الآن بما أن $bR\cap r(b)=0$ (قضية مساعدة (2.6)) لِذلك فَإنَّ bR مُركبة جمع مُباشِر.■

يقال للحلقة R بأنها عكوسة إذا كان $ab=0$ يؤدي $ba=0$ لكل $a,b\in R$ [4]

قضية (**2.9**): إذا كانت R حلقة عكوسة مِن النمط− MP يمنى فَإِنَّ R هي مُنتظمة بِضعف يُمنى.

البرهان:− سَوف نُبَرْهِنُ $RaR+r(a)=R$ ، لكل $a\in R$. نَفْتَرِضُ أنَّ $RaR+r(a)\neq R$ إذن يوجد مِثالي أَعظمي أَيمن M في R بِحيث إنَّ $RaR+r(a)\subseteq M$. بما أن R هي حلقة مِن النمط− MP إذن a = ba لِبعض $b\in$ M وهذا يؤدي إلى أَنَّ $1-b\in l(a)=r(a)\subseteq$ M , (R حلقة عكوسة) ومن ثَمَّ فَإنَّ $1\in$ M وهذا تناقض . لِذلك فَإنَّ $RaR+r(a)=$ R ومن ثَمَّ فَإنَّ R هي حلقة مُنتظمة بِضعف .■

قضية (**2.10**) : لتكن R حلقة فإنَّ R مختزلة إذا كانت R حلقة من النمط − MP يمنى وعكوسة .

البرهان : ليكن $a\in R$ بحيث إنَّ $a^2=0$. إذا كان $a\neq 0$ يوجد مثالي أيمن أعظم M في R بحيث إنَّ $r(a)\subseteq M$. وبما أنَّ R حلقة من النمط− MP يمنى , فإنَّ $a=ba$ لبعض $b\in M$ لذلك فإنَّ $(1-b)\in$ $l(a)=r(a)\subseteq M$ (R حلقة عكوسة) ومن ثم نحصل على أنَّ $1\in M$ وهذا تناقض لذلك R حلقة مختزلة.■

تعريف (**2.11**): الحلقة R تُسمى **أَبيلية تقريبا يُمنى** (**almost abelian ring**) إذا كان $ea=0$ تُحقق $eRa=0$ لِكل $a\in N(R)$ و $e\in E(R)$ ($E(R)$ مجموعة العناصر المتحايدة). [9]

مِن الواضح أن الحلقة أَبيلية هي أَبيلية تقريباً يُمنى .العكس غير صحيح. [10]

تعريف:(**2.12**) : [**9**] يُقال لِلحلقة R بِأَنها **مِن النمط**−**NBF** (**Nilpotent Free Bearing**) **يُمنى** ، (**يُسرى**) إذا كان لِكُلِّ $a\in N(R)$, و $b\in R$ ، $ab=0$, يوجد $e\in E(R)$ بِحَيث إنَّ $ae=0$ و $eb=b$

الآن نستخدم شرطاً آخر لكي تكون الحلقة− MP منتظمة بقوة.

مبرهنة: (**2.13**) : لِتَكُنْ R حلقة مِن النمط−MP يُمنى . إذا كانت R مِن النمط−NBF يُسرى وأَبيلية تقريباً فَإِنها حلقة مُنتظمة بِقوة.

البرهان:− نَفترض أَنَّ R غير مُختزلة . لِهذا يوجد $a\in R$ $0\neq$ بِحَيث إنَّ $a^2=0$. إذا كان $aR+l(Ra)\neq R$ عِنْدَئِذٍ يوجد مِثالي أَعظمي أَيمن M بِحيث إنَّ $aR+l(Ra)\subseteq M$ بما أن $a\in aR\subseteq$ M , $a=ba$ لِبعض $b\in M$ (R هي حلقة مِن النمط−MP). و بِما أَن R هي حلقة مِن النمط−NBF يُمنى إذن يوجد $e\in E(R)$ ، إذ إنَّ $ea=0$ و $(1-b)e=(1-b)$ بما أَن R أَبيلية تقريباً يُمنى , $eRa=$ 0 . لِذلك فَإنَّ $(1-b)Ra=(1-b)eRa=0$ تحقق $(1-b)\in l(Ra)$ وهذا تناقض لِذلك فَإنَّ $aR+l(Ra)=R$. لِيَكُنْ $1=ac+x$, عندما $c\in R\,,x\in l(Ra)$ فَإِنَّ $a=aca+xa=aca$ بما أَنَّ $(1-ac)a=0$ و $1-ac\in E(R),(1-ac)Ra=0$ لِذلك فإنَّ $(1-ac)ca=0$ ومن

هنا نحصل على $ca = acca$ و $a = aca = acca = 0$ لِذلك فَإِنَّ R حلقة مُختزلة وحسب مُبرهنة (2.3) نحصل على R حلقة مُنتظمة بِقوة .■

تعريف $(\mathbf{2.14})$:يُقال لِلمقاس الأَيمن M على الحلقة R بِأَنه **غامر مِن النمط-$\boldsymbol{nil}$** $(\boldsymbol{nil-injective})$ إذا كان لِكُلْ $a \in N(R)$ ، و أي تشاكل $f: aR \to M$ يمكن توسيعه الى $f: R \to M$ أو بعبارة مكافئة . $f = m$ حيث $m \in M$ ، يُقال لِلحلقة R بِأَنها حلقة **غامره يُمنى مِن النمط-$\boldsymbol{nil}$** إذا كان R_R مقاساً غامراً مِن النمط-nil.[8]

قبل الإنتهاء مِن هذا البند نوجد شرط الحلقات الغامرة التي تكون من النمط$-nil$ تقريباً يمنى لكي تكون منتظمة بقوة.

قضية مساعدة $(\mathbf{2.15})$: [5] ذا كانت R حلقة مِن النمط-MP يُمنى فَإِنَّ $Y(R) = 0$.■

قضية مساعدة $(\mathbf{2.16})$:[8] إذا كانت R حلقة غامرة يمنى من النمط$-\ nil$ ' فإنَّ R حلقة مختزلة إذا وفقط إذا كانت من النمط$-\ NI$ و $Y(R) = 0$.

مبرهنة $(\mathbf{2.17})$: ليكن N(R) مثالي في الحلقة R, فإنَّ العبارتين الآتيتين متكافأتان:

1- R حلقة منتظمة بقوة

2- R حلقة غامرة من النمط$-nil$ يمنى و من النمط$-\ MP$ يمنى .

البرهان: من الواضح $1 \Leftarrow 2$

$2 \Leftarrow 1$ بما أنَّ $N(R)$ هو مثالي و R حلقة غامرة من النمط$-nil$, فإنَّ فباستخدام القضيتين المساعدتين (2.16) و (2.15) نحصل على R حلقة مختزلة. وباستخدام المبرهنة (2.3) نحصل على أن R منتظمة بقوة.■

المصادر

[1] Abdullah , N . K. (2015) , " Strongly pure ideals and strongly pure submodules " , K . Un . J./Scientific studies Vol . 10 , 12-28 .

[2] AL-Ezeh H.(1988) ; "The pure spectrum of PF-ring" , comm.Math Univer. S . p . Vol . 37 , No.2 , 179 – 18 .

[3] AL-Ezeh, H.(1989); "pure ideals in commutative reduced Gelf and rings with unity" . Arch . Math . Vol . 53 ,266 – 269 .

[4] Cohn , P – M . (1999) , "Reversible rings" , Boll . London Math . Soc ., 31 , 641 – 648 .

[5] Mahmood , R.D. (2000) , "On pure ideals and pure sub modules" , Ph . D., Thesis , Mosul university .

[6] Mahmood , R.D. and Mahmood , A.B.(2007),"On rings whose maximal essential ideals are pure" Raf.J.of Comp.and Math.Vol.4,No.1,57-62

[7] Mahmood,R.D.and Mahmood,A.B.(2008),"MaximaL Generalization Of Pure Ideals" Raf .J.of Comp.and Math .Vol . 5 ,No.1,21-27. "

[8] Wei , J . C . and Chen , J . H. (2007); "Nil-injective rings" , Int . Electron . J – of Algebra , Vol .2 1-21.

[9] Wei , J.C, (2013) , "Almost abelian rings" , Commun . in Math ., VOL – 21, NO .1,15-30 .

[10] Zhow , H . (2007) , "Left SF-rings and regular rings" Comm . In Algebra , Vol . 35 , NO . 12 , 3842 – 3850.